



Ciąg zadań

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Kilka lat temu, w czasie *Szkoły Matematyki Poglądowej*, w luźnej, zakulisowej rozmowie, zaproponowałem, by to, co zwykliśmy nazywać „zbiorem zadań” przemianować na „ciąg zadań” – zadania są przecież zazwyczaj ułożone w jakiejś sensownej kolejności i prawie zawsze ponumerowane. Nazwa ta niestety nie przyjęła się – prawdopodobnie dlatego, że zbyt wiele książek wymagałoby wymiany okładek. Ale do kącika pasuje.

A zadania będą, rzecz jasna, o ciągach. Mają one ten urok, że mogą dotyczyć praktycznie każdego działu matematyki. Są trochę jak *Fasolki Bertiego Botta* – nigdy nie wiadomo, na co się trafi...

Uwaga dotycząca oznaczeń. Przez $(a)_k^m$ rozumiemy ciąg $(a_k, a_{k+1}, \dots, a_m)$ dla ustalonych całkowitych $k \leq m$; dopuszczamy przy tym $m = \infty$, a niekiedy również $k = -\infty$. Jest to zapis analogiczny do zapisu

funkcji $f : X \rightarrow \dots$, w którym określamy dziedzinę, ale nie chcemy nazywać zmiennej. W takich okolicznościach piszemy „funkcja f ” i analogicznie – „ciąg (a) ”.

Przykład (57 OM, zmodyfikowane). Niech c będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Ciąg $(a)_1^\infty$ liczb całkowitych dodatnich spełnia rekurencję $a_{n+1} = \tau(a_n) + c$ dla każdego $n \geq 1$, w czym $\tau(m)$ oznacza liczbę dzielników liczby m . Wykazać, że ciąg (a) jest od pewnego miejsca okresowy.

Rozwiązanie. Zauważmy najpierw, że $\tau(m) \leq \frac{1}{2}m + 1$, gdyż w przedziale $(m/2, m)$ nie ma dzielników m . Wynika z tego, że jeśli $a_n > 2c + 2$, to $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n + 1 + c < a_n$. Istnieje zatem liczba N , dla której $a_N \leq 2c + 2$. Z drugiej strony, jeśli $a_n \leq 2c + 2$, to mamy $a_{n+1} \leq \frac{1}{2}a_n + 1 + c \leq 2c + 2$. Z tego wynika, że $1 \leq a_n \leq 2c + 2$ dla wszystkich $n \geq N$. Zbiór wartości ciągu jest skończony (ale ciąg nie jest), a więc dla pewnych całkowitych $M, t > 0$ zachodzi równość $a_{M+t} = a_M$. Każdy wyraz ciągu jednoznacznie określa następny, a więc indukcyjnie dowodzimy, że $a_{n+t} = a_n$ dla wszystkich $n \geq M$.

Mamy tu elementy teorii liczb, analizy i kombinatoryki. Brakuje tylko geometrii. Ale geometria będzie – jest ukryta w jednym z poniższych zadań.

Zadania

- Dana jest liczba naturalna $n \geq 3$ oraz ciąg arytmetyczny $(a) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Wiadomo, że liczba $a_1 + 2a_2 + \dots + na_n$ jest wymierna. Dla jakich n wynika z tego, że co najmniej jeden wyraz ciągu (a) jest liczbą wymierną? (52 OM)
- Dany jest ciąg $(b)_0^\infty$ różnych, nieujemnych liczb całkowitych, spełniający warunki: $b_0 = 0$ i $b_n < 2n$ dla $n > 0$. Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej $m \geq 0$ istnieją liczby całkowite $k, l \geq 0$, dla których $b_k + b_l = m$. (70 OM)
- Ciąg $(a)_1^\infty$ ma taką własność, że dla wszystkich całkowitych dodatnich k, l zachodzi podzielność $k + l \mid a_k + a_l$. Udowodnić, że jeśli $k \neq l$, to $k - l \mid a_k - a_l$. (74 OM)
- Rozważmy zbiór wszystkich n -wyrazowych ciągów o wyrazach ze zbioru $\{1, 2, \dots, k\}$. Z każdego takiego ciągu wybieramy najmniejszy wyraz. Udowodnić, że suma wszystkich wybranych wyrazów jest równa $1^n + 2^n + \dots + k^n$. (54 OM)
- Dana jest liczba naturalna k . Ciąg $(a)_1^\infty$ określamy równościami: $a_1 = k + 1$ oraz $a_{n+1} = a_n^2 - ka_n + k$ dla $n \geq 1$. Wykazać, że jeśli $m \neq n$, to liczby a_n i a_m są względnie pierwsze. (53 OM)
- Dla każdej liczby całkowitej dodatniej n wyznaczyć największą możliwą długość ciągu spełniającego następujące trzy warunki:
 - wszystkie wyrazy należą do zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$,
 - żadne dwa kolejne wyrazy nie są równe,
 - w wyniku wykreślenia części wyrazów nie można otrzymać ciągu postaci (x, y, x, y) dla $x \neq y$. (62 OM)
- Ustalmy liczbę pierwszą p oraz liczby całkowite dodatnie $a, n < p$. Niech A będzie zbiorem reszt z dzielenia przez p liczb $a, 2a, 3a, \dots, na$. Dowieść, że ze zbioru A można wybrać $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ elementów, które uporządkowane rosnąco są kolejnymi wyrazami pewnego ciągu arytmetycznego. (11 WLM)
- Niech $n \geq 3$ będzie liczbą naturalną. Ciąg $(C)_0^n$ liczb nieujemnych spełnia warunek $C_p C_r + C_q C_s = C_{p+q} C_{q+r}$ dla wszystkich całkowitych $p, q, r, s \geq 0$ spełniających równość $p + q + r + s = n$. Znajdź $C_1 = 1$, wyznaczyć wszystkie możliwe wartości C_2 . (60 OM)
- Ciąg $(a)_1^\infty$ zdefiniowany jest następująco $a_1 = \frac{1}{2}$ oraz $a_{k+1} = \frac{1}{1+a_k-a_k^2}$ dla $k \geq 1$. Dowieść, że $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$ dla wszystkich $n \geq 1$. (5 WLM)

Wskazówki do zadań

- Dla wszystkich $n \equiv 1 \pmod 3$.
- Dla $m = 2n - 1$ w jednej z par $(k, m - k)$ ($0 \leq k < n$) obie liczby są wyrazami ciągu (zasada szlaku trzeba rozważyć przypadki, w których n jest lub nie jest wyrazem ciągu (b)).
- $a_k - a_l = (a_k + am) - (a_l + am)$.
- Jest dokładnie $(k - m + 1)^n - (k - m)^n$ takich ciągów z minimum równym m .
- Niech $P_n = a_1 a_2 \dots a_{n-1}$ ($P_1 = 1$). Indukcyjnie $a_n = P_n + k$ oraz $a_n \equiv 1 \pmod k$. Dla $n < m$ mamy $a_n \mid P_m$. Resztę roboty wykonaj algorytm Euklidesa.
- Nie trudno znaleźć taki $(2n - 1)$ -wyrazowy ciąg. Wykazamy indukcyjnie, że dłuższego nie ma. Dla $n > 1$ w naszym ciągu n – naszimy go $(a)_1^m$ – pewna wartość się powtarza. Niech $a_i = a_j = x$, przy czym w ciągu (a) $i < j$. Założenie indukcyjne stosujemy do ciągów $(a_1, \dots, a_{i-1}, x, a_{j+1}, \dots, a_m)$, które spełniają wymagane warunki i mają rozłączne zbiory wartości.
- Niech r_k będzie resztą z dzielenia ka przez p . Ciąg $(r_k)_1^\infty$ jest różnowartościowy i dla pewnych $r_1, \dots, r_{k_2}$ zachodzi $k_1, k_2 \in \{0, 1, \dots, \lfloor \sqrt{n} \rfloor\}$ i $k_1 \neq k_2$ oraz $k_1 + k_2 \mid p$. Dla $d = \gcd(k_1, k_2)$ ciąg $(r_{kd})_{k=1}^\infty$ jest arytmetyczny.
- Rozważamy wielokąt foremny $A_0 A_1 \dots A_{n-1}$ z $|A_0 A_1| = 1$ i przyjmijmy $C_i = |A_0 A_i|$ (z konwencją $A_n = A_0$, $C_n = C_0 = 0$). Zgodnie z twierdzeniem Ptolemeusza ciąg $(C)_0^n$ spełnia opisane w treści zależności. To samo twierdzenie pozwala uzasadnić (choć jest to trudniejsze), że zależność z zadania jednoznacznie wyznacza wyrazy ciągu $(C)_0^n$.
- Indukcyjnie $0 < a_n < 1$ oraz $a_1 a_2 \dots a_n = \frac{1}{1 + a_n}$. Dla $b_n = \frac{1}{1 + a_n}$ mamy $b_n = \frac{1}{1 + a_n} = \frac{1}{1 + \frac{1}{b_{n-1}}} = \frac{b_{n-1}}{1 + b_{n-1}}$ oraz $b_n < \frac{1}{2}$ dla $n \geq 2$, indukcyjnie $b_n < \frac{1}{2}$.