

Problem Tibora Radó Jarosław GÓRNICKI*

Geometria to nie tylko trójkąty, koła czy parabole. Oto jej inne oblicze. Na początku XX wieku Giuseppe Vitali, badając funkcje rzeczywiste, wykazał następujące twierdzenie.

Twierdzenie 1 (G. Vitali). *Niech E będzie przedziałem ograniczonym o długości $|E|$. Wtedy każdy skończony zbiór przedziałów $E_1, E_2, \dots, E_m$ pokrywających przedział E zawiera nienachodzące na siebie przedziały $E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_i}$ o łącznej długości*

$$|E_{m_1}| + \dots + |E_{m_i}| \geq \frac{1}{3} \cdot |E|.$$

Dowód. Spośród przedziałów $E_1, \dots, E_m$ wybieramy przedział najdłuższy i oznaczamy go jako E_{m_1} . Następnie usuwamy ze zbioru przedział E_{m_1} i wszystkie przedziały pokrycia, które na niego nachodzą. Usunięte przedziały mogą pokryć przedział nie dłuższy niż $3 \cdot |E_{m_1}|$. Z pozostałych przedziałów pokrycia wybieramy przedział najdłuższy i oznaczamy go jako E_{m_2} . Usuwamy przedział E_{m_2} i wszystkie przedziały, które na niego nachodzą. Usunięte przedziały mogą pokryć przedział nie dłuższy niż $3 \cdot |E_{m_2}|$. Proces ten prowadzimy do wyczerpania wszystkich możliwości. Tak wybrane przedziały $E_{m_1}, \dots, E_{m_i}$ nie nachodzą na siebie i

$$3 \cdot |E_{m_1}| + \dots + 3 \cdot |E_{m_i}| \geq |E|.$$

Istotnie, gdyby $3 \cdot |E_{m_1}| + \dots + 3 \cdot |E_{m_i}| < |E|$, to w zbiorze E istniałyby punkty pokryte przez pewien przedział, który nie został rozpatrzony. Sprzeczność, bo postępowanie było prowadzone do wyczerpania wszystkich możliwości. Dowód jest zakończony. $\square$

Prawdziwy jest odpowiednik twierdzenia 1 dla płaszczyzny.

Twierdzenie 2. *Niech S będzie figurą ograniczoną o polu $|S|$. Z każdego skończonego zbioru kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$, o równoległych bokach, pokrywających figurę S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_r}$ o łącznym polu*

$$|K_{n_1}| + \dots + |K_{n_r}| \geq \frac{1}{9} \cdot |S|.$$

Dowód. Spośród kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$ wybieramy kwadrat o największym polu (równoważnie: najdłuższym boku) i oznaczamy go jako K_{n_1} . Usuwamy ten kwadrat i wszystkie kwadraty pokrycia, które nachodzą na kwadrat K_{n_1} . Usunięte kwadraty mogą pokryć kwadrat o polu nie większym niż $9 \cdot |K_{n_1}|$. Z pozostałymi kwadratami pokrycia powtarzamy tę procedurę do wyczerpania wszystkich możliwości. Tak wybrane kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_r}$ nie nachodzą na siebie, ponadto

$$9 \cdot |K_{n_1}| + \dots + 9 \cdot |K_{n_r}| \geq |S|,$$

a stąd wynika teza. $\square$

Tibor Radó (1895–1965) w liście z 20 września 1927 roku do Wacława Sierpińskiego (ówczesnego redaktora czasopisma *Fundamenta Mathematicae*) zauważył, że współczynnik $\frac{1}{3}$ w twierdzeniu 1 można zastąpić współczynnikiem $\frac{1}{2}$ (łatwo pokazać, że jest to wartość optymalna, zostawiamy to więc Czytelnikowi jako ćwiczenie).

Twierdzenie 3 (T. Radó, 1928). *Niech E będzie przedziałem ograniczonym o długości $|E|$. Wtedy każdy skończony zbiór przedziałów $E_1, E_2, \dots, E_m$ pokrywających przedział E zawiera nienachodzące na siebie przedziały $E_{m_1}, E_{m_2}, \dots, E_{m_k}$ o łącznej długości*

$$|E_{m_1}| + \dots + |E_{m_k}| \geq \frac{1}{2} \cdot |E|.$$

Dowód. Przedziały pokrywające E ustawiamy w pewnej dowolnej, ale ustalonej kolejności. Przeglądamy je po kolei i odrzucamy każdy przedział zawarty w sumie nieodrzuconych na tym etapie przedziałów. W ten sposób dostajemy nowe pokrycie. W każdym z nieodrzuconych przedziałów E_i wybieramy punkt wewnętrzny x_i tak, by był on punktem zewnętrznym dla wszystkich pozostałych przedziałów z nowego pokrycia. Punkty te są różne między sobą

Zbiór $E \subset \mathbb{R}$, różny od punktu, nazywamy przedziałem, gdy każda liczba leżąca między liczbami należącymi do E też należy do E .

Przedziały E_j , $j = 1, 2, \dots, m$ pokrywają przedział E , gdy $E \subset \bigcup_{j=1}^m E_j$.

Przedziały E_i, E_j nie nachodzą na siebie, gdy nie mają wspólnych punktów wewnętrznych (choć mogą mieć wspólne punkty brzegowe).

i możemy przyjąć, że zostały tak ponumerowane, aby $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Dla $i \geq 1$ i przedziałów E_i, E_{i+h} , gdzie $h \geq 2$, mamy $x_i < x_{i+1} < x_{i+h}$. Ponieważ punkt x_{i+1} jest punktem zewnętrznym dla przedziałów E_i i E_{i+h} , więc przedziały te nie nachodzą na siebie. Oznacza to, że przedziały E_i o indeksach parzystych tworzą zbiór przedziałów nienachodzących na siebie o łącznej długości L' . Podobnie przedziały o indeksach nieparzystych tworzą zbiór przedziałów nienachodzących na siebie o łącznej długości L'' . Ponieważ $E \subset E_1 \cup \dots \cup E_n$, więc $L' + L'' \geq |E|$. Oznacza to, że przynajmniej jedna z liczb L', L'' jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2} \cdot |E|$. $\square$

Jednocześnie T. Radó wyraził przypuszczenie, że w twierdzeniu 2 współczynnik $\frac{1}{9}$ można zastąpić współczynnikiem $\frac{1}{4}$, ale nie potrafił tego wykazać. (Jak poprzednio, jest jasne, że nie ma nadziei na wartość większą od $\frac{1}{4}$). List T. Radó opublikowany w *Fundamenta Mathematicae* [tom 11 (1928), 228–229] zapoczątkował problem nawiązujący do twierdzenia 2.

Problem (T. Radó, 1928). Jaka jest największa liczba $\frac{1}{9} \leq c \leq \frac{1}{4}$ taka, że z każdego skończonego zbioru kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_n$ o równoległych bokach pokrywających figurę ograniczoną S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{n_1}, K_{n_2}, \dots, K_{n_j}$ o łącznym polu

$$|K_{n_1}| + \dots + |K_{n_j}| \geq c \cdot |S|?$$

Odpowiedź na to pytanie nie jest znana, choć znamy już lepsze oszacowanie współczynnika c : $0,1179 \approx \frac{1}{8,4797} < c \leq \frac{1}{4} - \frac{1}{384} \approx 0,2473$ (zob. [*]). Problem T. Radó doczekał się wielu wariantów (np. gdy pokrycia utworzone są z kół) oraz n -wymiarowych odpowiedników. Również w tych przypadkach rozwiązania nie są znane.

[*] S. Bereg, A. Dumitrescu, M. Jiang, *On covering problems of Radó*, *Algorithmica* 57(3) 2010, 538–561.

Pokażemy teraz, że przypuszczenie Tibora Radó jest słuszne w przypadku, gdy figurę S pokrywa skończona liczba przystających kwadratów (o równoległych bokach). Niezwykle pomysłowe uzasadnienie, wykorzystujące znane twierdzenie H. Blichfeldta, podał w 1940 roku A. S. Sokolin.

Na papierze w kratkę kratka stanowi sieć. Jej oczka to kwadraty jednostkowe, a punkty przecięć kratki to węzły.

Twierdzenie 4 (H. Blichfeldt, 1914). *Niech $S \subset \mathbb{R}^2$ będzie figurą ograniczoną o polu $|S| > n - 1$. Wtedy figurę S można przesunąć równolegle tak, aby zawierała n węzłów sieci.*

Dowód (G. Birkhoff). Zamiast przesuwając figurę S , przesuniemy oczka sieci. Kratka dzieli figurę S na części $S_1, S_2, \dots, S_n$ leżące w kwadratach jednostkowych $K_1, K_2, \dots, K_n$. Przesuwamy równolegle kwadraty K_i ($i > 1$) wraz z częściami S_i na kwadrat K_1 . Wtedy we wnętrzu kwadratu K_1 istnieje punkt należący jednocześnie do co najmniej n części S_i figury S . Gdyby tak nie było, to $|S| \leq n - 1 < |S|$. Przebijamy w tym punkcie wszystkie kwadraty K_i ($i = 1, 2, \dots, n$), a następnie każdy kwadrat przesuwamy równolegle do położenia pierwotnego. Ślady przebić (jest ich co najmniej n) to węzły nowej sieci kwadratowej (jednostkowej) równoległej do sieci wyjściowej, które należą do figury S . $\square$

Twierdzenie 5 (A.S. Sokolin, 1940). *Niech S będzie figurą ograniczoną o polu $|S|$. Z każdego skończonego zbioru przystających kwadratów $K_1, K_2, \dots, K_m$, o równoległych bokach, pokrywających figurę S można wybrać nienachodzące na siebie kwadraty $K_{m_1}, K_{m_2}, \dots, K_{m_n}$ o łącznym polu*

$$|K_{m_1}| + \dots + |K_{m_n}| \geq \frac{1}{4} \cdot |S|.$$

Dowód. Załóżmy, bez zmniejszania ogólności rozumowania, że pole każdego kwadratu z pokrycia jest równe $(\frac{1}{2})^2$. Niech n będzie największą liczbą naturalną spełniającą nierówność $|S| > n - 1$. Zgodnie z twierdzeniem 4 (Blichfeldta) figurę S możemy przesunąć równolegle tak, by zawierała $n \geq |S|$ węzłów sieci jednostkowej. Wówczas dla każdego węzła pozostawiamy jeden kwadrat pokrywający ten węzeł. Tak wybrane kwadraty nie nachodzą na siebie, a ich łączna powierzchnia wynosi $(\frac{1}{2})^2 \cdot n \geq \frac{1}{4} \cdot |S|$. $\square$

Pozostaje nam podać ostateczne rozwiązanie problemu Tibora Radó, ale to wymaga jeszcze trochę pracy...

