

O twierzeniach Gödla o zupełności
pisali między innymi Michał Korch w Δ_{19}^{12}
i Michał Skrzypczak w Δ_{21}^4 .

rozumieć, że grzeczna odpowiedź nie znaczy prawdziwa, a przekonujący ton nie jest dowodem kompetencji.

Dlatego tak ważna jest dziedzina, która dopiero raczkuje: Explainable AI – wyjaśnialna sztuczna inteligencja. Jej celem nie jest budowanie coraz większych modeli, ale zrozumienie tych, które już mamy. Jak działają? Czy działają? Dlaczego nie działają? Co można zrobić, by działały lepiej? Jak kontrolować ich zachowanie, zanim wyrządzą szkodę, a nie dopiero po fakcie? To pytania, na które musimy znaleźć odpowiedzi – i na które odpowiedzi znajdziemy.

Wir müssen wissen. Wir werden wissen. Musimy wiedzieć. Będziemy wiedzieć. Hilbert wypowiedział te słowa w 1930 roku, wierząc, że matematyka zdoła rozwiązać wszystkie swoje problemy. Historia pokazała, że był zbyt optymistyczny – już rok później Kurt Gödel udowodnił twierdzenia o zupełności. Ale sam duch tych słów pozostaje aktualny: nie jesteśmy biernymi obserwatorami rzeczywistości, czekającymi, aż technologia zrobi z nami, co zechce. Jesteśmy pokoleniem odkrywców. Tak jak poprzednie pokolenia uczyły się nawigować po oceanach, omijając rafy i mielizny, tak my uczymy się nawigować po przestrzeni możliwości sztucznej inteligencji. Rafy istnieją – opisałem cztery z nich. Ale istnieją też szlaki, które prowadzą do miejsc, gdzie jeszcze nikt nie dotarł. Do szybszych odkryć naukowych, lepszej medycyny, bardziej dostępnej edukacji. Do narzędzi, które wzmacniają ludzką inteligencję, zamiast ją zastępować. Rok 2025 przyniósł spektakularne wpadki. Rok 2026 przyniesie kolejne – to pewne. Ale przyniesie też nowe metody weryfikacji, nowe techniki wyjaśniania, nowe sposoby kontroli. Przyniesie badaczy, którzy zamiast ślepo ufać lub bezkrytycznie odrzucać, nauczą się zadawać właściwe pytania. A właściwe pytania – jak każdy matematyk wie – są warte więcej niż pochopne odpowiedzi.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1141. Podczas suchego, bezwietrznego dnia, po polnej drodze przejechał samochód, wzniecając chmurę pyłu – drobnego piasku – na wysokość $h = 5$ m. Oszacuj, po jakim czasie τ pył całkowicie opadnie. Przyjmij, że najmniejsze ziarenka pyłu mają średnicę $D \approx 0,02$ mm i są okruchami kwarcu (SiO_2) o gęstości $\rho = 2,6 \cdot 10^3$ kg/m³, a lepkość powietrza wynosi $\eta = 1,85 \cdot 10^{-5}$ kg/(m · s). Przyspieszenie ziemskie wynosi 9,81 m/s².
Wskazówka: dla małych prędkości v siła F oporu powietrza wynosi: $F = 3\pi\eta vD$.

F 1142. W czasie $t_1 = 1$ min grzałka o mocy $P = 250$ W podgrzała wodę w naczyniu od $T_1 = 80^\circ\text{C}$ do $T_2 = 85^\circ\text{C}$. Po wyłączeniu grzałki w czasie $t_2 = 0,5$ minuty temperatura wody spadła o $\Delta T = 1^\circ\text{C}$. Jaka masa m wody znajdowała się w naczyniu? Ciepło właściwe wody wynosi $c = 4,2 \cdot 10^3$ J/(kg · K), a temperatura otoczenia wynosiła 20°C .

Przygotował Dominik BUREK

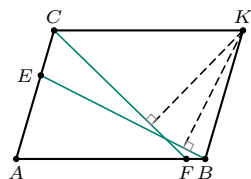
M 1849. Punkty F i E leżą na bokach, odpowiednio, AB i AC równoległoboku $ABKC$ w taki sposób, że $BE = CF$. Udowodnić, że punkt K jest równoodległy od prostych BE i CF .

M 1850. Niech $x_1 < x_2 < \dots < x_{2026}$ będzie rosnącym ciągiem liczb naturalnych. Dla $i = 1, 2, \dots, 2026$ zdefiniujmy

$$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right) \left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right) \dots \left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Jaką największą liczbę liczb całkowitych dodatnich może zawierać zbiór $\{p_1, p_2, \dots, p_{2026}\}$?

M 1851. Wyznaczyć wszystkie pary liczb całkowitych m oraz $n > 2$ takie, że

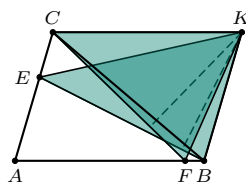
$$((n-1)! - n) \cdot (n-2)! = m(m-2).$$


Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 8



Rozwiązanie zadania M 1849.



Ponieważ $BK \parallel EC$ oraz $CK \parallel FB$,
to

$$[KBE] = [KBC] = [KFC].$$

Biorąc pod uwagę równość $BE = CF$, dostajemy, że odległości punktu K od prostych BE i CF są równe.



Rozwiązanie zadania M 1850.

Zauważmy, że liczba

$$p_1 = x_1 - \frac{1}{x_1}$$

nie może być dodatnią liczbą całkowitą. Istotnie, jeżeli $x_1 = 1$, to $p_1 = 0$, a jeżeli $x_1 > 1$, to p_1 nie jest liczbą całkowitą, jako różnica liczby całkowitej i niecałkowitej. Zatem wśród liczb p_i może być co najwyżej 2025 liczb całkowitych.

Pokażemy, że można osiągnąć ich 2025. Dla $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ mamy

$$p_2 = \left(2 - \frac{1}{2}\right) \left(3 - \frac{1}{3}\right) = 4.$$

Dla $n \geq 2$ połóżmy $x_{n+1} = p_n$. Wówczas

$$p_{n+1} = p_n \left(x_{n+1} - \frac{1}{x_{n+1}}\right) = p_n^2 - 1.$$

Jeśli więc p_n jest liczbą całkowitą, to p_{n+1} również jest liczbą całkowitą, a dodatkowo $x_{n+2} = p_{n+1}$ jest większe od $x_{n+1} = p_n$. W ten sposób otrzymujemy rosnący ciąg $x_1, \dots, x_{2026}$, dla którego 2025 spośród liczb p_i jest liczbami całkowitymi.



Rozwiązanie zadania M 1851.

Założmy, że liczby całkowite m oraz $n > 2$ spełniają równość z zadania. Zauważmy, że

$$\begin{aligned} & ((n-1)! - 1)((n-2)! - 1) \\ &= (n-1)!(n-2)! - (n-1)! - (n-2)! + 1 \\ &= ((n-1)! - n)(n-2)! + 1 = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2. \end{aligned}$$

Przypuśćmy najpierw, że $n > 4$. Pokażemy, że liczby $(n-1)! - 1$ oraz $(n-2)! - 1$ są względnie pierwsze. Istotnie, gdyby obie dzieliły się przez pewną liczbę pierwszą p , to również dzieliłaby się przez p liczba

$$(n-1)! - 1 - (n-1)((n-2)! - 1) = n - 2.$$

Stąd wynikałoby, że $p \mid (n-2)!$, a jednocześnie $p \mid ((n-2)! - 1)$, co jest niemożliwe.

Zatem iloczyn dwóch względnie pierwszych liczb

$$((n-1)! - 1)((n-2)! - 1)$$

jest kwadratem liczby całkowitej, a więc każda z nich musi być kwadratem liczby całkowitej. Jednak dla $n > 4$ liczba $(n-1)! - 1$ daje resztę 3 przy dzieleniu przez 4, co wyklucza możliwość bycia kwadratem.

Pozostaje rozpatrzyć przypadki $n \leq 4$. Dla $n = 4$ otrzymujemy

$$(m-1)^2 = 5,$$

co nie ma rozwiązań całkowitych. Dla $n = 3$ dostajemy

$$(m-1)^2 = 0,$$

skąd $m = 1$. Zatem jedynym rozwiązaniem jest para $m = 1, n = 3$.



Rozwiązanie zadania F 1141.

Po wznesieniu się na wysokość h ziarna pyłu opadają pod wpływem własnego ciężaru i siły oporu F . Czas τ całkowitego opadnięcia chmury pyłu jest równy czasowi opadania najmniejszych jego ziaren z wysokości h . Równanie ruchu dla ziarna o masie m ma postać (prędkość v skierowana jest w dół):

$$m \frac{dv}{dt} = mg - 3\pi\eta Dv,$$

czyli:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{3\pi\eta D}{m} \left(v - \frac{mg}{3\pi\eta D} \right).$$

Siła ciężkości jest stała, a wartość siły oporu rośnie proporcjonalnie do prędkości i po pewnym czasie zrównoważy ciężar ziarna. Nastąpi to, gdy prędkość spadania osiągnie wartość:

$$v_{gr} = \frac{gm}{3\pi\eta D} = \frac{\rho g D^2}{18\eta}.$$

W ostatniej równości uwzględniliśmy fakt, że $m = \pi\rho D^3/6$. Do czasu osiągnięcia prędkości v_{gr} ziarenko piasku spada z prędkością od niej mniejszą. Na pewno więc czas spadania:

$$\tau > \frac{h}{v_{gr}}.$$

Dla danych z treści zadania otrzymujemy $v_{gr} = 3,064 \cdot 10^{-2}$ m/s i oszacowanie $\tau > 163$ s, czyli ponad 2,5 minuty. Pełne rozwiązanie równania ruchu:

$$v(t) = v_{gr} \left(1 - \exp\left(-\frac{m}{3\pi\eta D} t\right) \right),$$

pozwala stwierdzić, że v_{gr} zostanie osiągnięte po czasie równym kilka razy $3\pi\eta D/m = D^2\rho/(18\eta)$, czyli czasie rzędu setnych części sekundy.

Uwaga: Przyjęty w rozwiązaniu wzór opisujący siłę oporu podczas ruchu z prędkością v względem ośrodka o gęstości ρ_{os} jest poprawny, gdy tzw. liczba Reynoldsa $Re = \rho_{os} Dv/\eta < 1$. Ośrodkiem jest tutaj powietrze o gęstości $\rho_{os} = 1,3$ kg/m³. W naszym przypadku liczba Reynoldsa wynosi więc $Re \approx 4,3 \cdot 10^{-2} < 1$, a więc warunek jest spełniony.



Rozwiązanie zadania F 1142.

Podczas opisanych w treści zadania procesów grzania i chłodzenia wody zmiany jej temperatury są niewielkie, i przez cały czas temperatura wody jest znacznie wyższa od temperatury otoczenia. Możemy więc przyjąć, że szybkość strat ciepła w obu przypadkach jest taka sama – oznaczmy traconą moc jako P' . Podczas grzania mamy:

$$(P - P')t_1 = m \cdot c(T_2 - T_1),$$

a podczas chłodzenia po wyłączeniu grzałki:

$$P't_2 = m \cdot c\Delta T.$$

Po wyznaczeniu P' z pierwszego równania i podstawieniu do drugiego otrzymujemy:

$$m = \frac{t_2 P}{c \left(\frac{t_2}{t_1} (T_2 - T_1) + \Delta T \right)}.$$

Liczbowo: $m = 0,510$ kg wody.