

Magia obliczeń Feynmana

Jarosław GÓRNICKI*

*Kontakt:gornicki59@gmail.com

Richard P. Feynman, Ralph Leighton, *Pan raczy żartować, panie Feynman! Przypadki ciekawego człowieka*, Wyd. Znak, Kraków 1996 (są wydania późniejsze).

Richard P. Feynman, laureat Nagrody Nobla (1965 rok, wspólnie z Julianem Schwingerem i Shin'ichirō Tomonagą) za fundamentalny wkład w badania nad kwantową teorią oddziaływań elektromagnetycznych. Wniósł również istotny wkład w wyjaśnianie zjawiska nadciekłości i teorii oddziaływań słabych odpowiedzialnych za rozpady promieniotwórcze.



24-letni R.P. Feynmann na identyfikatorze Laboratorium Los Alamos (rok 1942)

W słynnych *Wykładach z fizyki* (tom I, rozdział 22-4) Feynman opisał, jak Henry Briggs w 1620 roku wyznaczył wielocyfrowe tablice logarytmów dziesiętnych.

$$\begin{aligned} 27 \cdot 26 &= (25 + 2)(25 + 1) \\ &= 25^2 + 3 \cdot 25 + 2 \\ &= 625 + 75 + 2 = 702. \end{aligned}$$

Tutaj de facto skupiamy się tylko na sumie wartości logarytmów i jej różnicy od wartości 3:

$$\begin{array}{r} 2,30260 \\ + 0,69315 \\ \hline 2,99575. \end{array}$$

W 1985 roku ukazała się książka *Surely You're Joking, Mr. Feynman! Adventures of a Curious Character* o życiu *à la* Feynman. To zbiór anegdot i wspomnień Richarda Feynmana spisanych przez Ralpha Leightona w ciągu wielu lat ich wspólnego grania na bębnach. W rozdziale *Szczęśliwe liczby* Feynman wspomina, jakie wrażenie robił na rozmówcach, wykonując trudne obliczenia w pamięci. W dobie wszechobecnych smartfonów ta sztuka (wiedza?) chyba zanika, więc może warto przenieść się na chwilę do czasów bez komputerów.

Feynman był fizykiem, ukończył MIT w 1939 roku, a Princeton University w 1942. Jeszcze przed ukończeniem Princeton, mając 23 lata, rozpoczął pracę w *Projekcie Manhattan* (początkowo w Princeton, później w nowej lokalizacji w Los Alamos). Pracował w zespole teoretycznym Hansa Bethego (Nagroda Nobla, 1967), który powierzył mu kierowanie zespołem obliczeniowym tzw. „żywych komputerów”, grupą ludzi o wyjątkowych umiejętnościach rachunkowych, którzy wykonywali skomplikowane, żmudne obliczenia (to protoplaści późniejszych programistów). Dyrektor Laboratorium Los Alamos J. Robert Oppenheimer o Feynmanie pisał (1943): „pod wszelkimi względami jest tutaj najbardziej bystrym młodym fizykiem, i wszyscy o tym wiedzą”.

Feynman wspominał, że podczas pobytu w Princeton podjął wyzwanie (rzuczone prawdopodobnie przez Johna Tukeya) obliczenia w pamięci przybliżonych wartości $e^{3,3}$, e^3 , $e^{1,4}$. Feynman mówił o swoim rozwiązaniu, ale wszystkiego nie ujawnił. Pójdziemy jego tropami.

Obliczenie $e^{3,3}$. Feynman znał na pamięć wartości kilku logarytmów, wśród nich $\ln 10 \approx 2,3026$, czyli $e^{2,3026} \approx 10$. Ponieważ $e \approx 2,71828$, więc

$$e^{3,3026} = e^{2,3026} \cdot e^1 \approx 10 \cdot 2,71828 = 27,1828.$$

To za dużo, trzeba uwzględnić poprawkę $e^{-0,0026}$. Ponieważ $e^{\pm x} \approx 1 \pm x$ dla małych wartości x , więc

$$\begin{aligned} e^{3,3} &= e^{3,3026} \cdot e^{-0,0026} \approx 27,1828 \cdot (1 - 0,0026) \\ &\approx 27,18 - 27 \cdot 26 \cdot 0,0001 \\ &\approx 27,18 - 700 \cdot 0,0001 \\ &= 27,18 - 0,07 = 27,11. \end{aligned}$$

Dokładniejsze przybliżenie liczby e oraz dokładna wartość $27 \cdot 26$ (bo to łatwy rachunek) poprawia wynik:

$$e^{3,3} \approx 27,1828 - 702 \cdot 0,0001 = 27,1828 - 0,0702 = 27,1126.$$

W ten sposób faktycznie dostajemy początkowe cyfry rozwinięcia dziesiętnego $e^{3,3}$ (czyli 27,1126389...).

Obliczenie e^3 . Feynman znał również przybliżoną wartość $\ln 2 \approx 0,69315$, więc z grubsza $e^3 = e^{2,3} \cdot e^{0,7} \approx 10 \cdot 2 = 20$. Dokładniej,

$$\begin{aligned} e^3 &= e^{2,3026} \cdot e^{0,69315} \cdot e^{0,00425} \approx 10 \cdot 2 \cdot (1 + 0,00425) \\ &= 20 + 2 \cdot 0,0425 = 20,085. \end{aligned}$$

Ponownie wynik jest zadowalający; za pomocą komputera sprawdzamy, że $e^3 = 20,08553 \dots$

Obliczenie $e^{1,4}$. Ponieważ $e^{1,4} = e^{0,7+0,7}$, a $e^{0,7} \approx 2$, więc wynik jest bliski 4. Dokładniej, $e^{2 \cdot 0,69315} = e^{1,3863} \approx 4$. Biorąc wykładniki do trzech miejsc po przecinku (rachunki na wartościach logarytmów są wtedy łatwiejsze), mamy

$$e^{1,4} = e^{1,386} \cdot e^{0,014} \approx 4 \cdot (1 + 0,014) = 4 + 0,056 \approx 4,05.$$

Zwiększając dokładność do czterech miejsc po przecinku,

$$e^{1,4} = e^{1,3863} \cdot e^{0,0137} \approx 4 \cdot (1 + 0,0137) = 4 + 0,0548 \approx 4,055.$$

Swój wyczyn Feynman skomentował w książce słowami: *Nigdy się nie zorientowali, jaką miałem metodę.*

Przy okazji wspomnijmy, że 1729 to liczba Ramanujana, najmniejsza liczba naturalna, którą można przedstawić na dwa różne sposoby jako sumę dwóch sześciątów: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$.

W 1949 roku Feynman przez kilka miesięcy przebywał w Brazylii. Spotkał tam pewnego Japończyka (w Brazylii jest liczna diaspora japońska), który był pewien, że szybciej obliczy pierwiastek sześcienny, korzystając z japońskiego liczydła (*sorobanu*), niż Feynman w pamięci. Zaproponował obliczenie $\sqrt[3]{1729,03}$. Nie docenił wiedzy Feynmana.

Obliczenie $\sqrt[3]{1729,03}$. Feynman wiedział, że $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$ dla małych wartości x . Wiedział również, że $12^3 = 1728$ (bo stopa to 12 cali, więc stopa sześcienna ma $1728 = 12^3$ cali sześciennych; to dla Amerykanów wiedza powszechna). Zatem

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1729,03} &= \sqrt[3]{1728} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1,03}{1728}} \approx 12 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1,03}{1728}\right) \\ &= 12 + \frac{1,03}{3 \cdot 144} = 12 + \frac{1,03}{432},\end{aligned}$$

a oszacowanie ostatniego ułamka jest łatwe:

$$0,00206 = \frac{206}{100000} = \frac{103}{50000} < \frac{103}{43200} < \frac{100}{40000} = \frac{2500}{1000000} = 0,0025.$$

Stąd $\sqrt[3]{1729,03} \approx 12,002$.

Podczas pobytu w Los Alamos Feynman spotkał niezwykle ludzi. Chociaż sam – jak widać po przedstawionych wyżej rozumowaniach – był niezwykle biegły w rachunkach, przyznawał, że arcymistrzem obliczeń był Hans Bethe. Jednocześnie wspominał, że Paul Olum zawsze potrafił go zaskoczyć zadaniem rachunkowym, wobec którego był bez szans. *Ciekawych przypadków* Richarda Feynmana było bardzo wiele – tym, którzy nie czytali jeszcze tych fascynujących wspomnień, gorąco polecam ich lekturę.

Obrączki nierozłączki?

Mariusz SKAŁBA*

* Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Warszawski

Obrączka to okrąg $\mathcal{O}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Kiedy są dwie obrączki $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, możliwe są dwa przypadki: albo obrączki się przecinają, albo nie.

Nauczmy się najpierw rozstrzygać, z którym przypadkiem mamy do czynienia. W tym celu przypomnimy, jak opisać okrąg $\mathcal{O}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w ramach geometrii analitycznej. Każdy okrąg $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ można (na wiele sposobów) rozpatrywać jako przecięcie sfery z płaszczyzną. Dlatego poniższy układ równań z trzema niewiadomymi x, y, z :

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

opisuje właśnie okrąg, punkt albo zbiór pusty. Ten opis można uprościć, żądając, aby płaszczyzna przechodziła przez środek sfery, czyli by $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Wówczas punkt (x_0, y_0, z_0) jest środkiem obrączki, a $r > 0$ jej promieniem. Z takimi reprezentacjami okręgów w $\mathbb{R}^3$ będziemy dalej pracować.

Obrączki Jasia i Małgosi przecinają się dokładnie wtedy, gdy następujący układ równań nie jest sprzeczny:

$$\begin{cases} (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 = r_J^2 \\ A_J x + B_J y + C_J z = A_J x_J + B_J y_J + C_J z_J \\ A_M x + B_M y + C_M z = A_M x_M + B_M y_M + C_M z_M \\ (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r_M^2 \end{cases}$$

Z oczywistych powodów geometrycznych układ ten ma wówczas jedno lub dwa rozwiązania. Pominiemy uzasadnienie formalne, które nie jest ani trudne, ani ciekawe. Zajmiemy się natomiast skrupulatnie jednym z podprzypadków przypadku, gdy ten układ jest sprzeczny! Mianowicie chodzi nam o sytuację, gdy obrączki są zaręczone, a nie daleko-osobno od siebie. Rysunki na marginesie wyjaśniają wszystko – i szkoda, że życie nie jest takie proste.



Obrączki zaręczone



Obrączki daleko-osobno