



Bartłomiej PAWLIK

Miesiąc temu przyglądaliśmy się pewnym własnościom podziału płaszczyzny na sześciokąty. Tym razem również będziemy dzielić płaszczyznę, lecz skupimy się na maksymalnej liczbie części, jaką można w ten sposób otrzymać. Dwa klasyczne przykłady w tej tematyce dotyczą prostych i okręgów.

Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n prostych?

Liczba obszarów jest maksymalna tylko wtedy, gdy proste znajdują się w *położeniu ogólnym* (żadne dwie nie są równoległe ani żadne trzy nie przecinają się w jednym punkcie). Załóżmy bowiem, że do $(n - 1)$ prostych na płaszczyźnie dokładamy kolejną. Jeżeli proste są w położeniu ogólnym, to nowa prosta ma z pozostałymi dokładnie $(n - 1)$ punktów przecięcia – więc jest dzielona na n części (dwie półproste i $(n - 2)$ odcinków). Zatem po dołączeniu do podziału n -tej prostej liczba obszarów zwiększyła się dokładnie o n . W ten sposób wykazujemy, że maksymalna liczba obszarów otrzymanych przy użyciu n prostych to:

$$R_p(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2).$$

Początkowe wyrazy ciągu $R_p(n)$ to 2, 4, 7, 11 i 16.

Zastanówmy się teraz nad kolejnym pytaniem:

Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n okręgów?

Jeden okrąg dzieli płaszczyznę na dwie części. Gdy w odpowiedni sposób dorysujemy drugi, liczba obszarów zwiększy się o 2. Po odpowiednim dorysowaniu trzeciego okręgu zwiększymy liczbę obszarów o 4, a po narysowaniu czwartego – o 6. Ogólnie, optymalnie ułożonych n okręgów daje liczbę obszarów o $2(n - 1)$ większą niż optymalnie ułożonych $(n - 1)$ okręgów. Dlaczego tak jest? Zachęcam do samodzielnego zastanowienia się nad tym pytaniem.

W każdym razie z powyższej obserwacji wynika, że maksymalna liczba obszarów otrzymanych przy użyciu $n > 0$ okręgów to:

$$R_o(n) = n^2 - n + 2,$$

a początkowe wyrazy ciągu $R_o(n)$ to 2, 4, 8, 14 i 22.

Powyższe dwa zadania należą do klasyki kombinatoryki i często służą dydaktycznie jako jedno z pierwszych przykładów przy wprowadzaniu pojęcia rekurencji.

Połączmy teraz świat okręgów ze światem (pół)prostych: *Lizakiem* nazywamy zbiór punktów będący sumą okręgu i półprostej o początku w środku okręgu, z wyłączeniem promienia okręgu należącego do tej półprostej (patrz rys. 3). Dodajmy, że promień został usunięty z lizaka, zapewne ze względów bezpieczeństwa, aby nie ukłuć się nim podczas ewentualnej konsumpcji. Pod koniec 2025 roku Neil Sloane zadał następujące pytanie:

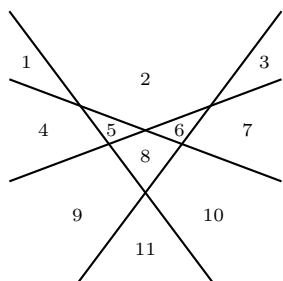
Na ile (najwięcej) obszarów może podzielić płaszczyznę n lizaków?

Zauważmy, że dwa lizaki mogą się przeciąć w co najwyżej siedmiu punktach (patrz rys. 4) – i daje to optymalne 10 obszarów. Przy odpowiednim ułożeniu trzech lizaków otrzymujemy największą możliwą liczbę regionów równą 25. Jak wygląda ogólny wzór ciągu? Zapewne jest dość skomplikowany, ale Cutler, Karlsson i Sloane otrzymali ładne oszacowanie górne:

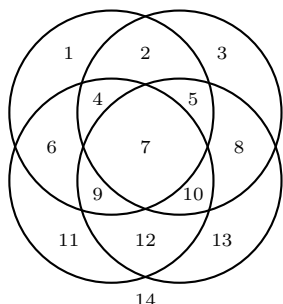
$$R_l(n) \leq \frac{1}{2}(7n^2 - 5n + 2),$$

które niestety nie jest optymalne: ci sami autorzy wykazali, że poprawną odpowiedzią już dla czterech lizaków jest 45, a nie 47. Zapewne lada dzień rozstrzygnie się, czy maksymalna liczba obszarów, którą da się uzyskać, mając do dyspozycji pięć lizaków, to 70 czy 71. A co z sześcioma lizakami? Nie wiadomo.

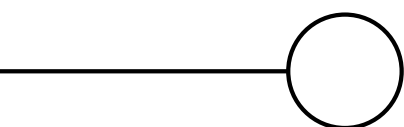
Rys. 1



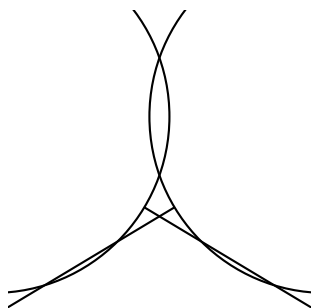
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



David O. H. Cutler, Jonas Karlsson, Neil J. A. Sloane, *Cutting a Pancake with an Exotic Knife* (2025). Sloane na swojej stronie internetowej opublikował również króciutki artykuł *The Lollipop Problem*.