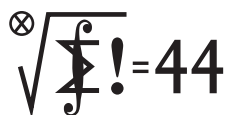


## Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
907 ( $WT = 2,42$ ) i 908 ( $WT = 2,10$ )  
z numeru 10/2025

|                    |           |       |
|--------------------|-----------|-------|
| Michał Adamaszek   | Kopenhaga | 44,15 |
| Krzysztof Kamiński | Pabianice | 40,19 |
| Roksana Słowik     |           | 39,93 |
| Marian Łupieżowiec | Gliwice   | 39,55 |
| Stanisław Bednarek | Łódź      | 38,25 |
| Mikołaj Pater      |           | 36,35 |
| Jędrzej Biedrzycki |           | 34,18 |

Pan Michał Adamaszek ( $10 \times 44$ ): szósty  
uczestnik Ligi matematycznej  
z dwucyfrową liczbą wykonanych rund!

**913.** Od razu widać, że zbiór  $\{0, 1, \dots, m\}$  nie zawiera trójki liczb o sumie zerowej (krótko: *trójki zerowej*); zatem  $m+1$  jest osiągalną liczebnością zbioru  $M$  (tu i dalej elementami rozważanych zbiorów są liczby całkowite). Pokażemy, że nie da się uzyskać większej liczebności; czyli udowodnimy, że

(\*) jeśli  $M \subset [-m, m]$  jest zbiorem liczb bez trójki zerowej ( $m$  – liczba nieparzysta), to  $|M| \leq m+1$ .

Rozpatrzmy najpierw specyficzne sytuacje (i), (ii), (iii).  
Oznaczenia:  $M_+ = M \cap [0, m]$ ,  $M_- = M \cap [-m, 0]$ .

(i) Gdy  $m \in M$  oraz  $-m \in M$ . Wówczas  $0 \notin M$  (brak trójki zerowej). Rozbijamy zbiór  $M_- \setminus \{-m\}$  na pary postaci  $\{-m+k, -k\}$ , gdzie  $k = 1, \dots, \frac{1}{2}(m-1)$ . Skoro  $m \in M$ , zatem z każdej z tych par może wejść do zbioru  $M$  co najwyżej jedna liczba. Dlatego  $|M_-| \leq \frac{1}{2}(m-1) + 1 = \frac{1}{2}(m+1)$ . Skoro  $-m \in M$ , zatem (analogicznie)  $|M_+| \leq \frac{1}{2}(m+1)$ . Stąd  $|M| = |M_+| + |M_-| \leq m+1$ .

(ii) Gdy  $m \in M$ , ale  $-m \notin M$ , za to  $-m+1 \in M$ . Rozbijamy zbiór  $M_- \setminus \{-m\}$  na pary tak samo, jak w przypadku (i); ale teraz  $M_- \setminus \{-m\} = M_-$ , i dlatego  $|M_-| \leq \frac{1}{2}(m-1)$ . Elementy nieujemne łączymy w pary postaci  $\{l, m-1-l\}$ , gdzie  $l = 0, \dots, \frac{1}{2}(m-3)$ ; jest ich  $\frac{1}{2}(m-1)$ . Skoro  $-m+1 \in M$ , z każdej z nich wchodzi do zbioru  $M$  co najwyżej jedna liczba. Nietrudno sprawdzić, że te pary łącznie wyczerpują wszystkie liczby z przedziału  $[0, m-1]$ , z wyjątkiem jednej, „centralnie położonej” liczby  $\frac{1}{2}(m-1)$ . Zatem  $|M_+| \leq \frac{1}{2}(m-1) + 1 + 1$  (dwa ostatnie składniki biorą się z uwzględnienia tej liczby „centralnej” oraz samej liczby  $m$ ). Stąd  $|M| = |M_-| + |M_+| \leq \frac{1}{2}(m-1) + \frac{1}{2}(m+3) = m+1$ .

(iii) Gdy  $-m \in M$ , ale  $m \notin M$ , za to  $m-1 \in M$ . To przypadek dokładnie symetryczny do (ii); rozumowanie przenosi się przez zmianę znaku wszystkich elementów (oraz przerzucenie liczby 0 do  $M_-$ ) i ponownie daje oszacowanie  $|M| \leq m+1$ .

Dowód własności (\*) przeprowadzimy przez indukcję (po liczbach nieparzystych, więc ze skokiem o 2). Przypadek bazowy ( $m=1$ ) jest banalny. Ustalmy liczbę nieparzystą  $m \geq 3$  i przyjmijmy własność analogiczną do (\*) dla  $m-2$ : każdy zbiór bez trójki zerowej, leżący w przedziale  $[-m+2, m-2]$  liczy nie więcej niż  $m-1$  elementów. Weźmy teraz dowolny zbiór  $M \subset [-m, m]$  bez trójki zerowej. Jego część zawarta w przedziale  $[-m+2, m-2]$  jest mocy  $\leq m-1$ .

## Zadania z matematyki nr 921, 922

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**921.** W trójkącie  $ABC$  punkt  $D$  jest spodkiem wysokości  $CD$ . Punkt  $E$  leży wewnątrz tego trójkąta i zachodzą związki:  $AC > BC = BE$ ,  $CD^2 = AD \cdot BD$ . Dwusieczna kąta  $AED$  połowi bok  $AB$ . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości miary kąta  $ABC$ .

**922.** Niech  $\sigma(k)$  oznacza sumę wszystkich (dodatnich) dzielników liczby naturalnej  $k$ . Niech  $A_n$  będzie średnią arytmetyczną liczb  $\sigma(k)/k$  po  $k = 1, \dots, n$ . Obliczyć granicę ciągu  $(A_n)$  gdy  $n \rightarrow \infty$  lub wykazać, że ten ciąg nie ma granicy.

Zadanie 922 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2026

Przypominamy treść zadań:

**913.** Niech  $m$  będzie liczbą naturalną nieparzystą. Wyznaczyć największą możliwą liczebność zbioru  $M$ , zawartego w przedziale  $[-m, m]$ , złożonego z liczb całkowitych, w którym każda trójka różnych liczb ma sumę różną od zera.

**914.** Znaleźć wszystkie pary  $a, b$  liczb rzeczywistych różnych od zera, dla których funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dana wzorem  $f(x) = |\sin(ax)| + |\cos(bx)|$  jest okresowa.

I teraz: jeśli część pozostała, czyli zawarta w zbiorze  $\{-m, -m+1, m-1, m\}$  jest mocy  $\leq 2$ , to cały zbiór  $M$  liczy nie więcej niż  $m+1$  elementów; to teza indukcyjna. A jeżeli część zbioru  $M$  zawarta w  $\{-m, -m+1, m-1, m\}$  jest mocy  $\geq 3$ , to musi mieć miejsce jedna z sytuacji (i), (ii), (iii); w każdej z nich, jak pokazano wyżej, dostajemy oszacowanie  $|M| \leq m+1$ , więc także mamy tezę indukcyjną. Własność (\*) została udowodniona. Stąd odpowiedź: maksymalna liczebność zbioru  $M$  wynosi  $m+1$ .

**914.** Zbadamy najpierw przypadek, kiedy  $b=1$ , czyli  $f(x) = |\sin ax| + |\cos x|$ . Jeśli  $a$  jest liczbą wymierną,  $a = k/m$  ( $k, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ), to każdy z dwóch składników definiujących  $f$  jest funkcją okresową (o okresie  $m\pi$ ), więc funkcja  $f$  też.

W drugą stronę: założmy, że  $f$  jest funkcją okresową z okresem  $T > 0$  (niekoniecznie minimalnym):  $f(x+T) = f(x)$ . Biorąc kolejno  $x=0$ ,  $x=\pi$ , dostajemy związki

$$(1) \quad \begin{aligned} |\sin aT| + |\cos T| &= 1, \\ |\sin(a\pi+aT)| + |\cos(\pi+T)| &= |\sin a\pi| + 1; \end{aligned}$$

przy tym  $|\cos(\pi+T)| = |\cos T|$  (liczba  $\pi$  jest okresem podstawowym każdej z funkcji  $|\sin|$ ,  $|\cos|$ ). Odejmujemy stronami pierwszą równość (1) od drugiej i, korzystając z tego, że  $|\sin(\alpha+\beta)| \leq |\sin \alpha \cos \beta| + |\sin \beta \cos \alpha|$ , otrzymujemy po prostym przekształceniu nierówność

$$|\sin a\pi| (|\cos aT| - 1) + |\sin aT| (|\cos a\pi| - 1) \geq 0.$$

Tu oba składniki są niedodatnie, więc muszą być zerami; dla pierwszego z nich oznacza to alternatywę

$$(2) \quad \sin a\pi = 0 \quad \text{lub} \quad |\cos aT| = 1.$$

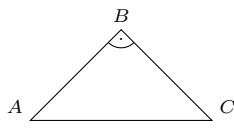
Jeśli zachodzi pierwsza z równości (2), to  $a$  jest liczbą całkowitą (więc wymierną). Jeśli zachodzi druga równość (2), to  $aT$  ( $\neq 0$ ) musi być całkowitą wielokrotnością  $\pi$ , więc  $T = k\pi/a$  (dla pewnego  $k \in \mathbb{Z}$ ). Wstawiamy to do pierwszego równania (1) i dostajemy  $|\cos(k\pi/a)| = 1$ , skąd  $k\pi/a = m\pi$  (dla pewnego  $m \in \mathbb{Z}$ ) – czyli  $a = k/m$ . Wykazaliśmy, że  $f(x) = |\sin ax| + |\cos x|$  jest funkcją okresową wtedy i tylko wtedy, gdy  $a$  jest liczbą wymierną.

Przypadek ogólny (funkcja określona w treści zadania) przez oczywistą zamianę zmiennej  $y = bx$  ( $b \neq 0$ ) sprowadza badaną funkcję do postaci  $|\sin(\frac{a}{b}y)| + |\cos y|$ . Na mocy przypadku już rozpatrzonego wnosimy, że funkcja  $f$  jest okresowa wtedy i tylko wtedy, gdy stosunek  $a/b$  jest liczbą wymierną. [Rozwiązanie według pomysłu autora zadania (Witold Bednarek).]

# Klub 44 F



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VII 2026



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
804 ( $WT = 2,2$ ), 805 ( $WT = 1,5$ )  
z numeru 10/2025

|                     |             |           |
|---------------------|-------------|-----------|
| Jan Zambrzycki      | Białystok   | 5-44+1,04 |
| Jacek Konieczny     | Poznań      | 41,41     |
| Paweł Perkowski     | Ożarów Maz. | 6-37,19   |
| Andrzej Nowogrodzki |             |           |
|                     | Chocianów   | 3-36,28   |
| Krzysztof Zygan     | Lubin       | 34,85     |
| Ryszard Woźniak     | Kraków      | 34,5      |
| Tomasz Wietecha     | Tarnów      | 18-27,40  |
| Paweł Kubit         | Kraków      | 21,82     |
| Marian Łupieżowiec  | Gliwice     | 3-19,65   |
| Zbigniew Galias     | Kraków      | 1-14,75   |

**810.** Siłę naprężenia sznurka  $N$  w badanej chwili możemy obliczyć z równań ruchu:

$$2mg/3 - N = 2ma/3, \quad N - mg/3 = ma/3,$$

gdzie  $a$  jest przyspieszeniem sznurka, stąd

$$N = 4mg/9.$$

Szukana siła  $F$  nacisku na blok wynosi

$$(1) \quad F = 2N - \Delta F,$$

gdzie  $\Delta F$  jest wypadkową składowych pionowych sił dośrodkowych działających na elementy sznurka leżące na bloku. Mimo że promień  $r$  bloku jest mały, nie możemy jej pominąć, bo masa tej części sznurka  $\Delta m \sim r$ , a przyspieszenie dośrodkowe  $a_d \sim 1/r$ .

Siłę  $\Delta F$  możemy wyliczyć z zasady zachowania pędu. Rozważmy mały przedział czasowy  $\Delta t$ , w którym część sznurka o prędkości  $v$  i masie  $mv\Delta t/l$  przechodzi przez blok, a jej prędkość zmienia się z  $v$  na  $-v$ . Spełnione jest równanie:

$$\Delta F \Delta t = 2mv^2 \Delta t/l,$$

$$(2) \quad \Delta F = 2mv^2/l.$$

Prędkość  $v$  w badanej chwili możemy obliczyć z zasady zachowania energii:

$$-mgl/4 = -mgl/18 - 2mgl/9 + mv^2/2,$$

$$(3) \quad v^2 = gl/18.$$

Z równań (1)–(3) otrzymujemy szukaną siłę nacisku:

$$F = 7mg/9.$$

**811.** Niech oś  $Z$  będzie skierowana przeciwnie do wektora natężenia pola elektrycznego  $\mathbf{E}$ . Ruch elektronu jest złożeniem

## Zadania z fizyki nr 818, 819

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

**818.** Przekrój szklanego pryzmatu jest prostokątnym trójkątem równoramiennym (rysunek). Podstawa  $AC$  i ścianka boczna  $BC$  są gładkie, ścianka boczna  $AB$  – matowa. Szkło, z którego wykonano pryzmat, ma współczynnik załamania  $n$ . Pryzmat stoi na gazecie. Jaką część powierzchni tekstu widzi obserwator, który patrzy przez gładką ściankę  $BC$ ?

**819.** W naczyniu znajduje się ciecz i jej para nasycona. W wyniku procesu izotermicznego rozprężania objętość zajmowana przez parę wzrosła  $\beta = 3$  razy, a ciśnienie pary zmalało  $\alpha = 2$  razy. Znaleźć stosunek masy cieczy do masy pary znajdujących się w naczyniu w chwili początkowej. Objętość zajmowaną przez ciecz zaniedbać.

## Rozwiązania zadań z numeru 1/2026

Przypominamy treść zadań:

**810.** Gładki, jednorodny sznurek o długości  $l$  i masie  $m$  przerzucony jest przez niewielki nieruchomy blok tak, że w chwili początkowej pozostaje w równowadze, a po lekkim przesunięciu zaczyna ześlizgiwać się z bloku. Znaleźć siłę nacisku sznurka na blok w chwili, gdy jego długość z jednej strony wynosi  $l/3$ .

**811.** Naładowany kondensator płaski znajduje się w jednorodnym polu magnetycznym, którego linie są prostopadłe do płaszczyzn okładek. Odległość między okładkami wynosi  $d$ , indukcja pola magnetycznego  $B$ . Wewnątrz kondensatora, koło ujemnie naładowanej okładki znajduje się źródło powolnych elektronów wysyłanych w różnych kierunkach. Jakie musi być napięcie między okładkami, aby elektrony ogniskowały się z możliwie najlepszą dokładnością na dodatnio naładowanej okładce? Oddziaływanie między elektronami zaniedbujemy.

ruchu wzdłuż osi  $Z$  oraz ruchu po okręgu w płaszczyźnie prostopadłej do  $B$ . Ze strony pola elektrycznego na elektron działa siła  $\mathbf{F} = -e\mathbf{E}$ , która nadaje mu przyspieszenie wzdłuż osi  $Z$  o bezwzględnej wartości

$$a_z = eE/(m) = eU/(md),$$

gdzie  $U$  jest napięciem między okładkami,  $m$  masą elektronu,  $-e$  jego ładunkiem. W płaszczyźnie prostopadłej do  $Z$  elektron porusza się po okręgu o promieniu  $R = mv_{\perp}/(eB)$ , a  $v_{\perp}$  jest rzutem jego prędkości na płaszczyznę prostopadłą do  $Z$ . Okres obrotu

$$T = 2\pi m/(eB).$$

Aby wiązka elektronów ogniskowała się w jednym punkcie na dodatniej okładce, czas ich przelotu między okładkami musi wynosić  $nT$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots$ , czyli spełniony musi być warunek:

$$d = v_z nT + a_z n^2 T^2 / 2 = v_z nT + eUn^2 T^2 / (2md),$$

gdzie  $v_z$  jest zetaową składową prędkości elektronu emitowanego ze źródła. Dla różnych kątów emisji  $v_z$  jest inne, i zogniskowanie wiązki w jednym punkcie nie jest możliwe. Ponieważ jednak źródło emituje powolne elektrony, możemy w poprzednim wzorze zaniedbać pierwszy wyraz zależny od prędkości. Stąd otrzymujemy warunek na napięcie między okładkami:

$$U = ed^2 B^2 / (2\pi^2 n^2 m).$$

Jest to wynik przybliżony. Elektrony nie skupiają się w jednym punkcie, lecz tworzą „plamkę” na dodatnio naładowanej okładce. Jej rozmiar będzie najmniejszy dla  $n = 1$ . Ostatecznie szukane napięcie wynosi:

$$U = ed^2 B^2 / (2\pi^2 m).$$

## Skróć regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , przy czym  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).