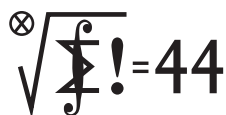


Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
911 ($WT = 2,38$) i 912 ($WT = 1,47$)
z numeru 12/2025

Stanisław Bednarek	Łódź	46,15
Mikołaj Pater		44,25
Roksana Słowik		41,56
Marian Łupieżowiec	Gliwice	40,52
Krzysztof Kamiński	Pabianice	40,19
Jędrzej Biedrzycki		38,19
Janusz Fiett	Warszawa	34,18
Janusz Olszewski	Warszawa	33,09
Łukasz Merta		31,54
Piotr Kumor	Olsztyn	30,85
Tomasz Wietecha	Tarnów	30,73

I znów dwaj Weterani: pan Stanisław Bednarek po raz czwarty, a pan Mikołaj Pater już po raz piąty przekraczają magiczną linię 44p.

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2026

Przypominamy treść zadań:

917. Znaleźć największą liczbę c mającą tę własność, że dla każdej nieparzystej liczby naturalnej n oraz dla każdej liczby rzeczywistej x spełniona jest nierówność $|x^n - 1| \geq c|x - 1|$.

918. W trójkącie ABC punkty D, E, F są spodkami wysokości AD, BE, CF . Proste DE i CF przecinają się w punkcie G . Udowodnić, że okrąg opisany na trójkącie ABG przechodzi przez środek odcinka DE .

917. Dla $x = 1$ zadany warunek jest bezprzedmiotowy (spełniony dla każdej pary n, c). Dalej rozważamy $x \neq 1$. Dla $x \notin (-1, 0)$ mamy łatwe szacowanie:

$$|x^n - 1| - |x - 1| = \begin{cases} (x^n - 1) - (x - 1) \geq 0 & \text{gdy } x \in (1, \infty); \\ (1 - x^n) - (1 - x) \geq 0 & \text{gdy } x \in [0, 1); \\ (1 - x^n) - (1 - x) \geq 0 & \text{gdy } x \in (-\infty, -1]. \end{cases}$$

Natomiast gdy $x \in (-1, 0)$, więc $x^n < 0$, $1 - x < 2$, użyjemy oszacowania

$$|x^n - 1| - \frac{1}{2}|x - 1| = (1 - x^n) - \frac{1}{2}(1 - x) > (1 - x^n) - 1 > 0.$$

Zatem dla wszystkich rozważanych par $n \in \{1, 3, 5, 7, \dots\}$, $x \in \mathbb{R}$ spełniona jest nierówność

$$|x^n - 1| \geq \frac{1}{2}|x - 1|,$$

która pokazuje, że stała $c = \frac{1}{2}$ jest dobra. Przy tym nie można jej zwiększyć, bowiem biorąc $x_n = -n^{-1/n}$, otrzymujemy w granicy (gdy $n \rightarrow \infty$ przez wartości nieparzyste):

$$\left| \frac{x_n^n - 1}{x_n - 1} \right| = \frac{1 - x_n^n}{1 - x_n} = \frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + n^{-1/n}} \rightarrow \frac{1}{2}.$$

Stąd wniosek, że $c = \frac{1}{2}$ jest maksymalną żadaną stałą. (W końcu można było użyć dowolnego ciągu (x_n) spełniającego warunki $x_n \rightarrow -1$, $x_n^n \rightarrow 0$).

918. Niech M będzie środkiem odcinka DE , a K środkiem odcinka AB .

Na następujących czwórkach punktów można opisać okręgi:

$$(1) \quad AEDB, \quad GMKF, \quad DEFK.$$

Uzasadnienia: punkty pierwszej czwórki leżą na okręgu o średnicy AB (kąty proste przy D i E); ten okrąg ma środek K , więc $KD = KE$; stąd $KM \perp ED$ i cykliczność drugiej czwórki (1) (kąty proste przy M i F). Cykliczność trzeciej możemy uzasadnić na przykład tak:

Niech H oznacza ortocentrum trójkąta ABC ; punkt F' symetryczny do H względem F leży na okręgu ABC ; podobnie punkty D' i E' symetryczne do H względem D i E . Punkt F'' symetryczny do F' względem symetralnej boku AB też leży na tym okręgu; K jest środkiem przeciwprostokątnej HF'' trójkąta $HF'F''$, czyli $HK = \frac{1}{2}HF''$. Tak więc punkty D, E, F, K są obrazami punktów D', E', F', F'' w jednokładności o środku H i skali $1/2$; leżą zatem na okręgu DEF , będącym obrazem okręgu ABC [przechodzi on przez K i (podobnie) przez środki boków AC, BC ; większość Czytelników rozpoznaje w nim okrąg *dziwięciu punktów* trójkąta ABC ; a dla tych, którzy się z tym pojęciem nie zetknęli, zagadka: na razie widzimy *sześć* charakterystycznych punktów leżących na nim, skąd nazwa?].

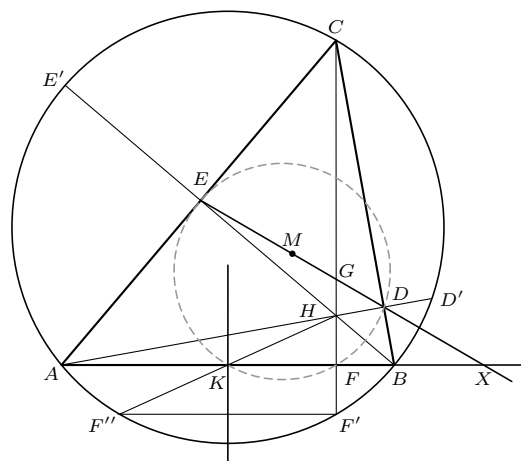
Rysunek ilustruje sytuację, gdy trójkąt ABC jest ostrokątny. Zachęcamy Czytelników do wykonania odpowiednich szkiców, by się przekonać, że rozumowanie przenosi się bez żadnych zmian na przypadki trójkątów rozwartokątnych.

Gdy już mamy cykliczność każdej z trzech czwórek (1), dokończenie jest natychmiastowe: jeśli $DE \parallel AB$,

to $G = M$, i nie ma czego dowodzić. Jeśli nie, to oznaczając przez X punkt przecięcia prostych DE i AB , dostajemy równości (potęg):

$$XG \cdot XM = XF \cdot XK = XF \cdot XD = XA \cdot XB.$$

Równość skrajnych iloczynów oznacza, że punkty G, M, A, B leżą na okręgu. [Rozwiązanie proponowane przez Autora zadania, Michała Adamaszka].



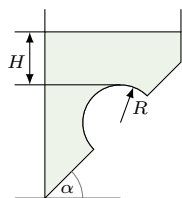
Klub 44 F



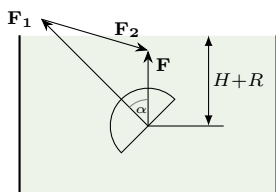
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
808 ($WT = 1,69$), 809 ($WT = 1,77$)
z numeru 12/2025

Paweł Perkowski Ożarów Maz. 6–43,90
Andrzej Nowogrodzki

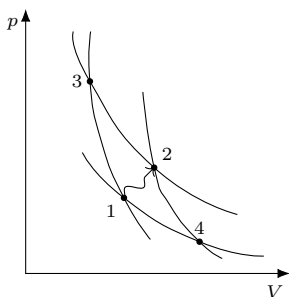
Chocianów	3–36,28
Lubin	34,85
Krzysztof Zygan	34,50
Ryszard Woźniak	18–32,87
Tomasz Wietecha	3–22,34
Marian Łupieżowicz	



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Rozważmy cykl $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Na drodze $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2$ gaz pobiera ciepło Q_{132} (na izotermie), następnie oddaje ciepło o wartości bezwzględnej Q_{12} na drodze $1 \rightarrow 2$, wykonując przy tym pracę równą $Q_{132} - Q_{12}$, równą polu figury ograniczonej cyklem. Zatem

$$(1) \quad Q_{132} \geq Q_{12}.$$

Analogicznie, w procesie $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ nieujemna praca wykonana przez gaz wynosi $Q_{12} - Q_{142}$, stąd

$$(2) \quad Q_{12} \geq Q_{142}.$$

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 3/2026

Przypominamy treść zadań:

814. Dno naczynia nachylone jest pod kątem $\alpha = 45^\circ$ do poziomu. W dnie znajduje się półsferyczna wypukłość o promieniu R (rys. 1). Wysokość słupa cieczy nad wypukłością wynosi H . Jaką siłą działa ciecz w kierunku pionowym na wypukłą część dna? Gęstość cieczy jest równa ρ .

815. Należy przeprowadzić gaz doskonały ze stanu 1 o temperaturze T_1 do stanu 2 o temperaturze $T_2 > T_1$ w taki sposób, aby temperatura w ciągu całego procesu odwracalnego $1 \rightarrow 2$ nie malała, a gaz nie oddawał ciepła. Minimalna ilość ciepła, jaką może pobrać gaz w opisanym procesie, wynosi Q_1 . Jaka może być maksymalna ilość tego ciepła?

814. Rozważmy ciało w kształcie półkuli o promieniu R , które znajduje się w cieczy o gęstości ρ i zorientowane jest w przestrzeni dokładnie tak, jak wypukła część dna danego naczynia (rys. 2). Zgodnie z prawem Archimidesa na ciało to działa skierowana pionowo w górę siła wyporu o wartości:

$$(1) \quad F = 2\rho g \pi R^3 / 3.$$

Siłę $\mathbf{F}$ można przedstawić jako wypadkową sił działających ze strony cieczy: siły $\mathbf{F}_1$ działającej na „podstawę” półkuli i siły $\mathbf{F}_2$ działającej na jej powierzchnię boczną:

$$(2) \quad \mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2,$$

stąd $\mathbf{F}_2 = \mathbf{F} - \mathbf{F}_1$.

Ponieważ ciśnienie cieczy rośnie liniowo wraz z głębokością, możemy napisać:

$$(3) \quad F_1 = p_{\text{sr}} S = \rho g (H + R) \pi R^2.$$

Przyjmijmy, że oś Y jest skierowana pionowo w górę. Składowa pionowa siły $\mathbf{F}_1$:

$$(4) \quad F_{1y} = F_1 \cos \alpha.$$

Interesuje nas składowa pionowa siły $\mathbf{F}_2$:

$$F_{2y} = F - F_{1y} = \pi \rho g R^2 [2R/3 - (H + R) \cos \alpha].$$

Dla $\alpha = 45^\circ$ $\cos \alpha = \sqrt{2}/2 > 2/3$, zatem $F_{2y} < 0$.

Szukana składowa pionowa siły, jaką działa ciecz na wypukłą część dna, skierowana jest w dół i ma wartość

$$F_{2\perp} = F_{1y} - F = \pi \rho g R^2 [(H + R) \sqrt{2}/2 - 2R/3].$$

815. Niech punkty 1 i 2 na wykresie pV wyznaczają stany gazu w temperaturach, odpowiednio, T_1 i T_2 . Poprowadźmy przez te punkty izotermy i adiabaty i oznaczmy punkty ich przecięcia cyframi 3 i 4 (rys. 3). Proces $1 \rightarrow 2$ określony w treści zadania jest możliwy, gdy punkt 2 leży na prawo od adiabaty przechodzącej przez punkt 1, a wykres dowolnego procesu $1 \rightarrow 2$ spełniającego warunki zadania musi leżeć wewnątrz cyklu $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$.

Z nierówności (1) i (2) otrzymujemy

$$(3) \quad Q_{142} \leq Q_{12} \leq Q_{132}.$$

Ponieważ proces $1 \rightarrow 2$ jest dowolnym procesem spełniającym warunki zadania, z nierówności (3) wynika, że minimalna ilość ciepła pobranego przez gaz w takim procesie to $Q_{142} = Q_1$, a maksymalna wynosi Q_{132} . Oznaczmy ją przez Q_2 . Proces $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 1$ jest cyklem Carnota, którego sprawność $\eta = 1 - Q_1/Q_2 = 1 - T_1/T_2$. Stąd

$$Q_2 = Q_1 T_1 / T_2.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.