

a dwie inne są liczbami nieparzystymi. Niech, na przykład, $a = 2u$, $b = 2v + 1$, $c = 2w + 1$, gdzie $u, v, w \in \mathbb{N}$. Podstawiając te wartości do równania (5), otrzymujemy

$$4(u^2 + v^2 + w^2 + v + w) + 2 = 4du(2v + 1)(2w + 1).$$

Równość ta jest fałszywa, bo prawa strona jest podzielna przez 4, a lewa – nie. Zatem równanie (4) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Twierdzenie 3. *Dla naturalnego $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.*

Dowód. Będziemy postępować analogicznie do dowodu lematów 1 i 2 z poprzedniego artykułu (Δ_{26}^5). Załóżmy, że dla pewnego naturalnego $s > 3$ równanie (2) ma rozwiązanie (a, b, c) w liczbach naturalnych. Wtedy liczby a, b, c są parami różne. Gdyby, na przykład, $b = c$, to $a^2 = sab^2 - 2b^2 = b^2(sa - 2)$, więc $a = bd$, gdzie d jest liczbą naturalną. Wtedy $b^2d^2 = a^2 = b^2(sbd - 2)$, czyli $d^2 = sbd - 2$, a stąd $2 = d(sb - d)$. Oznacza to, że 2 jest podzielne przez d , zatem $d = 1$ lub $d = 2$. W obu tych przypadkach $sb = 3$, co jest sprzeczne z warunkiem $s > 3$.

Możemy więc przyjąć, że $a > b > c$. Rozważmy trójkąt kwadratowy

$$\Phi_a(x) = x^2 + b^2 + c^2 - sbcx = x^2 - sbcx + (b^2 + c^2).$$

Poza pierwiastkiem a posiada on drugi pierwiastek a' (można go wyznaczyć, korzystając ze wzorów Viète'a), więc rozwiązanie (a, b, c) ma rozwiązanie sąsiednie (a', b, c) .

Ponieważ

$$(b - a)(b - a') = \Phi_a(b) = 2b^2 + c^2 - sb^2c < 3b^2 - sb^2c \leq 3b^2 - sb^2 < 0,$$

więc liczba b leży między liczbami a i a' . A więc $a > b > a'$ i maksymalna współrzędna rozwiązania (a', b, c) jest mniejsza niż maksymalna współrzędna rozwiązania (a, b, c) . Zatem dla każdego rozwiązania (a, b, c) równania (2) z $s > 3$ można skonstruować jego rozwiązanie (a_1, b_1, c_1) z mniejszą maksymalną współrzędną. Oczywiście liczby a_1, b_1, c_1 również są parami różne i możemy przyjąć, że $a_1 > b_1 > c_1$. Powtarzając podane wyżej rozumowanie, uzyskujemy rozwiązanie (a_2, b_2, c_2) równania (2) z $s > 3$, którego maksymalna współrzędna jest jeszcze mniejsza. W ten sposób uzyskujemy nieskończony ciąg rozwiązań równania (2) z $s > 3$, z coraz mniejszymi maksymalnymi współrzędnymi. W zbiorze liczb naturalnych jest to niemożliwe. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że dla $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Prawdziwe jest twierdzenie ogólniejsze (A. Hurwitz, 1907): dla $s > N$ równanie (1) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Dla $s = N \geq 3$ równanie (1) ma rozwiązanie osobliwe $(x_1, x_2, \dots, x_N) = (1, 1, \dots, 1)$, z którego „wyrastają” kolejne rozwiązania. W pozostałych przypadkach jest wiele wyników cząstkowych, jednak kompletnej teorii równania diofantycznego (1) wciąż brak.

Fizyka dla rolnika

*Bartłomiej BAK**

Czy fizyka ma zastosowanie w rolnictwie? Na to pytanie można bez większego namysłu odpowiedzieć: „oczywiście, tak”. Przecież wszystkie maszyny, elektronika, czujniki, systemy nawadniania – to zaprzęgnięta do konkretnych celów fizyka. Spróbujmy więc pogłębić to pytanie: Czy prawa fizyki mogą być wykorzystane w rolnictwie bezpośrednio? Okazuje się, że tak, i w niniejszym artykule zostanie przedstawionych kilka, zdaniem autora najciekawszych, przykładów.

Wiosenne przymrozki – zhora wszystkich ogrodników – z którymi owi ogrodnicy muszą sobie radzić na różne sposoby. Pierwszy, najbardziej intuicyjny, to okrywanie roślin. Istotnie, jest to niezwykle skuteczna i nadal powszechnie stosowana metoda przy uprawach, chociażby truskawek. Tu fizyka jest dość prosta: stosujemy warstwę izolacyjną (w postaci np. agrowłókniny), która chroni przed utratą ciepła. Mało tego, osiadająca rosa, zamarzając na powierzchni, tworzy dodatkową warstwę izolacyjną w postaci lodu (tzw. efekt igloo). Niestety nie sposób zaimplementować tej metody w przypadku sadów, i to z kilku powodów – począwszy od rozmiarów upraw i samych roślin, na kwestiach praktycznych skończywszy.

Co wobec tego należałoby zrobić? Otóż zaprzyjaźnić się z termodynamiką. Okazuje się, że najskuteczniejszą i najczęściej stosowaną metodą* jest polewanie (zraszanie) sadów wodą. Czytelnik Niewtajemniczony zapewne zdziwi się, bo brzmi to jak kompletny nonsens – chcemy ochronić rośliny przed mrozem, po czym polewamy je wodą, która przecież zamarznie! Warto podkreślić, że ta woda faktycznie zamarznie – i tak ma być! Teraz wyjaśnimy dlaczego.

* Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Innym sposobem – nadal stosowanym, aczkolwiek mało praktycznym – jest ogrzewanie powietrza poprzez spalanie różnego rodzaju paliw.

*Przynajmniej w rodzinnych stronach autora, gdzie uprawa jabłoni jest powszechną i dominującą gałęzią rolnictwa.

Gdy woda (np. ta otaczająca pąki) zamarza, jej temperatura pozostaje na poziomie 0°C – jest to temperatura równowagi mieszaniny wody i lodu. Dopiero po całkowitym zamarznięciu wody temperatura lodu może dalej spadać. Oznacza to, że zanim temperatura wewnątrz pąka spadnie poniżej zera, cała otaczająca go warstwa wody musi najpierw zamarznąć. Proces ten wymaga odebrania znacznej ilości energii (tzw. ciepła krzepnięcia), co spowalnia wychładzanie. W efekcie, jeśli mróz trwa krótko, wewnątrz zroszonego pąka może pozostać niezamarznięte.



Okres czasu odnosi się do prywatnej eksperyencji i wspomnień autora, którego noce lat dziecięcych były rozświetlane spektakularną pomarańczową luną pobliskiej szklarni.

Zacznijmy od tego, że woda, którą polewa się sady, bynajmniej nie jest ciepła. Jest to zazwyczaj zwykła woda gruntowa zasysana pompami i ma około kilku stopni. Gdy na zewnątrz temperatura spada poniżej zera, woda faktycznie jest nieco cieplejsza niż pąki i kwiaty, które zamierzamy chronić. Na tym jednak rola wody się nie kończy. Podczas ochładzania się woda oddaje ciepło, i to w każdą stronę, ogrzewając nieznacznie powietrze dookoła i co ważne – także same pąki. Co istotne, proces ten nie ustaje w trakcie zamarzania, gdy woda również oddaje ciepło, które zostaje „uwięzione” pod cienką pokrywą lodową i odizolowane od zimnego otoczenia (wspomniany już efekt igloo). Prostota i skuteczność. Zobaczmy, jak to wygląda w liczbach.

Ciepło krzepnięcia wody c_K wynosi

$$(1) \quad c_K = 334 \text{ kJ/kg},$$

co oznacza, że samo zamarznięcie jednego kilograma wody powoduje wydzielenie energii o wartości 334 kJ. Czy to dużo? Tyle energii ma odważnik o masie 334 kg spuszczone na ziemię z wysokości 100 metrów – z tego punktu widzenia to całkiem sporo.

Spójrzmy na to jeszcze inaczej. Ciepło właściwe wody c_w wynosi:

$$(2) \quad c_w = 4200 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)},$$

co oznacza, że potrzeba 4200 dżuli na ogrzanie kilograma wody o 1 kelwin (co odpowiada ogrzaniu o 1 stopień Celsjusza). Łącząc te informacje, uzyskamy następującą konkluzję: gdyby całe ciepło (wyemitowane w trakcie zamarzania pewnej ilości wody) użyć do podgrzania dokładnie tej samej ilości wody, to temperatura tejże wody podniesie się o prawie 80 stopni:

$$(3) \quad \Delta T = \frac{c_K}{c_w} = 79,5 \text{ K} = 79,5^{\circ}\text{C},$$

zakładając, że woda nie zmieni stanu skupienia. Oto jak na pozór nieintuicyjne, niezwykle proste zjawisko skutecznie pomaga chronić uprawy przed negatywnymi skutkami niskich temperatur.

Na koniec warto przytoczyć dygresję związaną z tym tematem w postaci zadania z olimpiady fizycznej. *Jaką temperaturę końcową będzie miała mieszanina jednego kilograma lodu o temperaturze 0°C i pary wodnej o temperaturze 100°C ?* Rozwiązanie tego zadania zostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Inny, niezwykle interesujący efekt również jest związany z uprawą, ale tym razem roślin szklarniowych. Już od zamierzchłych czasów wiadomo, że roślinom do wzrostu i rozwoju niezbędne jest ciepło i światło słoneczne. Łącząc oba te zjawiska z odrobiną sprytu, ludzkość wymyśliła szklarnie – izolowane od warunków zewnętrznych mikroświaty o regulowanej temperaturze, wilgotności czy naświetleniu (w zależności od potrzeb).

Jeszcze nie tak dawno temu (jakieś 10–15 lat) kwestia naświetlenia była rozwiązywana przez lampy świecące światłem żółtopomarańczowym, które jednak obejmowało całe spektrum fal elektromagnetycznych (podobnie jak Słońce, z tym że rozkład natężenia konkretnych kolorów mógł być różny). Jednak wraz z pogłębianiem wiedzy na temat wpływu oświetlenia na wzrost i rozwój roślin wyszło na jaw sporo ciekawych zależności. Okazało się, że pewne rośliny lepiej rosną przy określonej barwie światła, a także że konkretne oświetlenie lepiej wpływa na daną fazę rozwoju. Innymi słowy, nie trzeba świecić całym spektrum bardzo intensywnego światła. Manipulując samym jego kolorem, można znacząco poprawić wydajność hodowli, dodatkowo redukując koszty.

U Czytelnika Zorientowanego powinna zapalić się pewna lampka z następującym skojarzeniem – a czy to przypadkiem nie tego typu korelacja naprowadziła Einsteina na rozwiązanie problemu fotoelektrycznego, zastosowanie i wprowadzenie na dobre mechaniki kwantowej do fizyki, co zapewniło mu zdobycie jedynej w jego karierze Nagrody Nobla. Dokładnie tak! Gwoli przypomnienia, energia światła E zależy od jego częstotliwości ν w następujący sposób:

$$(4) \quad E = h\nu,$$

Oczywiście światło, które nazywamy czerwonym, nie ma jednej, dokładnej długości fali i zajmuje pewien ich zakres, tak samo światło fioletowe.



gdzie $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s oznacza stałą Plancka – fundamentalną stałą fizyki kwantowej. Częstotliwość przekłada się na kolor światła, czyli długość fali λ :

$$(5) \quad \nu = \frac{c}{\lambda},$$

gdzie $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s oznacza prędkość światła w próżni. Oznacza to, że światło czerwone o długości fali około 700 nm ma dużo mniejszą energię niż światło fioletowe, które charakteryzuje się długością fali około 400 nm.

Wracając do meritum – rośliny szklarniowe korzystają z efektu fotoelektrycznego, bo tylko konkretne długości fal są wchłaniane przez stosowane substancje (tu pozostawiam miejsce na dokładniejsze wywody dla znacznie bardziej światłych Kolegów i Koleżanek biologów, biochemików i botaników) i dalej „przetwarzane” (np. energia pozyskana w ten sposób wspomaga produkcję substancji odżywczych). Oznacza to, że zjadane przez nas ogórki i pomidorki całkiem biegle posługują się mechaniką kwantową, która na dobre już zagościła w świecie upraw szklarniowych (co również zmusiło samych hodowców do, przynajmniej pobieżnego, zainteresowania się tą dziedziną fizyki). Cóż, lepszy taki powód niż żaden.

W tym miejscu również warto pozwolić sobie na małą dygresję: teraz niebo nad szklarniami rozświetla już nie intensywnie żółta luna, tylko, w zależności od etapu i rodzaju uprawy, niebieska, fioletowa lub czerwona – ot, warzywna dyskoteka.

Oczywiście wspomniane tutaj przykłady bynajmniej nie wyczerpują tematu, a stanowią początek do dalszych poszukiwań i rozważań nad zastosowaniem „podręcznikowej” fizyki w bezpośrednim użytku.



Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1145. Ciało (punkt materialny) o masie m wykonuje drgania wzdłuż osi x pod działaniem potencjału $V(x) = k|x|^\alpha$, $k > 0$, $\alpha > 1$. Jak okres drgań zależy od energii całkowitej E i masy ciała m ?

F 1146. Elektron i jego antycząstka, pozyton, tworzą związany układ wodoropodobny nazywany pozytronium. Oszacuj energię jonizacji takiego „atomu”.

Wskazówka: energia jonizacji atomu wodoru wynosi około 13,6 eV.

Przygotował Dominik BUREK

M 1855. W dwunastocyfrowej liczbie A dowolne dwie sąsiednie cyfry tworzą dwucyfrową liczbę pierwszą, przy czym wszystkie te liczby pierwsze (jest ich 11) są parami różne. Jakimi cyframi może kończyć się liczba A ?

M 1856. Króla szachowego ustawiono na pewnym polu szachownicy 8×8 i wykonano nim 64 ruchy tak, że odwiedził wszystkie pola planszy i wrócił na pole początkowe. Ruch nazwiemy *przyjemnym*, jeżeli na skutek jego wykonania zmniejszyła się odległość środka pola, na którym stoi król, od środka szachownicy. Jaka jest największa możliwa liczba przyjemnych ruchów?

M 1857. Na obwodzie trójkąta ABC wybrano punkty $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ w następującej kolejności $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Ponadto

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

Udowodnić, że obwody trójkątów wyznaczonych przez proste AD_1, BE_1, CF_1 oraz AD_2, BE_2, CF_2 są równe.

