

Niniejszym chcę podziękować redaktorom Łukaszowi Rajkowskiemu i Michałowi Miśkiewiczowi za nieocenioną pomoc przy nierozłączaniu w $\mathbb{R}^3$ i rozplątywaniu w $\mathbb{R}^4$.

W obcięciu do pierwszych trzech współrzędnych są one rozsunięte: maksymalna wartość współrzędnej x dla pierwszej obrączki to 1, czyli mniej niż minimalna wartość współrzędnej x drugiej obrączki (czyli $5/4$). Niestety „żyją” one w równoległych rozłącznych trójwymiarowych podprzestrzeniach afinicznych $\{w = 3/4\}$ oraz $\{w = -3/4\}$ przestrzeni $\mathbb{R}^4$. Ale pozostały czas (ćwierć sekundy) wykorzystamy na sprowadzenie obrączek do tej samej podprzestrzeni trójwymiarowej, w której znajdowały się w chwili $t = 0$:

$$\mathcal{O}_{J,t} = \{(x, y, 0, 3 - 3t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\mathcal{O}_{M,t} = \{(x, 0, z, 3t - 3) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 7/4)^2 + z^2 = 1/4\}.$$

Rzeczywiście, gdy podstawimy w powyższych wzorach $t = 1$, to otrzymamy

$$\mathcal{O}_{J,1} = \{(x, y, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2 + y^2 = 1\},$$

$$\mathcal{O}_{M,1} = \{(x, 0, z, 0) \in \mathbb{R}^4 \mid (x - 7/4)^2 + z^2 = 1/4\},$$

czyli obrączki rozłączone, i to „żyjące” w tej samej przestrzeni trójwymiarowej $w = 0$. Proszę zauważyć, że w każdej chwili obrączki są rozłączne, a więc udało nam się je rozplątać tylko przez bardzo delikatne (tzn. ciągłe) rozsuwanie!

Konstanty Ildefons Galczyński, *Deszcz*

I tak się trudno rozstać... I tak się łatwo rozstać... ($\mathbb{R}^3$ versus $\mathbb{R}^4$)...



Zadania

Rozwiązania na str. 24

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1147. Ptaki różnią się wielkościami, ale geometrycznie ich kształty są bardzo podobne (różnią się skalą wielkości). Jak moc potrzebna ptakom do utrzymania prędkości lotu zależy od ich wielkości: masy m i rozmiarów l (długości)?

Wskazówka: zarówno siłę nośną skrzydeł, jak i siłę oporu powietrza podczas lotu z prędkością v opisuje wzór postaci:

$$F = \frac{1}{2} \rho C S v^2,$$

w którym ρ oznacza gęstość powietrza, S powierzchnię skrzydeł, a C jest współczynnikiem liczbowym: C_L dla siły nośnej i C_D dla siły oporu ($C_L \neq C_D$).

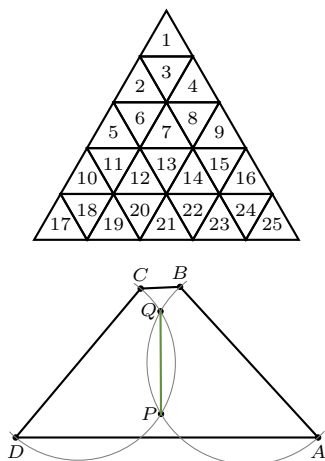
F 1148. Moc promieniowania elektromagnetycznego Słońca wynosi $L_0 = 3,828 \cdot 10^{26}$ W. Ciśnienie wywierane przez to promieniowanie działa przeciwnie do przyciągania grawitacyjnego i dla bardzo małych cząstek pyłu może doprowadzić do ich „wywiewania” z okolic Słońca. Dla cząstki pyłu obiegającej Słońce oddziaływanie z promieniowaniem Słońca spowalnia też jej ruch obiegowy. Kulista cząstka pyłu, dla której siła odpychająca promieniowania słonecznego wynosi $\alpha = 0,1$ jej przyciągania grawitacyjnego przez Słońce, w chwili początkowej porusza się po orbicie kołowej o promieniu $R_0 = 1,5 \cdot 10^{11}$ m (promień orbity Ziemi). Ile czasu minie, nim ta cząstka spadnie na Słońce?

Przygotował Dominik BUREK

M 1858. Na rysunku przedstawiono trójkąt podzielony na 25 mniejszych trójkątów, ponumerowanych liczbami od 1 do 25. Czy można te same liczby rozmieścić na polach kwadratowej planszy 5×5 w taki sposób, aby dowolne dwie liczby zapisane w sąsiednich trójkątach były również zapisane w sąsiednich kwadratowych polach? (Trójkąty, podobnie jak kwadraty, uważa się za sąsiednie, jeżeli mają wspólny bok).

M 1859. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wypukłym takim, że $\sphericalangle ABD = \sphericalangle ACD = 90^\circ$. Okręgi o średnicach AB oraz CD przecinają się w punktach P i Q . Udowodnić, że $2PQ < AD$.

M 1860. Jaka jest najmniejsza liczba całkowita dodatnia k o następującej własności: dla każdego wielomianu $f(x)$ stopnia 2026 o współczynnikach rzeczywistych istnieje taki wielomian $g(x)$ stopnia co najwyżej k , również o współczynnikach rzeczywistych, że wykresy funkcji $f(x)$ oraz $g(x)$ mają dokładnie 2026 punktów wspólnych?



Rozwiązania zadań ze strony 4



Rozwiązanie zadania F 1147.

Podczas lotu siła nośna musi równoważyć ciężar ptaka o masie m w polu ciężkości g :

$$mg = \frac{1}{2} \rho C_L S v^2.$$

Niech l oznacza długość charakteryzującą wielkość ptaka. Mamy: $m \propto l^3$, $S \propto l^2$, a więc $v \propto l^{1/2} \propto m^{1/6}$. Moc P potrzebna do pokonania siły oporu F wynosi:

$$P = F \cdot v = \frac{1}{2} \rho C_D S v^2 \cdot v.$$

Po podstawieniu do ostatniego wzoru uzyskanych wcześniej zależności otrzymujemy: $P \propto l^{7/2} \propto m^{7/6}$.



Rozwiązanie zadania F 1148.

Foton pęd p równy jego energii E podzielonej przez prędkość światła c , tj. $p = E/c$. Strumień pędu S promieniowania elektromagnetycznego w odległości R od Słońca wynosi więc:

$$S = \frac{L_0}{4\pi c R^2}.$$

Na potrzeby oszacowania przyjmijmy, że cała energia padająca na cząstkę pyłu jest przez nią pochłaniana, a następnie wypromieniowywana izotropowo. Przy tym założeniu siła odpychająca F wywierana przez to promieniowanie na kulistą cząstkę o promieniu r wynosi:

$$F = \pi r^2 S = \frac{L_0 r^2}{4c R^2}.$$

Siła F_G grawitacyjnego przyciągania cząstki o masie m przez Słońce o masie M wynosi:

$$F_G = -\frac{GMm}{R^2}.$$

W ostatnim wzorze G oznacza stałą grawitacji. Siły F i F_G są odwrotnie proporcjonalne do kwadratu odległości R od Słońca. Tym samym ich stosunek nie zależy od R . Oznacza to, że na cząstkę pyłu działa „efektywna siła grawitacji” postaci $(1 - \alpha)F_G$.

Dla cząstki poruszającej się po orbicie kołowej z prędkością v strumień pędu promieniowania słonecznego „nadbiega” pod kątem, a związany z tym faktem przekaz pędu jest źródłem siły hamującej równej $Fv/c = \alpha F_G v/c$. Ze względu na bardzo małą wartość v/c – stosunku prędkości orbitalnej do prędkości światła – cząstka, która początkowo porusza się po orbicie kołowej, w każdej późniejszej chwili porusza się także po torze bardzo bliskim orbicie kołowej (o bardzo wolno malejącym promieniu). Na skutek działania siły Fv/c cząstka traci energię w tempie $Fv^2/c = \alpha v^2 F_G/c$. Energia całkowita cząstki w polu siły $(1 - \alpha)F_G$ wynosi:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{(1 - \alpha)GMm}{R} = -\frac{(1 - \alpha)GMm}{2R}.$$

W ostatniej równości uwzględniliśmy fakt, że na orbicie kołowej $v^2 = (1 - \alpha)GM/R$.

Otrzymujemy zależność:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{(1 - \alpha)GMm}{2R^2} \frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha GMm}{cR^2} \frac{(1 - \alpha)GM}{R},$$

czyli:

$$\frac{dR}{dt} = -\frac{\alpha GM}{R} \Rightarrow \frac{dR^2}{dt} = -4\alpha GM.$$

Po scałkowaniu lewej strony od początkowej wartości R_0^2 do 0, a prawej od 0 do t – czasu spadku na Słońce, otrzymujemy:

$$R_0^2 = \frac{4\alpha GMt}{c}.$$

Skorzystajmy ze związku zawierającego rok ziemski T : $GM/R_0^2 = 4\pi^2 R_0/T^2$. Otrzymamy wówczas:

$$t = \frac{cT^2}{16\pi^2 \alpha R_0} = 3,99 \cdot 10^3 T,$$

czyli około 4 tysiące lat.

Warunki zadania ($\alpha = 0,1$) spełnia cząstka piasku o gęstości $\rho = 2,65 \text{ g/cm}^3$ i średnicy $d \approx 4,3 \cdot 10^{-6} \text{ m}$.

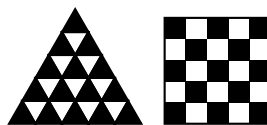
Przedstawione tu zjawisko to tzw. efekt Poyntinga–Robertsona.



Rozwiązanie zadania M 1858.

Odpowiedź jest negatywna.

Przypuśćmy, że jest inaczej i że udało nam się wpisać liczby od 1 do 25 w pola kwadratu w sposób spełniający warunki zadania. Pokolorujmy trójkąty oraz pola kwadratu naprzemiennie na czarno i białe, jak na rysunku.



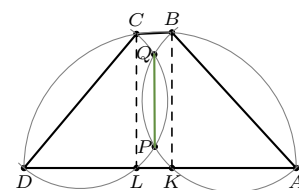
Zauważmy, że z dowolnego trójkąta można przejść do każdego innego, przy czym w łańcuchu trójkątów tworzących tę drogę każde dwa sąsiednie trójkąty mają różne kolory.

Z założeń wynika, że kolejne liczby z tego łańcucha tworzą również łańcuch na kwadratowej planszy, którego każde dwa kolejne pola są różnokolorowe. Wynika stąd, że dowolne dwie liczby zapisane w trójkątach tego samego koloru muszą być zapisane w kwadratowych polach tego samego koloru.

W danym trójkącie znajduje się 15 czarnych oraz 10 białych trójkątów. Natomiast w kwadracie 5×5 znajduje się 13 czarnych oraz 12 białych pól. Ponieważ liczba czarnych trójkątów jest większa niż liczba pól dowolnego koloru w kwadracie, nie jest możliwe spełnienie warunku zadania.



Rozwiązanie zadania M 1859.



Niech K i L będą rzutami prostokątnymi punktów B i C na prostą AD . Wówczas okręgi o średnicach AB i CD przechodzą odpowiednio przez punkty K i L , a ich punkty wspólne P , Q leżą na łukach BK i CL . Ponieważ $\angle BAK < 90^\circ$, otrzymujemy $PQ \leq BK$. Ponadto punkt B

leży na półokręgu o średnicy AD , i dlatego $BK \leq \frac{AD}{2}$, co kończy dowód. Obie przedstawione nierówności stają się równościami tylko wtedy, gdy punkty B i C leżą w środku łuku AD .



Rozwiązanie zadania M 1860.

Odpowiedź: $k = 2024$.

Niech $n \geq 2$ będzie dowolną liczbą naturalną. Pokażemy, że dla dowolnego wielomianu f stopnia n istnieje wielomian g stopnia co najwyżej $n - 2$, którego wykres przecina wykres f w dokładnie n punktach. Mnożenie wielomianu f przez niezerową stałą nie zmienia liczby punktów przecięcia wykresów (analogicznie można przeskalować g), dlatego bez straty ogólności możemy przyjąć, że

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_n.$$

Wyberzmy dowolnie n parami różnych liczb rzeczywistych $x_1, \dots, x_n$, które spełniają warunek

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = -a_1.$$

Zdefiniujmy

$$h(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n) \quad \text{oraz} \quad g(x) = f(x) - h(x).$$

Wielomiany f i h mają ten sam współczynnik przy x^n oraz przy x^{n-1} , zatem stopień wielomianu $g = f - h$ nie przekracza $n - 2$. Ponadto punkty wspólne wykresów f i g są dokładnie pierwiastkami wielomianu h , czyli jest ich dokładnie n .

Pokażemy teraz, że stopień $k \leq n - 3$ nie wystarcza. Niech $f(x) = x^n$, a $g(x)$ będzie dowolnym wielomianem stopnia co najwyżej $n - 3$. Załóżmy, że wykresy f i g przecinają się w n punktach o parami różnych odciętych $x_1, \dots, x_n$. Wówczas wielomian $f - g$ stopnia n ma n rzeczywistych pierwiastków.

Zauważmy jednak, że w wielomianie $f - g$ współczynniki przy x^{n-1} oraz x^{n-2} są równe zero. Z twierdzenia Viète'a otrzymujemy

$$x_1 + \dots + x_n = 0 \quad \text{oraz} \quad \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j = 0.$$

Stąd

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 = (x_1 + \dots + x_n)^2 - 2 \sum_{i < j} x_i x_j = 0,$$

co implikuje $x_1 = \dots = x_n = 0$, w sprzeczności z założeniem, że liczby x_i są parami różne.