

Oczywiście światło, które nazywamy czerwonym, nie ma jednej, dokładnej długości fali i zajmuje pewien ich zakres, tak samo światło fioletowe.



gdzie $h \approx 6,63 \cdot 10^{-34}$ J·s oznacza stałą Plancka – fundamentalną stałą fizyki kwantowej. Częstotliwość przekłada się na kolor światła, czyli długość fali λ :

$$(5) \quad \nu = \frac{c}{\lambda},$$

gdzie $c \approx 3 \cdot 10^8$ m/s oznacza prędkość światła w próżni. Oznacza to, że światło czerwone o długości fali około 700 nm ma dużo mniejszą energię niż światło fioletowe, które charakteryzuje się długością fali około 400 nm.

Wracając do meritum – rośliny szklarniowe korzystają z efektu fotoelektrycznego, bo tylko konkretne długości fal są wchłaniane przez stosowane substancje (tu pozostawiam miejsce na dokładniejsze wywody dla znacznie bardziej światłych Kolegów i Koleżanek biologów, biochemików i botaników) i dalej „przetwarzane” (np. energia pozyskana w ten sposób wspomaga produkcję substancji odżywczych). Oznacza to, że zjadane przez nas ogórki i pomidorki całkiem biegle posługują się mechaniką kwantową, która na dobre już zagościła w świecie upraw szklarniowych (co również zmusiło samych hodowców do, przynajmniej pobieżnego, zainteresowania się tą dziedziną fizyki). Cóż, lepszy taki powód niż żaden.

W tym miejscu również warto pozwolić sobie na małą dygresję: teraz niebo nad szklarniami rozświetla już nie intensywnie żółta luna, tylko, w zależności od etapu i rodzaju uprawy, niebieska, fioletowa lub czerwona – ot, warzywna dyskoteka.

Oczywiście wspomniane tutaj przykłady bynajmniej nie wyczerpują tematu, a stanowią początek do dalszych poszukiwań i rozważań nad zastosowaniem „podręcznikowej” fizyki w bezpośrednim użyciu.



Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1145. Ciało (punkt materialny) o masie m wykonuje drgania wzdłuż osi x pod działaniem potencjału $V(x) = k|x|^\alpha$, $k > 0$, $\alpha > 1$. Jak okres drgań zależy od energii całkowitej E i masy ciała m ?

F 1146. Elektron i jego antycząstka, pozyton, tworzą związany układ wodoropodobny nazywany pozytronium. Oszacuj energię jonizacji takiego „atomu”.

Wskazówka: energia jonizacji atomu wodoru wynosi około 13,6 eV.

Przygotował Dominik BUREK

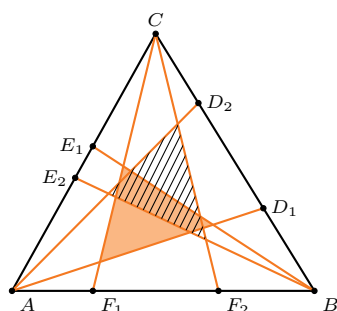
M 1855. W dwunastocyfrowej liczbie A dowolne dwie sąsiednie cyfry tworzą dwucyfrową liczbę pierwszą, przy czym wszystkie te liczby pierwsze (jest ich 11) są parami różne. Jakimi cyframi może kończyć się liczba A ?

M 1856. Króla szachowego ustawiono na pewnym polu szachownicy 8×8 i wykonano nim 64 ruchy tak, że odwiedził wszystkie pola planszy i wrócił na pole początkowe. Ruch nazwiemy *przyjemnym*, jeżeli na skutek jego wykonania zmniejszyła się odległość środka pola, na którym stoi król, od środka szachownicy. Jaka jest największa możliwa liczba przyjemnych ruchów?

M 1857. Na obwodzie trójkąta ABC wybrano punkty $D_1, D_2, E_1, E_2, F_1, F_2$ w następującej kolejności $A, F_1, F_2, B, D_1, D_2, C, E_1, E_2$. Ponadto

$$AD_1 = AD_2 = BE_1 = BE_2 = CF_1 = CF_2.$$

Udowodnić, że obwody trójkątów wyznaczonych przez proste AD_1, BE_1, CF_1 oraz AD_2, BE_2, CF_2 są równe.



Rozwiązania zadań ze strony 7



Rozwiązanie zadania F 1145.

Podczas ruchu energia całkowita E pozostaje stała i wynosi (t oznacza czas):

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + V(x).$$

Ruch odbywa się między punktami:

$$x_{\pm} = \pm \left| \frac{E}{k} \right|^{1/\alpha} = \pm x_0.$$

Wprowadźmy nową zmienną $u = x/x_0$. Otrzymamy równanie:

$$E = \frac{m}{2} x_0^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + k x_0^\alpha u^\alpha = \frac{m}{2} x_0^2 \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + E |u|^\alpha,$$

bo $k x_0^\alpha = E$. Mamy więc:

$$\frac{du}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m x_0^2} (1 - |u|^\alpha)}.$$

Pełny okres drgań to ruch od $x = -x_0$ do $x = x_0$ i z powrotem do $x = -x_0$, a w zmiennej u od $u = -1$ do $u = 1$ i z powrotem do $u = -1$. Potencjał jest symetryczny względem $x = 0$, $V(-x) = V(x)$, a więc pełny okres drgań T wynosi:

$$T = 4 \sqrt{\frac{m}{2E}} x_0 \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{1 - u^\alpha}}.$$

W powyższym wzorze całka jest po prostu liczbą zależną od wartości α . Po podstawieniu x_0 otrzymujemy, że

$$T \propto m^{1/2} E^{1/\alpha - 1/2} k^{-1/2}.$$



Rozwiązanie zadania F 1146.

W pierwszym przybliżeniu możemy posłużyć się modelem Bohra atomu wodoru. W tym modelu energie E_n kolejnych stanów atomu wodoru opisuje wzór postaci:

$$E_n = -\frac{\mu A}{n^2}.$$

We wzorze tym n jest główną liczbą kwantową stanu, A – stałą zawierającą wyłącznie uniwersalne stałe fizyczne (stałą Plancka, ładunek elementarny, przenikalność elektryczną próżni), a μ jest masą zredukowaną układu elektron-proton (masa elektronu m_e , masa protonu m_p):

$$\mu = \frac{m_e \cdot m_p}{m_e + m_p} \approx m_e.$$

Przybliżona równość wynika z faktu, że masa protonu jest około 1840 razy większa od masy elektronu. W przypadku „atomu” złożonego z elektronu i pozytonu o obu masach równych masie elektronu masa zredukowana $\mu = m_e/2$ i energie stanów pozytronium mają wartości dwukrotnie mniejsze od energii atomu wodoru. Energia jonizacji pozytronium wynosi więc około 6,8 eV.



Rozwiązanie zadania M 1855.

(a) Dwucyfrowa liczba pierwsza nie może kończyć się na 2, 4, 5, 6 ani na 8. Zatem liczba pierwsza zaczynająca się od jednej z tych cyfr może wystąpić jedynie na początku liczby A .

Dwucyfrowych liczb pierwszych zaczynających się na 1, 3, 7 lub 9 jest dokładnie 10, a mianowicie:

11, 13, 17, 19, 31, 37, 71, 73, 79, 97.

Ponieważ w liczbie A występuje 11 różnych dwucyfrowych liczb pierwszych, wszystkie one muszą się pojawić. Spośród nich tylko jedna zaczyna się na 9, jest to 97. Natomiast na cyfrę 9 kończą się dokładnie dwie liczby: 19 oraz 79. Zatem jedna z nich musi znajdować się na końcu liczby A , co dowodzi, że liczba A musi kończyć się cyfrą 9. Przykładem takiej liczby jest $A = 417971137319$.



Rozwiązanie zadania M 1856.

Odpowiedź. 44.

Pokażemy, że nieprzyjemnych ruchów jest co najmniej 20, a więc liczba ruchów przyjemnych nie przekracza 44. Ponumerujemy pola planszy zgodnie z ich odległością od środka, jak na rysunku. Pola z tym samym numerem są w jednakowej odległości od środka, a mniejszy numer oznacza pole bliższe środkowi.

9	8	7	6	6	7	8	9
8	6	5	4	4	5	6	8
7	5	3	2	2	3	5	7
6	4	2	1	1	2	4	6
6	4	2	1	1	2	4	6
7	5	3	2	2	3	5	7
8	6	5	4	4	5	6	8
9	8	7	6	6	7	8	9

Każdy ruch z pola oznaczonego liczbą 1 nie zmniejsza odległości od środka, a więc jest nieprzyjemny; takich ruchów jest co najmniej 4. Ruch z pola oznaczonego liczbą 2 może być przyjemny jedynie wtedy, gdy prowadzi na pole z numerem 1. Na planszy jest 8 pól z numerem 2 oraz tylko 4 pola z numerem 1, zatem co najmniej 4 ruchy z pól z numerem 2 są nieprzyjemne.

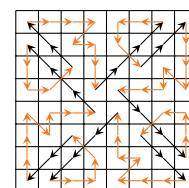
Rozważmy teraz ruchy prowadzące na pola z numerami nie mniejszymi niż 6. Takie ruchy nie mogą wychodzić z pól o numerach 1 i 2 i będą przyjemne tylko wtedy, gdy wyjdą z pól o numerze co najmniej 7. Pól o numerze co najmniej 7 jest 20, natomiast pól o numerze co najmniej 6 jest 32, stąd co najmniej $32 - 20 = 12$ ruchów tego typu jest nieprzyjemnych.

Łącznie otrzymujemy co najmniej

$$4 + 4 + 12 = 20$$

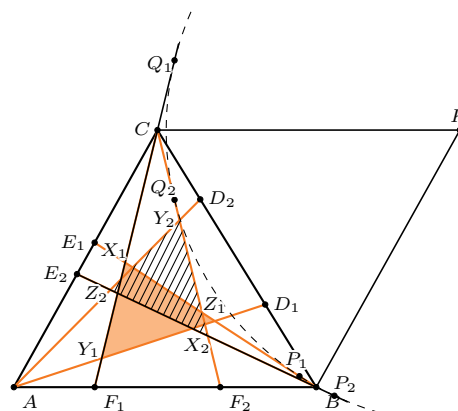
ruchów nieprzyjemnych, a więc najwyżej $64 - 20 = 44$ ruchy przyjemne.

Na rysunku obok pokazano przykład obejścia planszy, w którym liczba przyjemnych ruchów (oznaczonych kolorem) jest równa 44.



Rozwiązanie zadania M 1857.

Skorzystamy z zadania 1849 (Δ_{26}^4). Niech proste z treści zadania wyznaczają trójkąty $X_1Y_1Z_1$ oraz $X_2Y_2Z_2$ (zgodnie z oznaczeniami na rysunku).



Wybermy punkt K tak, aby czworokąt $ABKC$ był równoległobokiem. Z zadania wynika, że punkt K jest równoodległy od prostych BE_1, CF_1, BE_2, CF_2 . Istnieje zatem okrąg o środku K , styczny do tych prostych w punktach P_1, Q_1, P_2, Q_2 . Z równości odcinków stycznych otrzymujemy: $BX_1 - CX_1 = BP_1 + X_1P_1 - X_1Q_1 + CQ_1 = BP_2 + CQ_2 = CX_2 - BX_2$. Analogicznie dostajemy:

$$CY_1 - AY_1 = AY_2 - CY_2, \quad AZ_1 - BZ_1 = BZ_2 - AZ_2.$$

Sumując te trzy równości, otrzymujemy równość obwodów trójkątów $X_1Y_1Z_1$ oraz $X_2Y_2Z_2$, co kończy dowód.