

Kołysanka z geometrią w tle

Michał MIŚKIEWICZ*

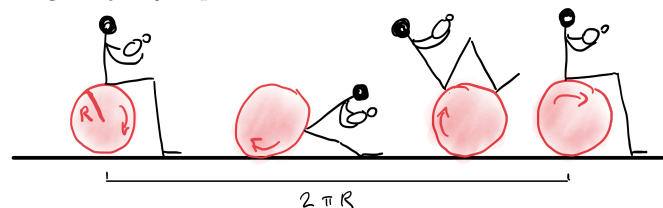
Moja młodsza córeczka lubi, kiedy biorę ją na ręce i siadam na piłce do ćwiczeń. Delikatne kołysanie na gumowej piłce ją uspokaja, a czasem nawet pomaga zasnąć. Niestety nieraz zdarza mi się, że gdy już usiądę, zauważam tuż obok jakiś mebel lub – co gorsza – szeleszczące zabawki, a tego akurat zasypiające maluszki nie lubią. Oczywiście mogą się przetrulić nieco w bok, ale wtedy siedziałbym nierówno, nie na samym szczycie piłki, co po chwili robi się męczące (rys. 1). Jak więc wydostać się z niechcianego kąta?



Rys. 1. Siedzenie na samym szczycie piłki do ćwiczeń jest wygodne, siedzenie bardziej z boku już nie (i grozi wypadkiem)

Sformułujmy ten problem nieco ściślej, przyjmując pewne uproszczenia. Piłka niech będzie idealną sztywną sferą (o promieniu $R \approx 30$ cm) poruszającą się bez poślizgu po płaskim podłożu. Między piłką a siedzącym również nie ma poślizgu, więc miejsce ich styku jest zawsze w tym samym miejscu sfery – początkowo w najwyższym jej punkcie. Zadanie polega na wskazaniu takiego toru przetracania piłki, by wspomniane miejsce styku znowu znalazło się na szczycie, ale sama piłka była już gdzie indziej.

Może się wydawać, że problem jest beznadziejny – jeśli piłka przetoczy się gdzie indziej, to przecież miejsce styku również się przesunie. Na szczęście tak nie jest, a przykładowe rozwiązanie widać na rysunku 2 – po prostu przetracamy piłkę po linii prostej na odległość $2\pi R$. Tyle że w połowie drogi rodzic wraz z dzieckiem muszą... zapaść się pod ziemię? Sprasować? Dodajmy więc następujące wymaganie: punkt siedzenia ma pozostać blisko najwyższego położenia, a przynajmniej na górnej części piłki.

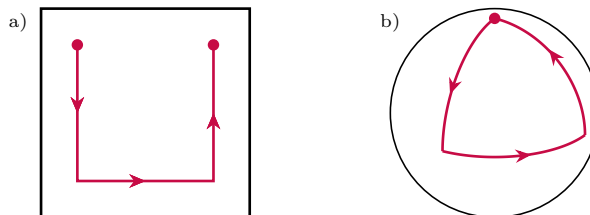


Rys. 2. Po przetoczeniu o $2\pi R$ rodzic znowu jest na górze piłki, ale za jaką cenę?

Da się to zrobić! Ale żeby dobrze zrozumieć, co się tu dzieje z matematycznego punktu widzenia, zaczniemy od eksperymentu myślowego. Stańmy na biegunie północnym zwróceniem w kierunku Paryża ($2^\circ 20'$ E). Przejdźmy 10 000 km prosto, skróćmy 90° w lewo, jeszcze raz tyle samo prosto, w lewo i znowu prosto. Jak wyobrazić sobie taką wycieczkę? Na podstawie podanych wskazówek można narysować mentalną mapę (rys. 3a): jest to łamana złożona

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

z trzech boków kwadratu. Rzeczywistość wycieczki jest jednak odmienna (rys. 3b): na koniec znajdujemy się z powrotem na biegunie.



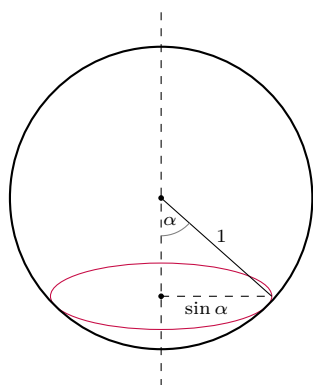
Rys. 3. Dwie ilustracje opisanej wycieczki – na płaszczyźnie i na sferze. To nie przypadek, że tak równo wyszło: oryginalna definicja metra z 1795 roku była oparta właśnie na długości paryskiego południka

Krzywa opisująca wycieczkę na Ziemi jest więc „zamknięta”, chociaż krzywa na mapie taka nie jest. Możliwa jest też przeciwna sytuacja: jeśli na przykład krzywą na mapie uzupełnimy o brakujący bok kwadratu, to odpowiadająca jej wycieczka jeszcze raz odwiedzi Paryż i zakończy się na równiku. Widać więc, że płaszczyzna i sfera – czyli mapa i Ziemia – to dwa różne światy. Opisana tu odpowiedniość (znana jako *development map*) pozwala powiązać dowolną krzywą płaską z odpowiadającą jej krzywą na zadanej powierzchni (dowolnej, nie musi to być sfera). Do tej pory ograniczyliśmy się do krzywej łamanej, i wówczas jej odcinkom odpowiadają łuki geodezyjne na sferze, czyli fragmenty kół wielkich (o geodezyjnych można było przeczytać w Δ_{21}^7 i Δ_{22}^7). Oczywiście prawdziwie zakrzywione krzywe też mają swoje odpowiedniki na sferze.

Wracając do problemu piłki, łatwo odtwarzamy opisany eksperyment: odrysowujemy na podłożu diagram z rysunku 3a (za bok kwadratu przyjmując $\frac{\pi}{2}R \approx 47$ cm) i po zadanym torze przetracamy piłkę. Punkt styku piłki z podłożą określa wtedy na sferze tor z rysunku 3b. Skoro wraca on na swoje początkowe miejsce na sferze, to na antypodach również rodzic ląduje z powrotem na szczycie. To rozwiązanie jest już fizycznie możliwe, ale nadal niepraktyczne ze względu na duże odchylenie od pionu. Jeśli zależy nam, by to odchylenie nie przekraczało z góry zadanej tolerancji, rozważmy jeszcze jedno podejście.

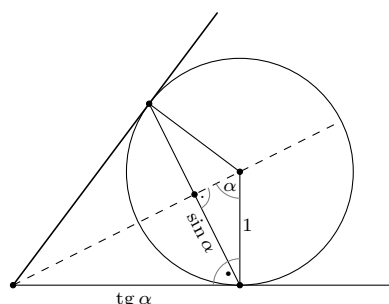
Zatańczmy biodrami, w końcu dzieci to lubią.

Dokładniej, wykonujemy na piłce koliste ruchy i zobaczymy, gdzie nas to zaprowadzi. Na potrzeby analizy przyjmijmy, że piłka jest sferą jednostkową, a w wyniku naszych ruchów punkt styczności z podłożem przemierza na niej okrąg wyznaczony przez kąt α jak na rysunku 4, czyli „równoleżnik szerokości geograficznej $90^\circ - \alpha$ ”. Promień takiego okręgu to $\sin \alpha$. Ale gdy przetoczmy sferę wzdłuż równoleżnika, ślad na podłożu może być okręgiem o innym promieniu (polecam rozważyć przypadek $\alpha = 90^\circ$). Tylko jakim?



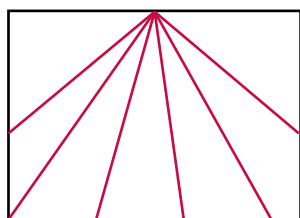
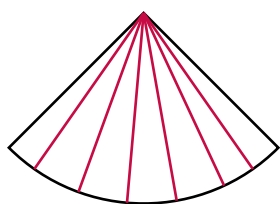
Rys 4. Nowy pomysł: ruch po równoleżniku

Wyznaczenie śladu będzie łatwiejsze, jeśli założymy sferze czapeczkę, czyli przytwierdzimy stożek styczny do niej dokładnie wzdłuż naszego równoleżnika (jak na rys. 5). Zamiast toczyć samą sferę, możemy toczyć stożek ze sferą w środku, a efekt będzie ten sam.



Rys. 5. Sfera z odpowiednią stożkową czapeczką – toczenie jej po podłodze zostawia ten sam ślad, co gdyby toczyć samą sferę

To drugie jest naprawdę łatwe i przed dalszą lekturą polecam Czytelnikowi samodzielnie zbudować stożek z kartki papieru: należy w tym celu wyciąć wycinek koła (zresztą sama kartka A4 też się nada) i skleić brzegi jak na rysunku 6. Gotowe? Przeturlajmy taki stożek po stole, a zobaczymy, że jego wierzchołek pozostaje w miejscu. To oznacza, że śladem jest okrąg o promieniu r równym długości odpowiedniej tworzącej stożka, czyli odległości od wierzchołka do punktów równoleżnika. Z rysunku 5 odczytujemy, że $r = \operatorname{tg} \alpha$.

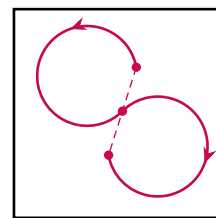
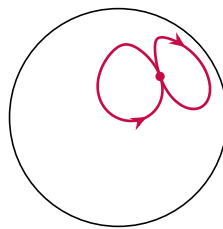


Rys. 6. Przepis na stożek: trzeba tak zgiąć kartkę, by kolorowe linie tworzyły tworzące stożka, a następnie skleić brzegi. Użycie formatu A4 daje stożek z nierówną podstawą, ale to nie szkodzi

Dokąd nas to prowadzi? Niby donikąd, bo tylko kręcimy się w kółko – tak na piłce, jak i na podłodze – ale...

Spróbujmy robić ósemki. Otóż po wykonaniu jednego kółka zrobmy drugie, ale w przeciwną stronę (rys. 7). Po pierwszym kółku nasz ślad na podłodze ma taką długość, jak okrąg przemierzony na sferze, czyli $2\pi \cdot \sin \alpha$, a to przecież mniej niż $2\pi r$. Dokładniej, proporcja długości okręgów wynosi:

$$\frac{\sin \alpha}{r} = \frac{\sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha} = \cos \alpha < 1.$$



Rys. 7. Zataczanie ósepek biodrami daje pożądany efekt: punkt siedzenia pozostaje blisko szczytu, a piłka konsekwentnie się przesuwa

Przykładowo, dla $\alpha = 30^\circ$ jest to $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$, wykonaliśmy więc jedynie 87% pełnego okrążenia na podłodze. Po wykonaniu drugiego kółka w przeciwną stronę oddalimy się od punktu wyjścia jeszcze bardziej, na około 28 cm. Następne ósemki powiodą nas szczęśliwie w wybranym kierunku, hen, daleko od niebezpiecznego kąta z zabawkami.

Podsumowanie. Trzeba uczciwie przyznać, że opisana analiza nijak się ma do praktyki, bo przecież piłka do ćwiczeń nie jest idealnie sztywna, a i poślizg może się przydarzyć. Jak to często bywa z matematyką rekreacyjną, pozostaje nam więc satysfakcja z rozwiązanego problemu. Ale to nie wszystko.

Wspomniałem już, że odpowiedniość między krzywymi posiada w literaturze własną nazwę: *development map*. Widocznie nie jest to wyłącznie źródło rozrywki. I rzeczywiście, jest to pojęcie pożyteczne, na przykład gdy chce się rozważać ruch Browna (i ogólniej martyngały) na różnych przestrzeniach [Hsu, Chapter 2]. Procedura przetaczania również jest punktem wyjścia do różnych rozważań [Sharpe, Appendix B]. Jej angielska nazwa, *rolling without slipping or twisting*, wskazuje, że istotny jest nie tylko brak poślizgu, ale i brak skręcania. Wszak piłka obracająca się wokół pionowej osi technicznie nie ma poślizgu (punkt styku z podłożem jest nieruchomy), ale podlega skręceniu, którego w procedurze przetaczania przecież musimy unikać. Gdybyśmy dopuścili skręcanie, mielibyśmy do czynienia z tzw. *torsją* – która pojawia się w typowym kursie geometrii różniczkowej, ale zazwyczaj w oderwaniu od swojej pięknej etymologii.

Torsję typowo definiuje się wzorem $\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$. Znaczenie tych symboli nie jest tutaj bardzo ważne, chciałem tylko zwrócić uwagę, że skrzętnie ukrywają one swoją geometryczną zawartość.

Może więc są jakieś pożytki z wieczornych rozważań na piłce?

Szkic tego artykułu przeleżał dwa lata w szufladzie, więc razem z córką przeżywamy teraz zupełnie inne matematyczne przygody. Być może jeszcze kiedyś o nich napiszę.

Dalsza lektura dla zaawansowanych:

Elton Hsu, *Stochastic analysis on manifolds*, American Mathematical Society, 2002 (zwłaszcza rozdział 2).

Richard Sharpe, *Differential geometry. Cartan's generalization of Klein's Erlangen program*, Springer-Verlag, 1997 (zwłaszcza appendix B: *Rolling without slipping or twisting*).