



Długości boków trójkąta

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Mówimy, że liczby $a, b, c > 0$ są długościami boków trójkąta, gdy istnieje trójkąt ABC , w którym $a = |BC|$, $b = |CA|$ i $c = |AB|$. Fakt ten jest równoważny każdemu z punktów poniższego twierdzenia, jednak dowód tej równoważności jest tematem na oddzielną opowieść – zależy od tego, jakie wybierzemy aksjomaty lub model płaszczyzny – dlatego żadnego dowodu tu nie napiszę; tym bardziej, że będziemy zajmować się jedynie algebraiczną stroną tego tematu. A teraz zapowiedziane

Twierdzenie. Niech $a, b, c > 0$. Następujące warunki są równoważne:

- (1) $a < b + c$, $b < c + a$, $c < a + b$;
- (1') $c < a + b$, w sytuacji, gdy $c = \max\{a, b, c\}$;
- (2) $a > |b - c|$, $b > |c - a|$, $c > |a - b|$;
- (2') $a > |b - c|$, w sytuacji, gdy $a = \min\{a, b, c\}$;
- (3) $|a - b| < c < a + b$;
- (4) istnieją liczby $x, y, z > 0$, dla których $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$.

Dowód. Najpierw skorzystamy z równoważności $|t| < M \iff t < M \wedge -t < M$, prawdziwej dla $t, M \in \mathbb{R}$, aby pozbyć się wszystkich wartości bezwzględnych. Punkty (1), (2) i (3) stają się identyczne, a więc są równoważne.

(2) $\Rightarrow$ (2'). Nierówność w (2') jest jedną z nierówności w (2).

(2') $\Rightarrow$ (1'). Liczba a jest najmniejsza spośród a, b, c , więc co najmniej jedna z liczb b, c jest największa. W (2') mamy $a + b > c$ i $a + c > b$, zatem jedna z tych nierówności spełnia warunek (1').

(1') $\Rightarrow$ (1). Jeśli c jest największa spośród a, b, c , to $b \leq c < a + c$ i analogicznie $a < b + c$.

(4) $\Rightarrow$ (1). Zachodzi nierówność $a = y + z < y + z + 2x = b + c$ i dwie analogiczne.

(1) $\Rightarrow$ (4). Liczby $x = \frac{1}{2}(b + c - a)$, $y = \frac{1}{2}(c + a - b)$, $z = \frac{1}{2}(a + b - c)$ są dodatnie i spełniają równości $y + z = a$, $z + x = b$, $x + y = c$.

Warto podkreślić, co dają punkty primowane. Zamiast sprawdzić trzy nierówności, wystarczy jedną: najdłuższy bok jest krótszy od sumy pozostałych dwóch albo najkrótszy bok jest dłuższy od bezwzględnej różnicy pozostałych dwóch.

Podstawienie (4) zamienia problem związany z długościami boków trójkąta na problem z liczbami dodatnimi, na które już nie ma żadnych dodatkowych warunków, i przez to są prostsze w obsłudze. To podstawienie ma interpretację geometryczną – okrąg wpisany w trójkąt ABC o bokach długości a, b, c daje nam x, y, z jako odległości od wierzchołków trójkąta do odpowiednich punktów styczności (zob. rysunek).

Na koniec jeszcze jeden użyteczny

Fakt. Jeśli istnieje liczba $x > 0$, dla której $a, b, c \in [x, 2x]$, to liczby a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta.

Dowód. Tak po prostu: $a + b \geq x + x = 2x > c$.

Mała rzecz, a potrafi uciechować. Ale uwaga – ta implikacja działa tylko w jedną stronę. Na przykład dla liczb 3, 5 i 7 taki przedział $[x, 2x]$ nie istnieje, a są one długościami boków trójkąta.

Zadania

1. Dane są liczby dodatnie x, y i z . Wiadomo, że liczby x, y i z są długościami boków pewnego trójkąta. Uzasadnić, że $\sqrt{x}, \sqrt{y}$ i $\sqrt{z}$ również są długościami boków trójkąta.
2. Dowieść, że jeśli a, b, c są długościami boków pewnego trójkąta, to $a^2(b + c - a) + b^2(c + a - b) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$.
3. Wybrano 7 liczb (niekoniecznie różnych) z przedziału $(1, 8)$. Udowodnić, że pewne trzy z nich są długościami boków trójkąta.
4. Liczby x, y, z są długościami boków pewnego trójkąta. Liczby $\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}$ również są długościami boków trójkąta. Wykazać, że $\frac{x^2 + y^2 + z^2}{yz + zx + xy} < \frac{3}{2}$. (XVII WLM)
5. Dany jest trójkąt ABC . Niech r_a będzie promieniem okręgu stycznego do prostych AB i AC , którego środek leży na odcinku BC . Analogicznie definiujemy r_b i r_c . Udowodnić, że z odcinków o długości r_a, r_b i r_c można zbudować trójkąt. (XVI WLM)
6. Dowieść, że dla $a, b, c > 0$ zachodzi nierówność $\sqrt{a^2 - ab + b^2} + \sqrt{b^2 - bc + c^2} \geq \sqrt{c^2 + ca + a^2}$.