



Bartłomiej PAWLIK

Politechnika Śląska

Mój syn miał dużo szczęścia, że nie wiedziałem o istnieniu tego imienia, gdy przychodził na świat.

Miłość niejedno ma imię, a *kwadrat* niejedno ma znaczenie. Kwadratami są pewne figury płaskie (choćby ta: $\square$), ale też niektóre liczby, na przykład 289. Kwadrat to także męskie imię w tradycji chrześcijańskiej – był nawet św. Kwadrat, zwany Apologetą. Wreszcie kwadratem może być słowo, np. TATA, DZIADZIA...

A czym jest słowo? Słowo to ciąg znaków pochodzących z ustalonego zbioru, zwanego alfabetem. Dla każdego skończonego słowa $W = w_1 w_2 \dots w_n$ kwadratem jest słowo $WW = w_1 w_2 \dots w_n w_1 w_2 \dots w_n$. Zatem kwadrat można uzyskać, łącząc ze sobą dwie kopie pewnego słowa. Przetasowany kwadrat uzyskamy natomiast, gdy te kopie ze sobą „przetasujemy”: Słowo $S = s_1 s_2 \dots s_{2n}$ nazywamy *przetasowanym kwadratem*, jeżeli istnieją takie rozłączne zbiory indeksów $I = \{i_1, i_2, \dots, i_n\}$ i $J = \{j_1, j_2, \dots, j_n\}$, że $i_1 < i_2 < \dots < i_n$, $j_1 < j_2 < \dots < j_n$ oraz dla każdego $1 \leq r \leq n$ zachodzi $s_{i_r} = s_{j_r}$. W myśl tej definicji dwiema „tasowanymi” kopiami tego samego słowa są $S_1 = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_n}$ oraz $S_2 = s_{j_1} s_{j_2} \dots s_{j_n}$.

Przykładowym przetasowanym kwadratem jest słowo 01001000 – wystarczy przyjąć $I = \{1, 2, 3, 6\}$ oraz $J = \{4, 5, 7, 8\}$. Bezpośrednie użycie definicji jest – jak widać – nieporęczne. Na szczęście istnieją wygodniejsze sposoby reprezentacji faktu, że słowo jest przetasowanym kwadratem: chociażby poprzez podkreślanie liter o indeksach ze zbioru I i nadkreślanie liter o indeksach ze zbioru J w słowie S :

01001000.

Oczywiście nie jest prawdą, że przetasowanym kwadratem jest każdy *tangram* (słowo zawierające parzystą liczbę wystąpień każdej litery z danego alfabetu): świadczy o tym chociażby 0110. W zbiorze wszystkich 256 słów binarnych długości 8 dokładnie 82

to przetasowane kwadraty. Ogólnie rzecz biorąc, liczba binarnych przetasowanych kwadratów długości $2n$, poczynawszy od $n = 1$, układa się w ciąg 2, 6, 22, 82, 320, 1268, 5102, 20632, 83972, 342468,...

W encyklopedii OEIS ciąg ten ma numer A191755.

Jak wygląda wzór ogólny tego ciągu? Nie wiadomo, choć są na świecie ludzie, którzy chcieliby go poznać. Zdaje się, że to karkołomne zadanie – zwłaszcza że określenie, czy dane słowo (nawet binarne!) jest przetasowanym kwadratem, jest problemem NP-zupełnym.

Z drugiej strony od całkiem niedawna wiemy, że każdy odpowiednio długi binarny tangram prawie na pewno jest przetasowanym kwadratem. „Prawie na pewno” oznacza tutaj, że prawdopodobieństwo, że losowo wybrany binarny tangram jest przetasowanym kwadratem, dąży do 1 przy $n \rightarrow \infty$.

Autorami dowodu datowanego na grudzień 2025 są Xiaoyu He i Logan Post z Georgia Institute of Technology w Atlancie.

Powyższy wynik nie jest trywialny, ale względnie łatwo można wykazać, że liczba binarnych przetasowanych kwadratów długości $2n$ jest nie mniejsza niż $\binom{2n}{n}$. Polecamy Czytelnikom próbę znalezienia algorytmu, który różnym ciągom binarnym o n jedynkach i n zerach (tych jest właśnie $\binom{2n}{n}$) przypisuje różne przetasowane kwadraty długości $2n$ (przykład na stronie 3).

Człowiek o AI (7)

* ulam.ai

Terence Tao, problemy Erdősa i AI

Przemysław CHOJECKI*

Thomas Bloom to brytyjski matematyk, który od kilku lat prowadzi stronę erdosproblems.com. Paul Erdős zostawił po sobie ponad tysiąc problemów – głównie z teorii liczb i kombinatoryki – z których wiele do dzisiaj pozostaje nierozwiązanych. Bloom stara się zebrać je wszystkie i skatalogować.

Pod koniec grudnia 2025 roku na stronie Blooma zaczął panować ruch większy niż zwykle. Nowe wpisy, nowe podejścia do starych problemów, pierwsze udane ataki na problemy, którymi nikt nie zajmował się od 50 lat. Powód? Pojawienie się GPT-5.2 od OpenAI w publicznym dostępie.

Terence Tao jest jednym z najbardziej znanych matematyków na świecie. Medalista Fieldsa, nieustrudzony edukator, który prowadzi poczytny blog, ma na swoim koncie liczne wykłady na świecie i skupia wokół siebie dziesiątki współpracowników. Ostatnio znalazł sobie nowe hobby – AI. Dawniej sceptyk – zachowały się jego wypowiedzi, w których wątpi w szeroką użyteczność sztucznej

Lean to język programowania i asystent dowodzenia, w którym można zapisywać twierdzenia matematyczne i ich dowody w sposób zrozumiały dla komputera. Program weryfikuje każdy krok rozumowania, dzięki czemu raz sformalizowany dowód jest pewny – nie ma w nim luk ani błędów, które mogą umknąć ludzkiemu recenzentowi.

LLM (ang. *large language model*) – model uczenia maszynowego trenowany na bardzo dużych zbiorach tekstów, który uczy się przewidywać kolejne słowa w zdaniu, typowo z wykorzystaniem architektury transformera. W praktyce pozwala to na generowanie spójnych odpowiedzi, często brzmiących jak napisane przez człowieka, a także na analizę i przetwarzanie tekstu oraz pracę z kodem. Przykładem LLM jest rodzina modeli GPT omawiana w tekście.

Pełne rozwiązanie można zobaczyć pod adresem www.ulam.ai/research/erdos1148-full.pdf, a dyskusję tu: www.erdosproblems.com/1148.

O rozstrzygnięciu przez sztuczną inteligencję bardzo znanej hipotezy Erősa, które zostało ogłoszone już po wstępnym złożeniu niniejszego wydania *Delty*, piszemy na stronie 16 (przyp. red.)

Niemniej to, do czego już są zdolne, sprawia, że praca matematyka (a także naukowiec z dowolnej dziedziny) znacząco przyspiesza. AI jest w stanie bardzo dokładnie przeszukać literaturę, zaprojektować eksperymenty na wybranych przykładach, zaproponować strategię dowodowe i niektóre samemu przeprowadzić.

Dlatego zachęcam każdego matematyka i pasjonata do spróbowania GPT-5.4 Extended Thinking (koniecznie Extended Thinking): wystarczy zacząć od załadowania modelu swojej ostatniej pracy i poproszenia o możliwe kontynuacje i rozwinięcie tematu, by zobaczyć, do czego jest zdolny.

Praca matematyka w najbliższych latach mocno się zmieni. Odpowiedź na pytanie *jak* to już temat na osobny artykuł. Innym ważnym wątkiem jest też formalizacja matematyki w Lean. Dziedzina, która jeszcze niedawno była niewielką niszą, jest obecnie jedną z najszybciej rozwijających się gałęzi matematyki.

inteligencji – obecnie realista-eksperymentator. Dopiero co nagrał na YouTube film (youtu.be/JHE07cp1fk8?si=TRjhuae2bfEyg4ce) o tym, jak używa Claude Code do formalizacji swojego dowodu w Lean.

Tao jest też jednym z najbardziej aktywnych użytkowników forum Blooma. Jego wpisy pojawiają się prawie codziennie, często odpowiada, komentuje, uzupełnia kontekst, identyfikuje trudności w problemach. To dzięki niemu kilka problemów Erdősa zostało rozwiązanych za pomocą AI.

Co się zmieniło z nadejściem GPT-5.2?

Rozumowanie. Przeskok pomiędzy tym a poprzednimi modelami z mojej perspektywy jest większy niż jakakolwiek zmiana, która dokonała się wcześniej. Wydłużył się kontekst i okienko rozumowania. Oznacza to, że model może przyjąć więcej danych i dłużej się nad nimi zastanawiać – rozumowania w wersji Pro Extended Thinking potrafią trwać nawet 80–90 minut na jedno zapytanie.

Dzięki temu postępowi komentarz Tao, który zarysowuje strategię ataku na problem, można użyć jako prompt do GPT-5.2 (a obecnie 5.4), który prowadzi bezpośrednio do gotowej pracy. Takich przykładów, *prompt* $\leadsto$ *gotowa praca matematyczna*, było już kilka.

LLM-y są w stanie też radzić sobie bez komentarzy medalistów Fieldsa. Sam jestem częstym bywalcem forum i dzięki GPT-5.2 oraz GPT-5.4, a także procesowi, który trwał dwa miesiące, rozwiązałem problem Erdősa nr 1148. Problem ten ma elementarne sformułowanie: czy każda duża liczba całkowita n daje się przedstawić (dla pewnych całkowitych x, y, z) w postaci $n = x^2 + y^2 - z^2$ z warunkiem $\max(x^2, y^2, z^2) \leq n$?

Rozwiązanie jednak elementarne nie jest i wykorzystuje twierdzenie Duke’a o dystrybucji punktów na hiperboloidach. W znalezieniu go pomogła mi wiedza z teorii liczb, dzięki czemu proces przypominał prowadzenie doktoranta do rozwiązania. Mimo to GPT-5.2 nie był w stanie ukończyć problemu, za to GPT-5.4 niemal od razu zobaczył poprawne rozwiązanie na bazie poprzednich notatek.

AI jako matematyk

AI oczywiście jeszcze nie jest w pełni autonomicznym matematykiem – ale jest to kierunek, którym się zajmuję w ramach mojej działalności zawodowej, jak również zajmuje się tym kilka firm na świecie: Axiom, Math Inc., Harmonic. LLM-y są znakomite w wyszukiwaniu literatury przedmiotu i stosowaniu rozumowań, które są już dostępne w innych kontekstach, ale w tej samej dziedzinie. Za to absolutnie nie są jeszcze zdolne do budowania nowych definicji i teorii ani do brania inspiracji z innych dziedzin (chyba że zostały do tego popchnięte promptami *explicite*).

W końcu chcemy mieć możliwość weryfikacji, że dowody, które produkują agenci AI, są poprawne.

Tutaj największy przełom dokonał się niedawno, w 2026 roku. Firma Math Inc zbudowała bowiem *Gaussa* – agenta AI, który, działając nieprzerwanie przez 2 tygodnie (bazując na dodatkowej współpracy z ludźmi), sformalizował dowody Maryny Wiazowskiej problemu upakowania sfer, za które otrzymała medal Fieldsa. Formalizacja zajęła 200 000 linii kodu w Lean.

Wkraczamy na nowe, nieznane terytorium w prowadzeniu badań, w tym matematycznych. AI obiecuje demokratyzację „inteligencji”, a co za tym idzie, przyspieszenie generowania pomysłów, dowodów, twierdzeń. Jest jeszcze wiele do zrobienia, ale rzeczywistość matematyka zmieniła się w grudniu 2025 roku. Jestem optymistą i wierzę, że zmiana ta jest tylko na lepsze.