

Niezwykłe równanie Markowa

Jarosław GÓRNICKI*

*Kontakt: gornicki59@gmail.com

Odpowiednikiem magisterium (doktoratu) w carskiej Rosji był doktorat (habilitacja) na zachodzie Europy (np. w Cesarstwie Niemieckim).



Andriej A. Markow (1856–1922) był matematykiem rosyjskim. Z powodzeniem pracował w teorii liczb (ułamki łańcuchowe, aproksymacja liczb), analizie matematycznej (równania różniczkowe i całkowe), a po 1900 roku głównie w teorii prawdopodobieństwa. Szczególnie interesował się procesami stochastycznymi, wprowadził pojęcie łańcuchów Markowa. Ilustracja powyżej przedstawia Andrieja A. Markowa, gdy miał około 30 lat

Andriej A. Markow studiował matematykę na Uniwersytecie Petersburskim.

Tam też w wieku 23 lat obronił pracę maderską (1880), a potem pracę doktorską (1884). Obie prace dotyczyły teorii liczb. Treść pierwszej z nich ukazała się w dwóch częściach w języku francuskim w prestiżowym czasopiśmie *Mathematische Annalen* (tom XV (1879), tom XVII (1880)).

Szkolna matematyka wystarczy, aby pokazać, że pochodzące z tej pracy równanie diofantyczne Markowa,

$$(*) \quad m^2 + n^2 + k^2 = 3mnk,$$

ma w liczbach naturalnych nieskończenie wiele rozwiązań (m, n, k) o wyjątkowo ciekawej strukturze.

Rozpocznijmy od prostej obserwacji. Z symetrii równania $(*)$ wynika, że jeśli trójka liczb naturalnych (m, n, k) jest jego rozwiązaniem, to jest nim również każda inna permutacja współrzędnych tego rozwiązania. Zatem, bez straty ogólności, zbiór sześciu rozwiązań równania $(*)$ otrzymanych przez permutację jego współrzędnych będziemy uważać za jedno rozwiązanie.

Żałómy, że dane mamy rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$. Rozważmy równanie kwadratowe

$$\Phi_m(x) = x^2 + n^2 + k^2 - 3nmx = x^2 - 3nmx + (n^2 + k^2) = 0.$$

Powyższe równanie ma pierwiastek m oraz drugi pierwiastek m' spełniający wzory Viète'a:

$$m + m' = 3nk \quad \text{ i } \quad m \cdot m' = n^2 + k^2.$$

Oczywiście $m' = 3nk - m$ jest liczbą naturalną i trójka liczb (m', n, k) jest również rozwiązaniem równania $(*)$. Rozpatrując analogiczne równania kwadratowe dla pozostałych współrzędnych:

$$\Phi_n(x) = m^2 + x^2 + k^2 - 3mkx = x^2 - 3mkx + (m^2 + k^2) = 0,$$

$$\Phi_k(x) = m^2 + n^2 + x^2 - 3mnx = x^2 - 3mnx + (m^2 + n^2) = 0,$$

korzystając ze wzorów Viète'a, znajdujemy kolejne rozwiązania. Reasumując, każde rozwiązanie (m, n, k) generuje co najwyżej trzy rozwiązania sąsiednie postaci

$$(**) \quad (3nk - m, n, k), \quad (m, 3mk - n, k), \quad (m, n, 3mn - k).$$

W liczbach naturalnych równanie $(*)$ ma oczywiste rozwiązanie $(1, 1, 1)$. Zgodnie ze wzorami $(**)$ rozwiązanie $(1, 1, 1)$ ma jedno rozwiązanie sąsiednie $(2, 1, 1)$. Rozwiązanie $(2, 1, 1)$ ma dwa rozwiązania sąsiednie: $(1, 1, 1)$ oraz jedno nowe $(5, 2, 1)$. Rozwiązanie $(5, 2, 1)$ ma trzy rozwiązania sąsiednie: $(2, 1, 1)$ i dwa nowe $(13, 5, 1)$ i $(29, 5, 2)$ itd. Uważne spojrzenie na otrzymane wyniki sugeruje dwa lematy.

Lemat 1. Rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ ma równe dwie współrzędne wtedy i tylko wtedy, gdy jest postaci $(1, 1, 1)$ lub $(2, 1, 1)$.

Dowód: Załómy na przykład, że $n = k$. Wtedy $m^2 + 2n^2 = 3mn^2$, więc $m^2 = n^2(3m - 2)$. Oznacza to, że n^2 dzieli m^2 , zatem n dzieli m . Istnieje więc liczba naturalna d taka, że $m = nd$. Wtedy (z pierwszej równości) $d^2 = 3nd - 2$ i $2 = d(3n - d)$. Oznacza to, że d dzieli 2, więc $d = 1$ lub $d = 2$. W obu tych przypadkach, z ostatniej równości, mamy $n = 1$. Wreszcie $m = nd$ daje nam $m = 1$ lub $m = 2$. Jedynymi możliwymi rozwiązaniami $(*)$ o dwóch równych współrzędnych są więc trójki liczb $(1, 1, 1)$ lub $(2, 1, 1)$. Implikacja przeciwna jest oczywista. $\square$

Rozwiązania $(1, 1, 1)$ oraz $(2, 1, 1)$ równania $(*)$ będziemy nazywać rozwiązaniami *osobliwymi*. Rozwiązania te mają co najwyżej dwa rozwiązania sąsiednie. Nietrudno sprawdzić, że każde nieosobliwe rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ generuje trzy rozwiązania sąsiednie dane wzorami $(**)$.



Lemat 2. Jeśli rozwiązanie (m, n, k) równania $(*)$ nie jest osobliwe, to jedno z jego rozwiązań sąsiednich ma mniejszą współrzędną maksymalną, a dwa pozostałe mają większą współrzędną maksymalną.

Dowód: Załóżmy, że $m > n > k$. Pierwiastkami równania $\Phi_m(x) = 0$ są liczby m oraz $m' = 3nk - m$. Ponieważ

$$(n - m)(n - m') = \Phi_m(n) = 2n^2 + k^2 - 3n^2k < 3n^2 - 3n^2k \leq 0,$$

więc liczba n leży między liczbami m i m' , zatem $m > m'$. Oznacza to, że maksymalna współrzędna rozwiązania (m', n, k) jest mniejsza niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) .

Pierwiastkami wielomianu $\Phi_n(x) = 0$ są liczby n oraz $n' = 3mk - n$. Ponieważ

$$(m - n)(m - n') = \Phi_n(m) = 2m^2 + k^2 - 3m^2k < 3m^2 - 3m^2k \leq 0,$$

więc liczba m leży między liczbami n i n' . Skoro $m > n$, to musi być $n' > m$. Zatem maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n', k) jest większa niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) . Analogicznie maksymalna współrzędna rozwiązania $(m, n, 3mn - k)$ jest większa niż maksymalna współrzędna rozwiązania (m, n, k) . $\square$

Z wykazanego lematu wynika, że równanie diofantyczne Markowa $(*)$ ma nieskończenie wiele rozwiązań!

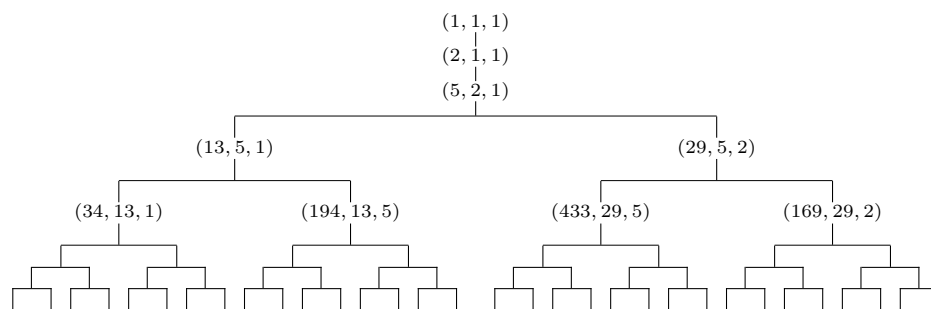
Rozwiązania te tworzą niezwykłą strukturę (drzewo). Mówi o tym następujący rezultat.

Twierdzenie (A.A. Markow, 1879). Każde rozwiązanie (m, n, k) równania diofantycznego Markowa $(*)$ jest połączone (łańcuchem rozwiązań sąsiednich) z rozwiązaniem osobliwym $(1, 1, 1)$. Ponadto współrzędne każdego rozwiązania są liczbami parami względnie pierwszymi.

Dowód: Niech (m, n, k) będzie nieosobliwym rozwiązaniem równania $(*)$. Zgodnie z lematem 2 dla tego rozwiązania istnieje rozwiązanie sąsiednie (m_1, n_1, k_1) o mniejszej współrzędnej maksymalnej. Jeśli to rozwiązanie jest nieosobliwe, to generuje ono rozwiązanie sąsiednie (m_2, n_2, k_2) o jeszcze mniejszej współrzędnej maksymalnej itd. Ponieważ w zbiorze liczb naturalnych nie można utworzyć nieskończonego ciągu malejącego, więc proces ten zakończy się, gdy dostrzemy do pewnego rozwiązania o dwóch równych współrzędnych (lemat 1). Jeśli jest to rozwiązanie $(1, 1, 1)$, to twierdzenie jest udowodnione, jeśli jest to rozwiązanie $(2, 1, 1)$, to ma ono rozwiązanie sąsiednie $(1, 1, 1)$.

Założmy, że istnieje rozwiązanie (m, n, k) , w którym na przykład liczby m i n nie są względnie pierwsze. Istnieje wówczas liczba pierwsza $p > 1$, która dzieli obie liczby m i n . Ze względu na równość $(*)$, p dzieli k . Oznacza to, wobec wzorów $(**)$, że liczba p jest dzielnikiem wszystkich współrzędnych każdego rozwiązania sąsiedniego. Przechodząc łańcuchem rozwiązań do rozwiązania $(1, 1, 1)$, otrzymujemy, że p jest dzielnikiem 1. Sprzeczność. $\square$

Z twierdzenia Markowa wynika, że zaczynając od rozwiązania osobliwego $(1, 1, 1)$ i przechodząc do kolejnych sąsiednich rozwiązań z większym maksimum współrzędnych, otrzymamy wszystkie rozwiązania równania $(*)$.



Drzewo trójek Markowa, czyli rozwiązań równania $(*)$

Liczby Markowa można znaleźć w bazie OEIS pod numerem A002559.

Liczby naturalne pojawiające się jako współrzędne rozwiązań równania diofantycznego Markowa $(*)$ nazywamy *liczbami Markowa*. Ich początkowe wartości są następujące:

$$\mathcal{M} = \{1, 2, 5, 13, 29, 34, 89, 169, 194, 233, 433, 610, 985, 1325, 1597, 2897, 4181, 5741, 6466, 7561, 9077, 10946, 14701, \dots\}.$$

Z liczbami Markowa związana jest sformułowana w 1913 roku przez Georga Frobeniusa hipoteza jednoznaczności: każda liczba Markowa pojawia się dokładnie raz (z dokładnością do permutacji) jako maksimum w trójce Markowa. Hipoteza ta wciąż pozostaje nierozstrzygnięta.

Można dostrzec, że co druga liczba w ciągu liczb Fibonacciego

$$\mathcal{F} = \{0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, \dots\}$$

jest liczbą Markowa. Inaczej, trójki rozwiązań występujące na lewym brzegu drzewa Markowa (rysunek) są postaci $(F_{2k+1}, F_{2k-1}, 1)$, $k = 1, 2, \dots$

Liczby Fibonacciego generuje wzór $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ dla $n \geq 2$.

Liczby Pella generuje wzór
 $P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ dla
 $n \geq 2$.

Również co druga liczba Pella

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots\}$$

jest liczbą Markowa, a trójki rozwiązań występujące na prawym brzegu drzewa Markowa (rys. 1) są postaci $(P_{2k+1}, P_{2k-1}, 2)$, $k = 1, 2, \dots$

Równanie Markowa (*) jest wyjątkowe! Adolf Hurwitz (1907) wykazał, że równanie diofantyczne $X^2 + Y^2 + Z^2 = s \cdot XYZ$, gdzie $s = 1, 2, 3, \dots$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych tylko dla $s = 1$ lub $s = 3$. Przy tym wszystkie rozwiązania (A, B, C) równania $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$ otrzymujemy z rozwiązań (m, n, k) równania Markowa (*) za pomocą wzorów $A = 3m, B = 3n, C = 3k$. Napiszemy o tym więcej w kolejnym numerze *Delty*.

Liczby (trójki) Markowa to wciąż aktualny temat badawczy. Pojawiają się one nieoczekiwanie w różnych dziedzinach współczesnej matematyki, co pokazuje lektura książki M. Aigner'a *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture. A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings*, Springer Cham (2013).



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

Rozwiązania na str. 24

F 1143. Podczas orkanu prędkość wiatru może przekraczać 200 km/h. Oszacuj, z ile razy większą siłą uderza w ścianę domu wiatr o prędkości 200 km/h (orkan) od wiatru o prędkości 50 km/h („zwykła” wichura)?

F 1144. a) Biegacz rozpędza się wzdłuż prostej. Rośnie przy tym jego pęd. Czy więcej pędu uzyskuje biegacz, czy podłoże, po którym biegnie? Czy więcej energii kinetycznej nabiera biegacz, czy podłoże?

b) Wioślarz (za pomocą dwóch wiosł) rozpędza łódź. Czy więcej pędu uzyskuje przy tym łódź z wioślarzem, czy woda? Czy więcej energii kinetycznej nabiera łódź, czy woda?

Przygotował Dominik BUREK

M 1852. Wandzia ułożyła z sześciu patyczków dwa trójkąty. Następnie rozłożyła je z powrotem i podzieliła je na dwie grupy po trzy patyczki: w pierwszej grupie znalazły się trzy najdłuższe patyczki, a w drugiej – trzy najkrótsze.

- (a) Czy z trzech patyczków pierwszej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?
- (b) Czy z trzech patyczków drugiej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?

M 1853. Nazwijmy liczbę całkowitą *dobrą*, jeżeli jest większa od 1 i wszystkie jej dzielniki pierwsze kończą się tą samą cyfrą. (Na przykład liczby 19 oraz $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ są dobre, natomiast liczba $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ nie jest dobra). Czy istnieje rosnący ciąg arytmetyczny o różnicy nie większej niż 2026, złożony ze 150 liczb dobrych?

	R			W
R				W
				W

M 1854. Rozalia i Wanda grają na planszy 100×100 . Początkowo wszystkie pola planszy są białe. W każdym swoim ruchu Rozalia zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno na przekątnej. W każdym swoim ruchu Wanda zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno w pionie. (Na rysunku pokazano możliwe pierwsze ruchy Rozalii i Wandy). Pierwszy ruch wykonuje Rozalia. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Kto posiada strategię wygrywającą?