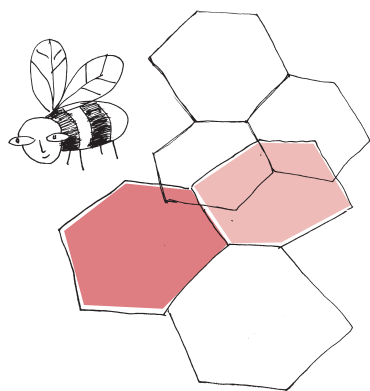




Uzasadnienie nierówności izoperymetrycznej można odnaleźć w artykule Bartłomieja Bzdęgi z Δ_{23}^1 .



Czytelnikom, którzy nie znają pojęcia granicy górnej, służę innym wyjaśnieniem: dla dowolnego podziału płaszczyzny na pola jednostkowe istnieją dowolnie duże koła, w ograniczeniu do których długość linii danego podziału w stosunku do pola koła jest dowolnie bliska tej wartości dla układu heksagonalnego.

Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Jaki kształt powinniśmy wybrać, jeżeli chcemy ograniczyć 1 m^2 płaszczyzny za pomocą jak najkrótszego sznurka? Oczywiście koło – figurę płaską o najmniejszym obwodzie przy zadanym polu. Wiąże się to z *nierównością izoperymetryczną*, zachodzącą dla każdej figury płaskiej: $4\pi A \leq L^2$, gdzie A i L to, odpowiednio, pole i obwód; równość zachodzi tylko dla koła właśnie. Zauważmy jednak, że kół nie da się szczelnie ułożyć: zawsze zostają luki, a żaden fragment sznurka nie może być użyty do ograniczenia dwóch kołowych obszarów (sąsiadujące koła mają co najwyżej jeden punkt wspólny). Jaką zatem figurę powinniśmy wybrać, gdy chcemy podzielić powierzchnię na możliwie największe równe pola, zużywając jak najmniej „sznurka”? Przy podziale płaszczyzny nie wolno nam „marnować” brzegu: każda krawędź powinna być wspólna dla dwóch sąsiednich pól, a całość ma tworzyć szczelne pokrycie bez luk. Jeśli dodatkowo ograniczymy się do wielokątów foremnych, to dla ustalonego pola A foremny m -kąt ma obwód

$$L_m = 2\sqrt{mA \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{m}\right)}.$$

Ponieważ jedynymi wielokątami foremnymi, które kafelkują płaszczyznę, są trójkąt, kwadrat i sześciokąt, wystarczy porównać wartości ich obwodów. Otrzymujemy $L_6 < L_4 < L_3$, co tłumaczy, dlaczego wśród foremnych kandydatów wygrywa siatka heksagonalna – ma najmniejszy obwód (a więc i najmniejsze zużycie materiału) przy tym samym polu każdej komórki.

Powyższy fakt – że wśród wielokątów foremnych najlepiej sprawdzają się sześciokąty – był znany już starożytnym Grekom. Uwadze myślicieli nie umknęło również, że dzielą tę wiedzę z... pszczołami! Na przełomie III i IV wieku naszej ery Pappus z Aleksandrii stwierdził, że heksagonalny kształt komórek w plastrze miodu jest niezwykle efektywny (w kontekście minimalizacji ilości zużytego wosku, który pełni tutaj rolę „sznurka”). Półtora milenium później dużo dobitniej ujął to Karol Darwin w dziele *O powstawaniu gatunków*: plaster miodu nazwał arcydziełem inżynierii, a praca pszczół posłużyła mu za przykład obrazujący ewolucyjne wykształcenie perfekcyjnego instynktu.

W powyższym rozumowaniu ograniczyliśmy się jednak do wielokątów foremnych. Ale skąd wiadomo, czy nie istnieje rozwiązanie lepsze – chociażby z bokami różnych długości albo z wykrzywionymi krawędziami? Rozstrzyga to udowodnione w 1999 roku przez Thomasa Halesa twierdzenie: nie można podzielić płaszczyzny efektywniej niż pszczoły. A bardziej formalnie, dla dowolnego podziału płaszczyzny na części o jednostkowym polu *granica górna* stosunku długości krzywych podziału zawartych w kole o środku w punkcie $(0,0)$ i promieniu r do pola tego koła (tzn. πr^2) jest równa $\sqrt[3]{12}$, czyli tyle, ile dla siatki heksagonalnej. Rzecz jasna, twierdzenie Halesa nosi nazwę *twierdzenia o plastrze miodu*.

Na koniec dodajmy, że siatka heksagonalna – choć w trochę innym kontekście – występuje również we własnościach kombinatorycznych symbolu dwumianowego Newtona. Prosta obserwacja, nazywana *zasadą plastra miodu* (ang. *the honeycomb rule*), mówi, że równość

$$\binom{n-1}{k-1} \cdot \binom{n}{k+1} \cdot \binom{n+1}{k} = \binom{n-1}{k} \cdot \binom{n}{k-1} \cdot \binom{n+1}{k+1}$$

zachodzi dla dowolnych liczb naturalnych k i n takich, że $0 < k < n$. Zachęcam do sprawdzenia równania dla konkretnych wartości k i n oraz odnalezienia odpowiednich sześciu współczynników dwumianowych w trójkącie Pascala: łatwiej wtedy dostrzec „plastrową” genezę nazwy.

A tak w ogóle, to pszczoły wylatujące z ula często bardzo efektywnie radzą sobie z dobrze znanym *problemem komiwojażera*! Kończy mi się jednak miejsce na stronie, więc być może wrócę do tego tematu innym razem.