

Klub 44 F

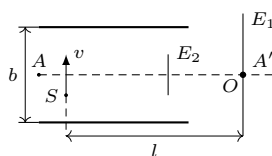


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
806 ($WT = 2,01$), 807 ($WT = 3,1$)
z numeru 11/2025

Jacek Konieczny Poznań 41,41
Paweł Perkowski Ożarów Maz. 6–40,44
Andrzej Nowogrodzki

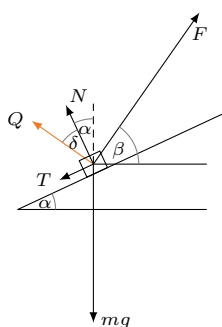
Chocianów 3–36,28
Krzysztof Zygan Lubin 34,85
Ryszard Woźniak Kraków 34,50
Tomasz Wietecha Tarnów 18–29,41
Paweł Kubit Kraków 21,82
Marian Łupieżewicz Gliwice 3–21,66
Zbigniew Galias Kraków 1–16,30



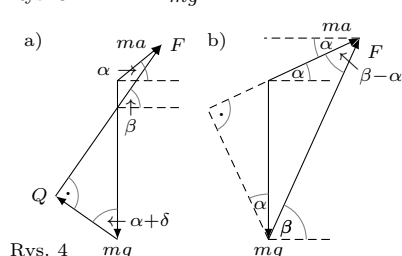
Rys. 1



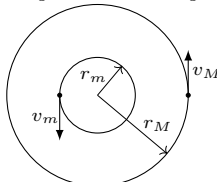
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

813. Oznaczmy początkową odległość między cząstkami przez r , a wartość bezwzględną ich ładunku przez q . Cząstki obiegają środek masy układu po okręgach (rys. 5) o promieniach $r_m = Mr/(m+M)$ i $r_M = mr/(m+M)$ z prędkościami v_m i v_M takimi, że $mv_m = Mv_M$. Z drugiej zasady dynamiki $kq^2/r^2 = mv_m^2/r_m = m(m+M)v_m^2/(Mr)$, stąd

$$(1) \quad kq^2/r = m(m+M)v_m^2/M.$$

Załóżmy, że prędkość cząstki o masie m wzrosła n razy. Mamy układ dwóch cząstek o przeciwnych zwrotach prędkości, w chwili początkowej oddalonych od siebie o r . Badanie ich ruchu możemy zastąpić badaniem ruchu jednej cząstki o masie zredukowanej $\mu = mM/(m+M)$ i prędkości

Zadania z fizyki nr 820, 821

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

820. Punktowe źródło światła monochromatycznego, S , o długości fali $\lambda = 6000 \text{ \AA}$ umieszczono między dwoma nieruchomymi równoległymi zwierciadłami płaskimi, oddległymi od siebie o $b = 3 \text{ cm}$ (rys. 1). W dużej odległości $l = 1 \text{ m}$ od źródła umieszczono ekran E_1 , na którym powstaje obraz interferencyjny, utworzony przez dwie wiązki światła odbite od zwierciadeł. Bezpośredni strumień światła od źródła zasłonięty jest ekranem E_2 . W płaszczyźnie ekranu E_1 na osi symetrii układu AA' umieszczony jest odbiornik O , który rejestruje sygnał proporcjonalny do natężenia padającego na niego światła. Rozmiar odbiornika jest mały w porównaniu z szerokością pasm interferencyjnych na ekranie E_1 . Uwzględniając tylko jednokrotne odbicia światła od zwierciadeł, znaleźć częstotliwość zmiennego sygnału rejestrowanego przez odbiornik podczas ruchu źródła w kierunku prostopadłym do zwierciadeł z prędkością $v = 0,1 \text{ mm/s}$.

821. Okrągłą płytkę o średnicy $d = 40 \text{ mm}$ i grubości $a = 0,5 \text{ mm}$ położono ostrożnie na powierzchni wody. Dzięki napięciu powierzchniowemu płytka nie utonęła, a w miejscu zetknięcia jej górnej powierzchni z powierzchnią wody kąt między nimi okazał się równy 90° (rys. 2). Wyznaczyć gęstość materiału płytki. Współczynnik napięcia powierzchniowego wody $\sigma = 0,073 \text{ N/m}$.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2026

Przypominamy treść zadań:

812. Na drewnianą pochylnię tworzącą kąt α z poziomem wciągana jest za pomocą sznurka skrzynia. Współczynnik tarcia skrzyni o pochylnię wynosi μ . Pod jakim kątem do poziomu należy skierować sznurek, aby z najmniejszym wysiłkiem wciągać skrzynię z zadany przyspieszeniem a ?

813. Dwie cząstki o masach m i M oraz ładunkach o jednakowych wartościach bezwzględnych, ale przeciwnych znakach, poruszają się po okręgach pod wpływem przyciągania elektrycznego. Wartość prędkości cząstki o masie m momentalnie zwiększono, nie zmieniając przy tym kierunku prędkości. Ile razy co najmniej wzrosła ta wartość, jeżeli w wyniku tego cząstki rozleciały się na nieskończoną odległość od siebie?

812. Na skrzynię działają siły: ciężkości mg , tarcia T , reakcji podłoża N i naciągu sznurka F (rys. 3). Wypadkowa Q sił reakcji i tarcia tworzy z prostopadłą do pochylni kąt δ taki, że $\tan \delta = T/N = \mu N/N = \mu$. Oznacza to, że przy zmianie wartości i kierunku siły F , kierunek siły Q pozostaje niezmienny. Rysunek 4 ilustruje równanie ruchu skrzyni: $ma = mg + Q + F$. Siła F ma minimalną wartość przy zadanym a , gdy jest prostopadła do kierunku Q . Z rysunku 4a widać, że kąt nachylenia do poziomu siły $F_{\min}$ wynosi

$$(1) \quad \beta = \alpha + \delta = \alpha + \arctg \mu.$$

Wartość minimalnej siły naciągu sznurka rośnie ze wzrostem przyspieszenia a i przy pewnej jego wartości a_0 składowa siły $F_{\min}$ prostopadła do pochylni będzie miała taką samą wartość jak analogiczna składowa siły ciężkości. Siły reakcji i tarcia, a tym samym ich wypadkowa Q , staną się przy tym równe zero. Równanie ruchu dla $a \geq a_0$, $ma = mg + F_{\min} = 0$, ilustruje rysunek 4b. Widać z niego, że

$$(2) \quad \beta = \alpha + \arctg (g \cos \alpha / (a + g \sin \alpha)).$$

Dla $a = a_0$ wyrażenia na β z (1) i (2) są sobie równe, stąd $a_0 = g(\cos \alpha / \mu - \sin \alpha)$.

Ostatecznie

$$\beta = \begin{cases} \alpha + \arctg \mu & \text{dla } 0 \leq a \leq a_0, \\ \alpha + \arctg (g \cos \alpha / (a + g \sin \alpha)) & \text{dla } a > a_0. \end{cases}$$

 początkowej równej prędkości względnej cząstek m i M :

$$(2) \quad v = nv_m + v_M = v_m(n + m/M).$$

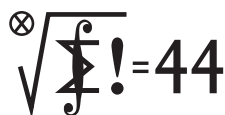
Najmniejsza wartość tej prędkości, która pozwala oddalić się do nieskończoności, wynika z zasady zachowania energii:

$$(3) \quad \mu v^2 / 2 - kq^2 / r = 0.$$

Korzystając z równań (1)–(3), otrzymujemy równanie na n : $n + m/M = \pm \sqrt{2}(m + M)/M$. Rozwiązanie pierwsze odpowiada sytuacji, gdy prędkość cząstki m ma zwrot zgodny z prędkością v_m , drugie, gdy ma zwrot przeciwny. Ostatecznie:

$$n = (m/M) [\sqrt{2}(1 + M/m) - 1].$$

Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 VIII 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
909 ($WT = 2,42$) i 910 ($WT = 1,63$)
z numeru 11/2025

Stanisław Bednarek	Łódź	42,30
Roksana Słowik		41,56
Marian Łupieżowiec	Gliwice	40,52
Mikołaj Pater		40,40
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,19
Jędrzej Biedrzycki		35,81
Janusz Fiett	Warszawa	32,71

Zadania z matematyki nr 923, 924

Redaguje Marcin E. KUCZMA

923. Wyznaczyć wszystkie pary liczb naturalnych k, m takie, że $k!(k! + 6) = 3m!$.

924. Niech n będzie ustaloną liczbą naturalną; $n \geq 2$. Funkcje f, g są określone wzorami: $f(x) = x^n - x$, $g(x) = x^{2n} - x$. Liczby rzeczywiste a, b spełniają warunki: $f(a) = 1$, $g(b) = 3a$. Ustalić (w zależności od n), która z liczb a, b jest większa.

Zadanie 924 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2026

Przypominamy treść zadań:

915. Funkcja parzysta $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, z wartością $f(0) = 0$, ma w całym zbiorze $\mathbb{R}$ ciągłą pochodną.
(a) Udowodnić, że jeśli f ma w punkcie 0 pochodną drugiego rzędu (skończoną), to istnieją dwa przystające okręgi takie, że początek układu współrzędnych jest jedynym punktem wspólnym wykresu funkcji f z każdym z tych okręgów.
(b) Podać przykład pokazujący, że bez założenia istnienia $f''(0)$ teza części (a) nie musi zachodzić.

916. Wzdłuż okręgu należy rozmieścić groszki w trzech różnych kolorach; mamy k groszków jednego koloru, l groszków drugiego, m groszków trzeciego koloru. Znaleźć warunek algebraiczny wiążący liczby k, l, m , konieczny i dostateczny na to, by istniało rozmieszczenie, w którym żadne dwa groszki jednakowego koloru nie sąsiadują.

915. Funkcja f jest parzysta, więc $f'(0) = 0$. Dwa okręgi, o jakich mowa w części (a) – jeżeli istnieją – muszą być (w początku układu współrzędnych) styczne do osi poziomej oraz do wykresu funkcji f , wciśniętego pomiędzy nie (jeden okrąg położony w górnej półpłaszczyźnie, drugi w dolnej). Jeżeli r jest promieniem każdego z nich, wówczas dolny półokrąg górnego okręgu ma równanie

$$y = r - \sqrt{r^2 - x^2} = \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}}.$$

Symetryczny do niego górny półokrąg dolnego okręgu ma równanie różniące się od powyższego jedynie znakiem. Zadanie sprowadza się do pytania, czy istnieje liczba $r > 0$ taka, że

$$(1) \quad |f(x)| < \frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} \quad \text{gdy} \quad 0 < |x| \leq r.$$

I teraz:

(a) Zakładamy, że istnieje $f''(0)$; zatem

$$(2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{2x} = \frac{1}{2} f''(0)$$

(druga z powyższych równości to definicja f'' jako pochodnej funkcji f' ; a pierwsza równość to reguła de l'Hospitala).

Wybermy i ustalmy liczbę $c > |f''(0)|$. Z uwagi na granicę (2) moduł ilorazu $f(x)/x^2$ jest mniejszy od $c/2$ dla x bliskich 0; czyli istnieje $\delta > 0$ o własności

$$(3) \quad |f(x)| < \frac{cx^2}{2} \quad \text{gdy} \quad 0 < |x| \leq \delta.$$

Wystarczy teraz ustalić dowolną liczbę dodatnią $r \leq \min\{\delta, 1/c\}$. Gdy $0 < |x| \leq r$, oszacowanie (3) działa, zatem

$$\frac{x^2}{r + \sqrt{r^2 - x^2}} > \frac{x^2}{2r} \geq \frac{cx^2}{2} > |f(x)|$$

– a to jest wymagany warunek (1), uzasadniający tezę części (a).

(b) Przykład: $f(x) = |x|^{3/2}$. Ta funkcja parzysta ma ciągłą pochodną:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}|x|^{1/2} & \text{dla } x > 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ -\frac{3}{2}|x|^{1/2} & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

(wartość $f'(0) = 0$ wyznaczona z definicji pochodnej).

Niech r będzie dowolnie ustaloną liczbą dodatnią. Dla $0 < x < r^2$ mamy $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x}} > \frac{x^2}{r}$, co zaprzecza spełnieniu warunku (1), i tym samym zaprzecza tezie części (a).

916. Układ nierówności $k \leq l + m$, $l \leq m + k$, $m \leq k + l$ jest warunkiem koniecznym: jasne, że jeśli pewien kolor zajmuje więcej niż połowę pozycji, to pewne dwie pozycje w tym kolorze sąsiadują.

Ten sam układ nierówności jest też warunkiem dostatecznym: oznaczmy literami K, L, M kolory reprezentowane odpowiednio przez liczności k, l, m . Możemy b.s.o. założyć, że $m \geq k$, $m \geq l$. Układamy „w kółko” m groszków M . Pracujemy w trybie *insert*; każde miejsce między dwoma kolejnymi groszkami M nazwijmy *dołkiem* (ang. *socket*). Wrzucamy k groszków K pojedynczo do różnych dołków. Zostaje $m - k$ ($\leq l$) dołków pustych. Wrzucamy do nich $m - k$ groszków L ; a pozostałe $l + k - m$ groszków L wrzucamy pojedynczo do dołków (dowolnie wybranych) zajętych przez groszki K . Wszystkie dołki są teraz zajęte przez co najmniej jeden groszek. W niektórych są po dwa groszki (różnych kolorów); nadajemy każdej takiej parze dowolną orientację, aby uzyskać pożądaną konfigurację cykliczną; gotowe.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.