

krokach i d nieparzystych krokach przybliżona wartość wynosi $\frac{3^d n}{2^k}$. A więc żeby $\frac{3^d n}{2^k} \geq n$ zachodziło, to liczba nieparzystych kroków musi spełniać $d \geq \frac{k}{\log_2(3)}$. Możemy teraz zastosować nierówność Chernoffa, żeby zaargumentować, że prawie wszystkie ciągi parzystości zawierają mniej niż $\frac{k}{\log_2(3)}$ nieparzystych kroków. Tak naprawdę użyjemy uproszczonej wersji nierówności Chernoffa, którą można sformułować następująco: dla dowolnego $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$ prawdopodobieństwo, że na k rzutów uczciwą monetą wypadnie co najmniej $(\frac{1}{2} + \alpha)k$ orłów, wynosi co najwyżej $e^{-2\alpha^2 k}$. Ponieważ $\frac{1}{\log_2(3)} - \frac{1}{2} > 0,1$, to możemy wziąć $\alpha = 0,1$ i dostajemy, że prawdopodobieństwo, że losowy ciąg parzystości długości k jest zbieżny z prawdopodobieństwem co najmniej $1 - e^{-2(0,1)^2 k} = 1 - e^{-\frac{k}{50}}$. Dla k dążącego do nieskończoności to prawdopodobieństwo dąży do 1, czyli faktycznie prawie wszystkie ciągi parzystości są zbieżne.

Podsumujmy teraz i połączmy w całość wszystkie kawałki dowodu twierdzenia Terrasa. Pokazaliśmy właśnie, że frakcja ciągów parzystości $\mathbf{p}_k$, które nie zbiegają, dąży do zera, gdy długość k dąży do nieskończoności. Przypomnijmy, że jeśli $\mathbf{p}_k$ jest zbieżny, to wtedy wszystkie liczby n o tym ciągu parzystości spełniają $\tilde{g}(n) \leq k < \infty$. Dodatkowo wiemy z poprzednich rozważań, że dla danego ciągu parzystości istnieje tylko skończenie wiele liczb n takich, że $g(n) \neq \tilde{g}(n)$. Łącząc te fakty, możemy wywnioskować, że dla prawie wszystkich n zachodzi $g(n) = \tilde{g}(n) < \infty$. Innymi słowy, **prawie wszystkie liczby mają skończone szybowanie**.

Okazuje się, że znane są nawet wyniki silniejsze niż twierdzenie Terrasa. Dwa tego typu twierdzenia mówią, że minimalna wartość ciągu Collatza $n, c(n), c^2(n), \dots$ jest prawie zawsze równa co najwyżej n^θ . Zauważmy, że jeśli $\theta < 1$, to wtedy $n^\theta < n$, czyli szybowanie n

jest skończone. Pierwsze z tych twierdzeń udowodnił Allouche (w roku 1979) dla $\theta \approx 0,8691$. Następnie wynik ten poprawił Korec (w roku 1994) dla $\theta \approx 0,7924$. Niedawno, w 2019 roku, Terrence Tao udowodnił podobny rezultat: dla dowolnej funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$ takiej, że $f(n)$ dąży do nieskończoności przy n rosnącym do nieskończoności, minimalna wartość ciągu Collatza startującego z n jest prawie zawsze* mniejsza niż $f(n)$. A więc wybierzmy naszą ulubioną funkcję, która dąży do nieskończoności – może to być przykładowo $\log(\log(\log(n)))$ – i wówczas wiemy, że prawie wszystkie liczby n osiągają wartość mniejszą niż $\log(\log(\log(n)))$, imponujące!

*Pewną wadą wyniku Tao jest to, że „prawie wszystkie” jest tu używane zgodnie z logarytmicznym rozkładem miary, a nie typowym, naturalnym rozkładem.

Chociaż wydaje się, że już jesteśmy „prawie na miejscu”, to jednak luka pomiędzy twierdzeniami Terrasa, Allouche’a, Koreca czy Tao a udowodnieniem hipotezy Collatza wydaje się wymagać istotnie nowego podejścia, spostrzeżeń i pomysłów. Nie wiadomo, czy któreś ze wspomnianych twierdzeń może być użyte do dowodu, że prawie wszystkie liczby startowe mają skończone opóźnienie. Przypomnijmy, że opóźnienie to liczba kroków do czasu osiągnięcia 1, w odróżnieniu od szybowania, które jest liczbą kroków do osiągnięcia liczby mniejszej niż startowa. Nawet jeśli ktoś pokazałby, że prawie wszystkie liczby startowe mają skończone opóźnienie, to wciąż nie wiadomo byłoby, czy rzeczywiście wszystkie (a nie prawie wszystkie) liczby startowe mają skończone opóźnienie. Inaczej mówiąc, nawet jeśli pokażemy wersję hipotezy Collatza dla „prawie wszystkich liczb”, to wciąż pozostaje sporo pracy do udowodnienia pełnej hipotezy Collatza. A swoją drogą, jest całkiem możliwe, że w ogóle hipoteza Collatza jest fałszywa, a odkrycie minimalnego kontrprzykładu tuż za rogiem!

Przetłumaczone z języka angielskiego przez Wojciecha CZERWIŃSKIEGO



Piękno nieoczywiste

Każdy przyzwoity biolog popularyzator powinien przynajmniej raz w życiu napisać o gołcach. I ja pragnę dołączyć do tego zacnego grona.

Gatunek ten pasjonuje naukowców z wielu ważnych powodów, ja zacznę od jego urody. Jest zdecydowanym faworytem w konkursie na najbrzydszego ssaka, a może nawet w ogóle zwierzę, na Ziemi. Za śliczne uznajemy zwierzęta obdarzone gęstym futerkiem, dużymi oczami, uszami i zgrabnymi ruchami. Golec zgodnie z angielską nazwą (*naked mole rat*) jest nagim ni to szczurem, ni to kretem. I choć ludzie lubią nagą skórę u własnego gatunku, ma być gładka, brzoskwiniowa, to tu mamy problem. Pomarszczona i cienka skóra golca jest, owszem, różowa, ale w brązowe plamki, jak ręka starego człowieka, porastają ją tu i ówdzie pojedyncze długie włoski. Zwierzę bardzo źle widzi, ma małe, pokryte grubymi powiekami oczy (odbiera jedynie wrażenie światła), nie ma małżowin usznych, a z pyska wystają dwie pary potężnych siekaczy. Całości dopełnia jego kształt, budowę golec przypomina kielbaskę – nie ma wyraźnie wyodrębnionej głowy, szyi i tułowia, a łapki są rachityczne.

Kiedy mija pierwszy odruch lekkiego obrzydzenia i rodzaju współczucia, natura gołców wciąga. Im bardziej się przyglądam, tym bardziej widzę ukryte piękno.

Golec piaskowy (*Heterocephalus glaber*) to gatunek gryzonia zamieszkujący pustynne obszary Afryki Wschodniej (Kenia, Somalia, Etiopia i Dżibuti). Golce są jednym z dwóch gatunków ssaków, które żyją w koloniach o strukturze eusocjalnej, znanej lepiej u owadów (pszczoł czy mrówek), z podziałem na kasty. Na szczycie hierarchii stoi królowa, jedyna zdolna do rozrodu samica, mająca do dyspozycji od jednego do trzech samców. Reszta osobników to robotnicy i żołnierze, którzy dbają o rozwój kolonii, poszukują pokarmu, opiekują się młodymi, bronią przed intruzami i drapieżnikami. Kolonie tworzy od kilkudziesięciu do blisko 300 osobników, a zasięg wykopywanych korytarzy osiąga nawet 3 km. Golce, przebywając praktycznie całe życie pod ziemią, w gorącym klimacie nie potrzebują futra, utraciły też zdolność do termoregulacji, wydobyte na powierzchnię nie utrzymują właściwej ssakom stałej temperatury ciała.

W wąskich korytarzach i całkowitej ciemności mankamenty urody znikają. Nie ma tu nic zbędnego. Kiełbaskowate ciało umożliwia przemieszczanie się równie sprawnie w przód, jak i w tył. Mijając się, po prostu po sobie przechodzą. Cienka i pomarszczona skóra swobodnie przesuwa się po ciele zwierzęcia, przyciskanie się nie powoduje dyskomfortu i nie wpływa na narządy wewnętrzne. Długie pojedyncze włoski na ciele golca to wibrysy, czyli włosy czuciowe, które pozwalają mu się orientować w ciemności całym ciałem. W odróżnieniu od kretów, golce kopią korytarze w twardej pustynnej ziemi wystającymi poza jamę gębową zębami, dzięki czemu niewielkie odnóża mogą służyć jedynie do przemieszczania się. Królowa, w dobrych warunkach, rodzi młode mniej więcej co 80 dni, przy czym i tu golce są rekordzistami: wielkość miotu może przekraczać nawet 30 młodych. Są one otaczane troskliwą opieką przez robotnice, a karmione na zmiany przez matkę. Choć tu królowa mogłaby się jawić jako wąż wielodzietna matka karmiąca, cała struktura społeczna jest zbudowana na jej agresywnym zachowaniu. Bezustannie szturcha otaczające ją robotnice i robotników, generując stały poziom stresu. Stres hamuje ich płodność. Jest to jednak stan odwracalny. Utrata królowej (jej śmierć lub usunięcie z kolonii) rozpoczyna okres chaosu i brutalnej walki o tron. Bezwzględna i najbardziej agresywna samica zostaje nową królową.

Niezwykłe życie społeczne golców sprawiło, że z naturalnych siedlisk trafiły do laboratoriów. I tam dopiero ukazały się dziwy. Okazało się, że golce mimo niewielkich rozmiarów (ok. 7–10 cm) bardzo długo żyją. Szacunki mówią, że te niewiele większe od myszy gryzonie mogą żyć (przynajmniej w hodowli) ponad 30 lat (odnalazłam informację o osobniku 37-letnim). Na dodatek nie podlegają prawu Gompertza, które mówi, że od momentu osiągnięcia dojrzałości wraz z wiekiem u zwierząt rośnie prawdopodobieństwo śmierci. Ciało golca nie nosi uznanych przez naukę oznak starzenia się, również na poziomie komórkowym. Ich organy i funkcje życiowe, także rozmnażanie, pozostają w zasadzie niezmiennie z upływem czasu. Golce właściwie

nie chorują, do niedawna uważano, że nie rozwijają się u nich nowotwory, obecnie uznaje się, że zdarza się to niezmiernie rzadko. Nie odczuwają pewnego rodzaju bólu, znoszą wysoką zawartość dwutlenku węgla i niski poziom tlenu, są nawet w stanie przeżyć 18 minut całkowicie pozbawione tlenu.

Wszystko to zawdzięczają kilku niezwykłym mechanizmom adaptacyjnym na poziomie komórkowym. Lepiej działają u nich systemy obrony przed uszkadzającymi białka i DNA wolnymi rodnikami, aktywniejsze są enzymy naprawiające uszkodzenia. W warunkach niskiej zawartości tlenu w otoczeniu przestawiają swój metabolizm, czerpiąc energię z rozkładu fruktozy, który nie wymaga, jak w przypadku glukozy, obecności tlenu. Trudne warunki środowiska powodują zwolnienie metabolizmu, spada tempo bicia serca, liczba oddechów, a nawet aktywności mózgu. To tak, jakby golce funkcjonowały fizjologicznie w trybie on-off, w zależności od warunków otoczenia.

Jeśli ktoś z szanownych Czytelników pozazdrościł golcom, przypomnę, że zwierzęta te mają to wszystko, ponieważ żyją w paskudnym dla nas świecie. W wąskich korytarzach panuje całkowita ciemność oraz wysoka wilgotność i temperatura (ok. 42°C). Trudno o dobrą wentylację, stąd stężenie tlenu miejscami jest niskie, a dwutlenku węgla wysokie. Na końcu: życie kolonii uzależnione jest od znalezienia pokarmu po omacku, pod ziemią. Golce odżywiają się dużymi bulwami, które dostarczają nie tylko energii, ale także wody. Jedna bulwa może wykarmić całe gniazdo, jednak znalezienie jej pod ziemią przekracza możliwości jednego czy kilku osobników. Tylko zbiorowy wysiłek nieustannego kopania tuneli daje szansę na przetrwanie.

Sposób funkcjonowania społecznego golców wzbudza jednak wątpliwość. Jaki sens ma dominacja jednej samicy, zawężenie całej kolonii do kolejnych braci i siostr o małej zmienności genetycznej? Czy agresja ze strony królowej nie jest czynnikiem destabilizującym współpracę i relacje w grupie? Artykuł z kwietnia br. w *Science Advances* opisuje nowy, nieznany dotąd mechanizm przejścia władzy w kolonii golców. W warunkach indukowanych w laboratorium udało się doprowadzić do pojawienia się trzech płodnych samic w jednej kolonii i do przejścia „władzy” przez jedną z nich bez przejawów agresji i śladów walki. Pokojowe przejście tronu nastąpiło w warunkach przedłużającego się stresu dla całej kolonii.

Golce walczą brutalnie o władzę wtedy, kiedy warunki są relatywnie stałe i dobre. Kiedy dzieje się źle, nastaje pokój, spada agresja, zwiększają się szanse na regenerację kolonii. Pięknie. Zupełnie odwrotnie niż u nas – i tu akurat można by wziąć przykład.

Marta FIKUS-KRYŃSKA

„Peaceful queen succession in the naked mole rat”. Abeywardena S. C. i wsp., *Science Advances* 12 (2026).

„Forever young? Naked mole rats may know the secret”. Kupferschmidt K., *Science* 356 (2018).

„Naked Mole-Rats Demonstrate Profound Tolerance to Low Oxygen, High Carbon Dioxide, and Chemical Pain”. Amoroso V. G. i wsp. *Animals* 13 (2023).