

Nie wszystko złoto, co się świeci

* Kontakt: gornicki59@gmail.com

Jarosław GÓRNICKI*

Andriej A. Markow pokazał (1879), że równanie

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3 \cdot XYZ$$

(nazywane obecnie *równaniem Markowa*) ma nieskończenie wiele rozwiązań w zbiorze liczb naturalnych i rozwiązania te tworzą drzewo o niezwykłych własnościach (więcej na ten temat w artykule z Δ_{26}^5). Równanie to pozostawało niezauważone przez blisko 30 lat, dopiero Adolf Hurwitz (1907) i Georg Frobenius (1913) odkryli jego wyjątkowość. Zainteresowali się następującym ogólnym problemem: dla jakich liczb naturalnych N, s równanie

$$(1) \quad X_1^2 + X_2^2 + \dots + X_N^2 = s \cdot X_1 X_2 \dots X_N$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych i jak te rozwiązania wyglądają? Na przykład dla $N = s = 2$ rozwiązaniami równania (1) są wszystkie pary liczb $(X_1, X_2) = (m, m)$, gdzie $m = 1, 2, \dots$. Pokażemy, jak „niezwykle niezwykle” (to słowa Frobeniusa) jest równanie Markowa! W tym celu rozwiążemy mniej skomplikowany problem: dla jakich naturalnych $s \neq 3$ równanie

$$(2) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = s \cdot XYZ$$

ma rozwiązanie w liczbach naturalnych?

Twierdzenie 1. Wszystkie rozwiązania równania

$$(3) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = XYZ$$

w liczbach naturalnych mają postać $(3m, 3n, 3k)$, gdzie (m, n, k) jest dowolnym rozwiązaniem równania Markowa.

Dowód. Jeśli (m, n, k) spełnia równanie $m^2 + n^2 + k^2 = 3 \cdot mnk$, to po pomnożeniu jego obu stron przez 9 otrzymujemy, że $(3m)^2 + (3n)^2 + (3k)^2 = (3m)(3n)(3k)$. Zatem trójka liczb $(3m, 3n, 3k)$ spełnia równanie (3).

W drugą stronę, niech (A, B, C) będzie rozwiązaniem równania (3) w liczbach naturalnych. Pokażemy, że każda z liczb A, B, C jest podzielna przez 3. Z faktu, że kwadrat liczby niepodzielnej przez 3 daje resztę 1 z dzielenia przez 3, wynika następująca obserwacja:

Reszta z dzielenia liczby $A^2 + B^2 + C^2$ przez 3 jest równa liczbie tych liczb spośród A, B, C , które nie są podzielne przez 3, o ile jest ich mniej niż trzy, a 0 w przeciwnym wypadku.

Gdyby żadna z liczb A, B, C nie była podzielna przez 3, to iloczyn ABC nie byłby podzielny przez 3, a suma $A^2 + B^2 + C^2$ byłaby podzielna przez 3 (zgodnie z obserwacją). Sprzeczność. Jeśli przynajmniej jedna z liczb jest podzielna przez 3, to suma $A^2 + B^2 + C^2 = ABC$ jest podzielna przez 3. Wówczas, na mocy obserwacji, wszystkie liczby A, B, C są podzielne przez 3, co kończy uzasadnienie.

Przyjmując $(A, B, C) = (3m, 3n, 3k)$ i dzieląc równanie (3) przez 9, otrzymujemy, że (m, n, k) spełniają równanie Markowa. $\square$

Twierdzenie 2. Równanie

$$(4) \quad X^2 + Y^2 + Z^2 = 2 \cdot XYZ$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.

Dowód. Załóżmy, że (A, B, C) jest rozwiązaniem równania (4) w liczbach naturalnych. Przyjmijmy $d := \text{NWD}(A, B, C) \geq 1$, a wtedy $A = ad$, $B = bd$, $C = cd$ i liczby a, b, c są względnie pierwsze. Wówczas równanie (4) (po uproszczeniu) przyjmuje postać

$$(5) \quad a^2 + b^2 + c^2 = 2abcd.$$

Prawa strona równania (5) jest parzysta. Ponieważ liczby a, b, c są względnie pierwsze, więc nie mogą być wszystkimi parzystymi. Parzystość lewej strony równania (5) implikuje zatem, że jedna z tych liczb jest liczbą parzystą,



Treść twierdzenia 2 była tematem zadania olimpijskiego, zobacz: S. Straszewicz, „Zadania z olimpiad matematycznych”, tom IV, PZWS, Warszawa 1972, zadanie 16.

a dwie inne są liczbami nieparzystymi. Niech, na przykład, $a = 2u$, $b = 2v + 1$, $c = 2w + 1$, gdzie $u, v, w \in \mathbb{N}$. Podstawiając te wartości do równania (5), otrzymujemy

$$4(u^2 + v^2 + w^2 + v + w) + 2 = 4du(2v + 1)(2w + 1).$$

Równość ta jest fałszywa, bo prawa strona jest podzielna przez 4, a lewa – nie. Zatem równanie (4) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Twierdzenie 3. *Dla naturalnego $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych.*

Dowód. Będziemy postępować analogicznie do dowodu lematów 1 i 2 z poprzedniego artykułu (Δ_{26}^5). Załóżmy, że dla pewnego naturalnego $s > 3$ równanie (2) ma rozwiązanie (a, b, c) w liczbach naturalnych. Wtedy liczby a, b, c są parami różne. Gdyby, na przykład, $b = c$, to $a^2 = sab^2 - 2b^2 = b^2(sa - 2)$, więc $a = bd$, gdzie d jest liczbą naturalną. Wtedy $b^2d^2 = a^2 = b^2(sbd - 2)$, czyli $d^2 = sbd - 2$, a stąd $2 = d(sb - d)$. Oznacza to, że 2 jest podzielne przez d , zatem $d = 1$ lub $d = 2$. W obu tych przypadkach $sb = 3$, co jest sprzeczne z warunkiem $s > 3$.

Możemy więc przyjąć, że $a > b > c$. Rozważmy trójkąt kwadratowy

$$\Phi_a(x) = x^2 + b^2 + c^2 - sbcx = x^2 - sbcx + (b^2 + c^2).$$

Poza pierwiastkiem a posiada on drugi pierwiastek a' (można go wyznaczyć, korzystając ze wzorów Viète'a), więc rozwiązanie (a, b, c) ma rozwiązanie sąsiednie (a', b, c) .

Ponieważ

$$(b - a)(b - a') = \Phi_a(b) = 2b^2 + c^2 - sb^2c < 3b^2 - sb^2c \leq 3b^2 - sb^2 < 0,$$

więc liczba b leży między liczbami a i a' . A więc $a > b > a'$ i maksymalna współrzędna rozwiązania (a', b, c) jest mniejsza niż maksymalna współrzędna rozwiązania (a, b, c) . Zatem dla każdego rozwiązania (a, b, c) równania (2) z $s > 3$ można skonstruować jego rozwiązanie (a_1, b_1, c_1) z mniejszą maksymalną współrzędną. Oczywiście liczby a_1, b_1, c_1 również są parami różne i możemy przyjąć, że $a_1 > b_1 > c_1$. Powtarzając podane wyżej rozumowanie, uzyskujemy rozwiązanie (a_2, b_2, c_2) równania (2) z $s > 3$, którego maksymalna współrzędna jest jeszcze mniejsza. W ten sposób uzyskujemy nieskończony ciąg rozwiązań równania (2) z $s > 3$, z coraz mniejszymi maksymalnymi współrzędnymi. W zbiorze liczb naturalnych jest to niemożliwe. Otrzymana sprzeczność pokazuje, że dla $s > 3$ równanie (2) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. $\square$

Prawdziwe jest twierdzenie ogólniejsze (A. Hurwitz, 1907): dla $s > N$ równanie (1) nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych. Dla $s = N \geq 3$ równanie (1) ma rozwiązanie osobliwe $(x_1, x_2, \dots, x_N) = (1, 1, \dots, 1)$, z którego „wyrastają” kolejne rozwiązania. W pozostałych przypadkach jest wiele wyników cząstkowych, jednak kompletnej teorii równania diofantycznego (1) wciąż brak.

Fizyka dla rolnika

*Bartłomiej BAK**

Czy fizyka ma zastosowanie w rolnictwie? Na to pytanie można bez większego namysłu odpowiedzieć: „oczywiście, tak”. Przecież wszystkie maszyny, elektronika, czujniki, systemy nawadniania – to zaprzęgnięta do konkretnych celów fizyka. Spróbujmy więc pogłębić to pytanie: Czy prawa fizyki mogą być wykorzystane w rolnictwie bezpośrednio? Okazuje się, że tak, i w niniejszym artykule zostanie przedstawionych kilka, zdaniem autora najciekawszych, przykładów.

Wiosenne przymrozki – zhora wszystkich ogrodników – z którymi owi ogrodnicy muszą sobie radzić na różne sposoby. Pierwszy, najbardziej intuicyjny, to okrywanie roślin. Istotnie, jest to niezwykle skuteczna i nadal powszechnie stosowana metoda przy uprawach, chociażby truskawek. Tu fizyka jest dość prosta: stosujemy warstwę izolacyjną (w postaci np. agrowłókniny), która chroni przed utratą ciepła. Mało tego, osiadająca rosa, zamarzając na powierzchni, tworzy dodatkową warstwę izolacyjną w postaci lodu (tzw. efekt igloo). Niestety nie sposób zaimplementować tej metody w przypadku sadów, i to z kilku powodów – począwszy od rozmiarów upraw i samych roślin, na kwestiach praktycznych skończywszy.

Co wobec tego należałoby zrobić? Otóż zaprzyjaźnić się z termodynamiką. Okazuje się, że najskuteczniejszą i najczęściej stosowaną metodą* jest polewanie (zraszanie) sadów wodą. Czytelnik Niewtajemniczony zapewne zdziwi się, bo brzmi to jak kompletny nonsens – chcemy ochronić rośliny przed mrozem, po czym polewamy je wodą, która przecież zamarznie! Warto podkreślić, że ta woda faktycznie zamarznie – i tak ma być! Teraz wyjaśnimy dlaczego.

* Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Innym sposobem – nadal stosowanym, aczkolwiek mało praktycznym – jest ogrzewanie powietrza poprzez spalanie różnego rodzaju paliw.

*Przynajmniej w rodzinnych stronach autora, gdzie uprawa jabłoni jest powszechną i dominującą gałęzią rolnictwa.