

Liczby Pella generuje wzór
 $P_0 = 0, P_1 = 1, P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$ dla
 $n \geq 2$.

Również co druga liczba Pella

$$\mathcal{P} = \{0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots\}$$

jest liczbą Markowa, a trójki rozwiązań występujące na prawym brzegu drzewa Markowa (rys. 1) są postaci $(P_{2k+1}, P_{2k-1}, 2)$, $k = 1, 2, \dots$

Równanie Markowa (*) jest wyjątkowe! Adolf Hurwitz (1907) wykazał, że równanie diofantyczne $X^2 + Y^2 + Z^2 = s \cdot XYZ$, gdzie $s = 1, 2, 3, \dots$ ma rozwiązania w liczbach naturalnych tylko dla $s = 1$ lub $s = 3$. Przy tym wszystkie rozwiązania (A, B, C) równania $X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$ otrzymujemy z rozwiązań (m, n, k) równania Markowa (*) za pomocą wzorów $A = 3m, B = 3n, C = 3k$. Napiszemy o tym więcej w kolejnym numerze *Delty*.

Liczby (trójki) Markowa to wciąż aktualny temat badawczy. Pojawiają się one nieoczekiwanie w różnych dziedzinach współczesnej matematyki, co pokazuje lektura książki M. Aigner'a *Markov's Theorem and 100 Years of the Uniqueness Conjecture. A Mathematical Journey from Irrational Numbers to Perfect Matchings*, Springer Cham (2013).



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

Rozwiązania na str. 24

F 1143. Podczas orkanu prędkość wiatru może przekraczać 200 km/h. Oszacuj, z ile razy większą siłą uderza w ścianę domu wiatr o prędkości 200 km/h (orkan) od wiatru o prędkości 50 km/h („zwykła” wichura)?

F 1144. a) Biegacz rozpędza się wzdłuż prostej. Rośnie przy tym jego pęd. Czy więcej pędu uzyskuje biegacz, czy podłoże, po którym biegnie? Czy więcej energii kinetycznej nabiera biegacz, czy podłoże?

b) Wioślarz (za pomocą dwóch wiosł) rozpędza łódź. Czy więcej pędu uzyskuje przy tym łódź z wioślarzem, czy woda? Czy więcej energii kinetycznej nabiera łódź, czy woda?

Przygotował Dominik BUREK

M 1852. Wandzia ułożyła z sześciu patyczków dwa trójkąty. Następnie rozłożyła je z powrotem i podzieliła je na dwie grupy po trzy patyczki: w pierwszej grupie znalazły się trzy najdłuższe patyczki, a w drugiej – trzy najkrótsze.

- (a) Czy z trzech patyczków pierwszej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?
- (b) Czy z trzech patyczków drugiej grupy zawsze można ułożyć trójkąt?

M 1853. Nazwijmy liczbę całkowitą *dobrą*, jeżeli jest większa od 1 i wszystkie jej dzielniki pierwsze kończą się tą samą cyfrą. (Na przykład liczby 19 oraz $117 = 3 \cdot 3 \cdot 13$ są dobre, natomiast liczba $682 = 2 \cdot 11 \cdot 31$ nie jest dobra). Czy istnieje rosnący ciąg arytmetyczny o różnicy nie większej niż 2026, złożony ze 150 liczb dobrych?

		R		W
	R			W
				W

M 1854. Rozalia i Wanda grają na planszy 100×100 . Początkowo wszystkie pola planszy są białe. W każdym swoim ruchu Rozalia zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno na przekątnej. W każdym swoim ruchu Wanda zamalowuje na czarno jedno lub więcej białych pól leżących kolejno w pionie. (Na rysunku pokazano możliwe pierwsze ruchy Rozalii i Wandy). Pierwszy ruch wykonuje Rozalia. Przegrywa ten, kto nie może wykonać ruchu. Kto posiada strategię wygrywającą?

Rozwiązania zadań ze strony 3



Rozwiązanie zadania F 1143.

Przyjmijmy, że wiatr wieje prostopadle do ściany domu, gęstość niesionego prądu powietrza wynosi ρ , a powierzchnia ściany S . W ciągu jednej sekundy do ściany dociera więc powietrze o masie $m = S\rho v$ i pędzie $p = mv = S\rho v^2$. Ściana zmienia kierunek i prędkość wiatru, co oznacza, że przejmuje znaczny ułamek jego pędu. Wartość tego ułamka w przybliżeniu nie zależy od prędkości wiatru (a od sposobu, w jaki zmienia on kierunek i prędkość). Oznacza to, że siła nacisku na ścianę jest proporcjonalna do v^2 . Wiatr o prędkości 200 km/h naciska więc na ścianę z siłą w przybliżeniu 16 razy większą niż wiatr o prędkości 50 km/h.

Uwaga: Bardzo silne wiatry, takie jak orkany, związane są zwykle z niskim ciśnieniem atmosferycznym, a więc i mniejszą gęstością powietrza. Jednak w najsilniejszych orkanach ciśnienie nie spada poniżej około 90% normalnego ciśnienia atmosferycznego, a więc różnica gęstości powietrza między zwykłą wicherą i orkanem jest zwykle niewielka.



Rozwiązanie zadania F 1144.

a) Z zasady zachowania pędu wynika, że biegacz uzyskuje dokładnie taki sam pęd jak podłoże. Energia kinetyczna uzyskana przez ciało jest równa działającej na nie sile pomnożonej przez drogę, na jakiej ta siła działa. Z trzeciej zasady Newtona wynika, że biegacz działa na podłoże taką samą siłą, jak podłoże działa na niego. W każdym kroku biegacz przebywa dłuższą drogę niż podłoże – dokładniej: w każdym kroku biegacz przesuwa podłoże, odkształcając je o znacznie mniejszy odcinek (droga działania siły) niż sam się przesuwa. Oznacza to, że biegacz uzyskuje więcej energii niż podłoże.

b) Podobnie jak w punkcie a) pęd uzyskany przez łódź z wiosłarzem jest równy pędowi przekazanemu wodzie. W tym przypadku jednak każde z piór wiosła działa połową siły napędzającej łódź i pokonuje w każdym cyklu wiosłowania dłuższą drogę niż łódź. Oznacza to, że większą energię kinetyczną uzyskuje woda.

Pomysły obu zadań pochodzą z książki Lewisa C. Epsteina *Thinking Physics, Understandable Practical Reality*.



Rozwiązanie zadania M 1852.

Odpowiedź. a) Tak, zawsze. b) Nie, nie zawsze.

1) Oznaczmy długości patyczków przez

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq a_5 \geq a_6.$$

Ponieważ patyczek o długości a_1 był bokiem pewnego trójkąta wraz z dwoma innymi patyczkami, jego długość jest mniejsza od sumy długości tych dwóch pozostałych patyczków. W szczególności

$$a_1 < a_2 + a_3.$$

Ponieważ zachodzi $a_1 \geq a_2$ oraz $a_1 \geq a_3$, nierówność $a_1 < a_2 + a_3$ jest wystarczająca, aby z patyczków o długościach a_1, a_2, a_3 można było ułożyć trójkąt.

2) Niech początkowo dane będą dwa przystające trójkąty o bokach długości 1, 3, 3. Wówczas trzy najkrótsze patyczki mają długości

$$1, 1, 3,$$

z których nie można ułożyć trójkąta, gdyż suma dwóch krótszych jest równa 2, czyli mniej niż długość trzeciego.



Rozwiązanie zadania M 1853.

Odpowiedź. Taki ciąg arytmetyczny nie istnieje.

Przypuśćmy, że istnieje rosnący ciąg arytmetyczny

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + 149d$$

złożony ze 150 dobrych liczb całkowitych. Skorzystamy z następującego znanego faktu.

Fakt. Jeżeli liczba całkowita d jest względnie pierwsza z liczbą naturalną m , to wśród dowolnych m kolejnych wyrazów ciągu arytmetycznego o różnicy d znajduje się liczba podzielna przez m .

Istotnie: Liczby

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + (m - 1)d$$

dają wszystkie możliwe reszty modulo m . Gdyby bowiem dla pewnych $0 \leq k < \ell < m$ zachodziło

$$a + kd \equiv a + \ell d \pmod{m},$$

to mielibyśmy $(\ell - k)d \equiv 0 \pmod{m}$, a z względnej pierwszości d i m wynikałoby, że $m \mid (\ell - k)$, co jest niemożliwe.

Niech teraz p i q będą dwiema liczbami pierwszymi kończącymi się różnymi cyframi, takimi że $pq \leq 150$. Nazwijmy taką parę *szkodliwą*. Jeżeli d nie dzieli się ani przez p , ani przez q , to z faktu wynika, że w naszym ciągu arytmetycznym istnieje wyraz podzielny przez pq , co jest niemożliwe, gdyż liczba dobra nie może mieć dwóch dzielników pierwszych kończących się różnymi cyframi.

Stąd wynika, że dla każdej szkodliwej pary liczb pierwszych liczba d musi dzielić się przynajmniej przez jedną z nich.

Rozważmy teraz liczby pierwsze

$$2, 5, 7, 11, 13.$$

Każde dwie z nich tworzą szkodliwą parę, zatem d musi dzielić się przez wszystkie te liczby, z wyjątkiem co najwyżej jednej.

Ponadto liczby 3 i 19 również tworzą szkodliwą parę, a więc d dzieli się przynajmniej przez jedną z nich. W konsekwencji otrzymujemy

$$d \geq (2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11) \cdot 3 = 2310 > 2026,$$

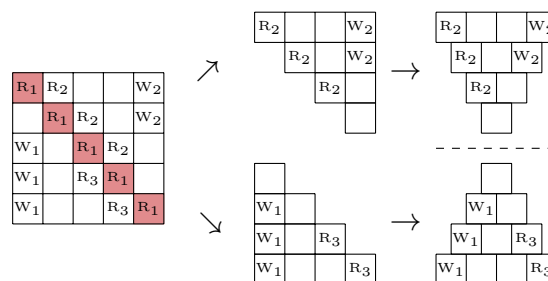
co jest sprzeczne z założeniem.

Otrzymana sprzeczność dowodzi, że taki ciąg arytmetyczny nie istnieje.



Rozwiązanie zadania M 1854.

Opiszemy jedną z możliwych strategii wygrywających Rozalii. W pierwszym ruchu Rozalia zamalowuje wszystkie pola leżące na dowolnie wybranej głównej przekątnej planszy. Po tym ruchu plansza rozpada się na dwie jednakowe „schodkowe” części. Następnie wyobraźmy sobie, że w każdej z tych części przesuwamy każdy poziomy rząd, z wyjątkiem pierwszego, o pół pola względem poprzedniego.



W wyniku tych przesunięć zarówno dawne piony, jak i dawne przekątne równoległe do głównej stają się ukośnymi rzędami pól. Przy tym „piony” jednej części są symetryczne do „przekątnych” drugiej. Oznacza to, że na każdy ruch Wandy Rozalia może odpowiedzieć ruchem symetrycznym w drugiej części planszy (dwa takie przykłady pokazano na rysunku). Po każdym ruchu Rozalii sytuacja na przekształconej planszy pozostaje symetryczna, a zatem Rozalia zawsze ma możliwy ruch zgodny z opisaną strategią. Ponieważ gra na pewno się zakończy (po nie więcej niż 10^4 ruchach), w pewnym momencie Wanda nie będzie mogła wykonać ruchu, a Rozalia wygra.