

Przy okazji wspomnijmy, że 1729 to liczba Ramanujana, najmniejsza liczba naturalna, którą można przedstawić na dwa różne sposoby jako sumę dwóch sześciątów: $1729 = 12^3 + 1^3 = 10^3 + 9^3$.

W 1949 roku Feynman przez kilka miesięcy przebywał w Brazylii. Spotkał tam pewnego Japończyka (w Brazylii jest liczna diaspora japońska), który był pewien, że szybciej obliczy pierwiastek sześcienny, korzystając z japońskiego liczydła (*sorobanu*), niż Feynman w pamięci. Zaproponował obliczenie $\sqrt[3]{1729,03}$. Nie docenił wiedzy Feynmana.

Obliczenie $\sqrt[3]{1729,03}$. Feynman wiedział, że $\sqrt[3]{1+x} \approx 1 + \frac{1}{3}x$ dla małych wartości x . Wiedział również, że $12^3 = 1728$ (bo stopa to 12 cali, więc stopa sześcienna ma $1728 = 12^3$ cali sześciennych; to dla Amerykanów wiedza powszechna). Zatem

$$\begin{aligned}\sqrt[3]{1729,03} &= \sqrt[3]{1728} \cdot \sqrt[3]{1 + \frac{1,03}{1728}} \approx 12 \cdot \left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1,03}{1728}\right) \\ &= 12 + \frac{1,03}{3 \cdot 144} = 12 + \frac{1,03}{432},\end{aligned}$$

a oszacowanie ostatniego ułamka jest łatwe:

$$0,00206 = \frac{206}{100000} = \frac{103}{50000} < \frac{103}{43200} < \frac{100}{40000} = \frac{2500}{1000000} = 0,0025.$$

Stąd $\sqrt[3]{1729,03} \approx 12,002$.

Podczas pobytu w Los Alamos Feynman spotkał niezwykle ludzi. Chociaż sam – jak widać po przedstawionych wyżej rozumowaniach – był niezwykle biegły w rachunkach, przyznawał, że arcymistrzem obliczeń był Hans Bethe. Jednocześnie wspominał, że Paul Olum zawsze potrafił go zaskoczyć zadaniem rachunkowym, wobec którego był bez szans. *Ciekawych przypadków* Richarda Feynmana było bardzo wiele – tym, którzy nie czytali jeszcze tych fascynujących wspomnień, gorąco polecam ich lekturę.

Obrączki nierozłączki?

Mariusz SKAŁBA*

*Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Warszawski

Obrączka to okrąg $\mathcal{O}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Kiedy są dwie obrączki $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2$, możliwe są dwa przypadki: albo obrączki się przecinają, albo nie.

Nauczmy się najpierw rozstrzygać, z którym przypadkiem mamy do czynienia. W tym celu przypomnimy, jak opisać okrąg $\mathcal{O}$ w przestrzeni $\mathbb{R}^3$ w ramach geometrii analitycznej. Każdy okrąg $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ można (na wiele sposobów) rozpatrywać jako przecięcie sfery z płaszczyzną. Dlatego poniższy układ równań z trzema niewiadomymi x, y, z :

$$\begin{cases} (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

opisuje właśnie okrąg, punkt albo zbiór pusty. Ten opis można uprościć, żądając, aby płaszczyzna przechodziła przez środek sfery, czyli by $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$. Wówczas punkt (x_0, y_0, z_0) jest środkiem obrączki, a $r > 0$ jej promieniem. Z takimi reprezentacjami okręgów w $\mathbb{R}^3$ będziemy dalej pracować.

Obrączki Jasia i Małgosi przecinają się dokładnie wtedy, gdy następujący układ równań nie jest sprzeczny:

$$\begin{cases} (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 = r_J^2 \\ A_J x + B_J y + C_J z = A_J x_J + B_J y_J + C_J z_J \\ A_M x + B_M y + C_M z = A_M x_M + B_M y_M + C_M z_M \\ (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r_M^2. \end{cases}$$

Z oczywistych powodów geometrycznych układ ten ma wówczas jedno lub dwa rozwiązania. Pominiemy uzasadnienie formalne, które nie jest ani trudne, ani ciekawe. Zajmiemy się natomiast skrupulatnie jednym z podprzypadków przypadku, gdy ten układ jest sprzeczny! Mianowicie chodzi nam o sytuację, gdy obrączki są zaręczone, a nie daleko-osobno od siebie. Rysunki na marginesie wyjaśniają wszystko – i szkoda, że życie nie jest takie proste.



Obrączki zaręczone



Obrączki daleko-osobno

Pseudokod „różnowartościowego” algorytmu, który binarnej liście a o n jedynkach i n zerach przypisuje przetasowany kwadrat s długości $2n$ (patrz strona 7).

```
B ← [[], []] % dwie puste listy
s ← [] % docelowo: wynik
for i in 0, 2, ..., n-1:
    if B[0]=B[1]=[]:
        w ← a[i]
        dodaj w na koniec s
        dodaj w na koniec B[w]
    else:
        % w wskazuje niepustą listę
        if a[i]=w:
            dodaj 1-w na koniec s
            dodaj 1-w na koniec B[w]
        else:
            dodaj B[w][0] na koniec s
            usuń pierwszy element z B[w]
```

Najpierw scharakteryzujemy algebraicznie przypadek zapętlenia obrączek. Obrączka Jasia może przecinać płaszczyznę Małgosi w punktach (na ogół dwóch), które spełniają układ pierwszych trzech z powyższych równań:

$$\begin{cases} (x - x_J)^2 + (y - y_J)^2 + (z - z_J)^2 = r_J^2 \\ A_J x + B_J y + C_J z = A_J x_J + B_J y_J + C_J z_J \\ A_M x + B_M y + C_M z = A_M x_M + B_M y_M + C_M z_M. \end{cases}$$

Obrączki są zaręczone dokładnie wtedy, gdy obrączka Jasia przecina płaszczyznę obrączki Małgosi raz wewnątrz, a raz na zewnątrz jej obrączki. W takiej sytuacji istnieją dokładnie dwa rozwiązania $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$ powyższego układu równań, które spełniają układ nierówności:

$$\begin{cases} (x_1 - x_M)^2 + (y_1 - y_M)^2 + (z_1 - z_M)^2 < r_M^2 \\ (x_2 - x_M)^2 + (y_2 - y_M)^2 + (z_2 - z_M)^2 > r_M^2. \end{cases}$$

Lakonicznie (i, jak się za chwilę okaże, pożytecznie) można to zakodować za pomocą naprędce zdefiniowanej funkcji zależnej od położenia i rozmiaru obrączek:

$$E := ((x_1 - x_M)^2 + (y_1 - y_M)^2 + (z_1 - z_M)^2 - r_M^2) \cdot ((x_2 - x_M)^2 + (y_2 - y_M)^2 + (z_2 - z_M)^2 - r_M^2).$$

Powyższa wartość nie jest określona, gdy obrączka Jasia nie przecina płaszczyzny obrączki Małgosi – przyjmijmy, że wówczas $E = \infty$. Mamy zatem:

- $E < 0$, gdy obrączki są zaręczone;
- $E > 0$, gdy obrączki są daleko-osobne;
- $E = 0$, gdy obrączki przecinają się.

Założmy teraz, że mamy 16 funkcji ciągłych:

$$x_J(t), y_J(t), z_J(t), r_J(t), A_J(t), B_J(t), C_J(t), r_J(t), \\ x_M(t), y_M(t), z_M(t), r_M(t), A_M(t), B_M(t), C_M(t), r_M(t),$$

określonych na przedziale domkniętym $[0, 1]$ i takich, że dla każdego $t \in [0, 1]$ zachodzą nierówności $r_J(t) > 0$ oraz $r_M(t) > 0$. Ponadto przypuśćmy, że

$$E(0) < 0 \text{ oraz } E(1) > 0.$$

Rozpatrujemy więc ciągłą rodzinę par obrączek taką, że w chwili $t = 0$ są one zaręczone, a w chwili $t = 1$ odpłatane. Dla uproszczenia założmy, że $E(t) < \infty$ dla $t \in [0, 1]$.

Z własności Darboux funkcji ciągłych wynika teraz, że istnieje pośrednia chwila czasu $t_0 \in (0, 1)$ taka, że $E(t_0) = 0$, a zatem chwila, w której obrączki się przetną! Podsumowując: zaręczonych obrączek nie można rozłączyć bez sekatora do tombaku!

Natomiast dysponując przestrzenią $\mathbb{R}^4$ (ze współrzędnymi (x, y, z, w)), łatwo skonstruować ciągłą rodzinę par obrączek w ten sposób, że w chwili $t = 0$ mamy parę zaręczoną, a w chwili $t = 1$ parę daleko-osobną i w każdej pośredniej chwili obrączki nie przecinają się. Oto szczegóły dotyczące konkretnej sytuacji, gdy na początku mamy takie obrączki:

$$\mathcal{O}_J = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ \mathcal{O}_M = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 1)^2 + z^2 = 1/4\}.$$

(Obrączka Małgosi jest dwa razy węższa, co dla całej konstrukcji nie ma specjalnego znaczenia). W przestrzeni trójwymiarowej $w = 0$ są to obrączki zaręczone: płaszczyzna Jasia $z = 0$ przecina obrączkę Małgosi w punktach $(1/2, 0, 0)$ i $(3/2, 0, 0)$, z czego jeden leży „wewnątrz”, a drugi „na zewnątrz” obrączki Jasia. Przesuwamy obrączki tak, że po czasie $t \in (0, 3/4]$ zajmują następujące miejsca w $\mathbb{R}^4$:

$$\mathcal{O}_{J,t} = \{(x, y, 0, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ \mathcal{O}_{M,t} = \{(x, 0, z, -t) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 1 - t)^2 + z^2 = 1/4\}.$$

W chwili $t = 3/4$ obrączki znajdują się w następujących miejscach:

$$\mathcal{O}_{J,3/4} = \{(x, y, 0, 3/4) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\}, \\ \mathcal{O}_{M,3/4} = \{(x, 0, z, -3/4) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 7/4)^2 + z^2 = 1/4\},$$



Niniejszym chcę podziękować redaktorom Łukaszowi Rajkowskiemu i Michałowi Miśkiewiczowi za nieocenioną pomoc przy nierozłączaniu w $\mathbb{R}^3$ i rozplątywaniu w $\mathbb{R}^4$.

W obcięciu do pierwszych trzech współrzędnych są one rozsunięte: maksymalna wartość współrzędnej x dla pierwszej obrączki to 1, czyli mniej niż minimalna wartość współrzędnej x drugiej obrączki (czyli $5/4$). Niestety „żyją” one w równoległych rozłącznych trójwymiarowych podprzestrzeniach afinicznych $\{w = 3/4\}$ oraz $\{w = -3/4\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ale pozostały czas (ćwierć sekundy) wykorzystamy na sprowadzenie obrączek do tej samej podprzestrzeni trójwymiarowej, w której znajdowały się w chwili $t = 0$:

$$\mathcal{O}_{J,t} = \{(x, y, 0, 3 - 3t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\mathcal{O}_{M,t} = \{(x, 0, z, 3t - 3) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 7/4)^2 + z^2 = 1/4\}.$$

Rzeczywiście, gdy podstawimy w powyższych wzorach $t = 1$, to otrzymamy

$$\mathcal{O}_{J,1} = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\mathcal{O}_{M,1} = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 7/4)^2 + z^2 = 1/4\},$$

czyli obrączki rozłączone, i to „żyjące” w tej samej przestrzeni trójwymiarowej $w = 0$. Proszę zauważyć, że w każdej chwili obrączki są rozłączone, a więc udało nam się je rozplątać tylko przez bardzo delikatne (tzn. ciągłe) rozsuwanie!

Konstanty Ildefons Galczyński, *Deszcz*

I tak się trudno rozstać... I tak się łatwo rozstać... ($\mathbb{R}^3$ versus $\mathbb{R}^4$)...



Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1147. Ptaki różnią się wielkościami, ale geometrycznie ich kształty są bardzo podobne (różnią się skalą wielkości). Jak moc potrzebna ptakom do utrzymania prędkości lotu zależy od ich wielkości: masy m i rozmiarów l (długości)?

Wskazówka: zarówno siłę nośną skrzydeł, jak i siłę oporu powietrza podczas lotu z prędkością v opisuje wzór postaci:

$$F = \frac{1}{2} \rho C S v^2,$$

w którym ρ oznacza gęstość powietrza, S powierzchnię skrzydeł, a C jest współczynnikiem liczbowym: C_L dla siły nośnej i C_D dla siły oporu ($C_L \neq C_D$).

F 1148. Moc promieniowania elektromagnetycznego Słońca wynosi $L_0 = 3,828 \cdot 10^{26}$ W. Ciśnienie wywierane przez to promieniowanie działa przeciwnie do przyciągania grawitacyjnego i dla bardzo małych cząstek pyłu może doprowadzić do ich „wywiewania” z okolic Słońca. Dla cząstki pyłu obiegającej Słońce oddziaływanie z promieniowaniem Słońca spowalnia też jej ruch obiegowy. Kulista cząstka pyłu, dla której siła odpychająca promieniowania słonecznego wynosi $\alpha = 0,1$ jej przyciągania grawitacyjnego przez Słońce, w chwili początkowej porusza się po orbicie kołowej o promieniu $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ m (promień orbity Ziemi). Ile czasu minie, nim ta cząstka spadnie na Słońce?

Przygotował Dominik BUREK

M 1858. Na rysunku przedstawiono trójkąt podzielony na 25 mniejszych trójkątów, ponumerowanych liczbami od 1 do 25. Czy można te same liczby rozmieścić na polach kwadratowej planszy 5×5 w taki sposób, aby dowolne dwie liczby zapisane w sąsiednich trójkątach były również zapisane w sąsiednich kwadratowych polach? (Trójkąty, podobnie jak kwadraty, uważa się za sąsiednie, jeżeli mają wspólny bok).

M 1859. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$. Okręgi o średnicach AB oraz CD przecinają się w punktach P i Q . Udowodnić, że $2PQ < AD$.

M 1860. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia k o następującej własności: dla każdego wielomianu $f(x)$ stopnia 2026 o współczynnikach rzeczywistych istnieje taki wielomian $g(x)$ stopnia co najwyżej k , również o współczynnikach rzeczywistych, że wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ mają dokładnie 2026 punktów wspólnych?

