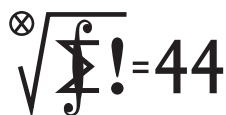


Klub 44 M



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
913 ($WT = 2,37$) i 914 ($WT = 2,28$)
z numeru 1/2026

Roksana Słowik	42,93
Krzysztof Kamiński	41,33
Marian Łupieżowiec	40,52
Jędrzej Biedrzycki	39,60
Janusz Olszewski	37,74
Janusz Fiett	37,18
Łukasz Merta	31,54
Tomasz Wietecha	31,43
Piotr Kumor	30,85
Paweł Kubit	29,64

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2026

Przypominamy treść zadań:

919. W trzech pojemnikach rozmieszczone są fasolki (skończenie wiele). Wykonujemy ciąg ruchów. W jednym ruchu wybieramy dwa pojemniki; zawartość tego, w którym jest mniej fasolek podwajamy, przesyłając odpowiednią ilość fasolek z tego, w którym jest więcej (gdy jest po równo, wybór jest dowolny). Udowodnić, że niezależnie od rozmieszczenia początkowego można – iterując to postępowanie – opróżnić jeden z pojemników.

920. Niech $r(u, v) = \frac{1}{2}(u + v) - (uv)^{1/2}$ dla $u, v \geq 0$. Dowieść, że dla każdej trójki liczb rzeczywistych $a, b, c \geq 0$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq 2 \cdot \max\{r(a, b), r(b, c), r(c, a)\}.$$

919. Załóżmy, że w pewnym momencie w pojemnikach A, B, C znajduje się, odpowiednio, a fasolek, b fasolek, c fasolek, przy czym $a \geq b \geq c$. Dzielimy b przez c (z resztą): $b = qc + r$ ($0 \leq r < c$). Zapisujemy q w postaci binarnej: $q = k_0 + 2k_1 + \dots + 2^nk_n$, gdzie $k_i \in \{0, 1\}$, $k_n = 1$. Wykonujemy serię n ruchów, w których wysypujemy do pojemnika C kolejno $c, 2c, 4c, \dots, 2^nc$ fasolek, pobierając je z pojemników A, B według zasady:

jeśli $k_i = 0$, bierzemy $2^i c$ fasolek z A ;

jeśli $k_i = 1$, bierzemy $2^i c$ fasolek z B

($i = 0, \dots, n$). Łącznie z pojemnika A wyprowadzamy w ten sposób nie więcej niż $c + 2c + 4c + \dots + 2^{n-1}c$, czyli mniej niż 2^nc fasolek; a ponieważ $2^nc \leq qc \leq b \leq a$, znaczy to, że zawartość pojemnika A była wystarczająca dla wykonania opisanej procedury.

Z pojemnika B fasolki były brane przy napotykanu jedynek w rozwinięciu q . Łącznie wyszło stamtąd dokładnie qc fasolek. Zostało ich r , czyli mniej niż c (możliwe, że w A zostało jeszcze mniej).

Tak więc moc zawartości najslabiej wypełnionego pojemnika zmalała; wielkość ta jest pólnieziennikiem opisanej procedury. Powtarzając procedurę, doprowadzamy tę wartość do zera.

920. Przyjmijmy (b.s.o.), że $a \leq b \leq c$. Ponieważ $r(u, v) = \frac{1}{2}(u^{1/2} - v^{1/2})^2$, zatem największą z trzech liczb w nawiasie po prawej stronie podanej nierówności jest $r(c, a)$. Zadanie sprowadza się do wykazania, że

$$(1) \quad \frac{1}{3}(a + b + c) - (abc)^{1/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2}.$$

Jest to prawda, gdy $a = b = c$ lub gdy $a = 0$; dalej przyjmujemy $c > a > 0$.

Ustalmy a, c i potraktujmy $b \in [a, c]$ jako zmienną. Pochodna wyrażenia po lewej stronie (1) (względem b), równa $\frac{1}{3}(1 - (ac)^{1/3}b^{-2/3})$, jest funkcją rosnącą zmiennej b , co oznacza, że samo to wyrażenie jest funkcją wypukłą tej zmiennej. Osiąga zatem wartość największą, gdy $b = a$ lub $b = c$. Należy więc wykazać, że

$$(2) \quad \begin{aligned} &\frac{1}{3}(2a + c) - a^{2/3}c^{1/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2} \\ &\text{ i } \frac{1}{3}(a + 2c) - a^{1/3}c^{2/3} \leq a + c - 2(ac)^{1/2}. \end{aligned}$$

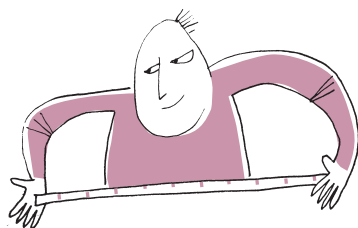
Dalej nie będziemy korzystać z tego, że $a \leq c$. Wobec uzyskanej w ten sposób symetrii wystarczy zająć się jedną z tych nierówności, na przykład tą drugą. Przepiszmy ją w postaci

$$(3) \quad \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) + a^{1/3}c^{2/3} \geq 2(ac)^{1/2}.$$

Korzystając najpierw z nierówności między średnimi ważonymi (A i G) o wykładnikach $\frac{2}{3}, \frac{1}{3}$, a następnie z nierówności między zwykłymi średnimi (A i G), dostajemy to, o co chodzi:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}c\right) + a^{1/3}c^{2/3} &\geq a^{2/3}c^{1/3} + a^{1/3}c^{2/3} \\ &\geq 2(a^{2/3}c^{1/3} \cdot a^{1/3}c^{2/3})^{1/2} = 2(ac)^{1/2}. \end{aligned}$$

Wykazana została nierówność (3), więc i jedna z (symetrycznych) nierówności (2), więc i nierówność (1) – więc i teza zadania.



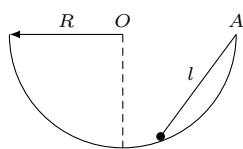
Klub 44 F



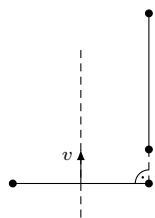
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
810 ($WT = 3,1$), 811 ($WT = 2,27$)
z numeru 1/2026

Paweł Perkowski Ożarów Maz. 7-44+2,44
Andrzej Nowogrodzki

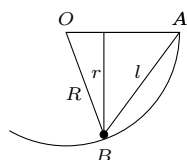
Chocianów	3-36,90
Tomasz Wietecha Tarnów	18-35,76
Krzysztof Zygan Lubin	34,85
Marian Łupieżowiec	
Gliwice	3-22,96
Paweł Kubit Kraków	22,44



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

Rozwiązania zadań z numeru 4/2026

Przypominamy treść zadań:

816. Wahadło matematyczne o długości l przyłączone jest w punkcie A z wewnętrznej strony doskonale gładkiej półsfery o promieniu R (rys. 1). Punkt A znajduje się na okręgu o promieniu R , oś symetrii półsfery jest pionowa. Zakładamy, że $l < R\sqrt{2}$. Znaleźć częstość małych drgań wahadła po wewnętrznej powierzchni półsfery.

817. Na gładkiej poziomej płaszczyźnie znajdują się dwa jednakowe hantle, przedstawione na rysunku 2. Każdy z nich składa się z cienkiego nieważkiego pręta o długości l , do którego końców przymocowane są jednakowe masywne kulki o zaniedbywalnych rozmiarach. Jeden z hantli spoczywa, drugi porusza się ruchem postępowym z prędkością v , skierowaną równoległe do hantla spoczywającego. Z jaką prędkością zacznie poruszać się nieruchomy hantel po zderzeniu sprężystym?

816. Ciężarek wahadła porusza się podczas drgań po łuku okręgu o promieniu r , leżącego w płaszczyźnie prostopadłej do wielkiego okręgu półsfery. Z rysunku 3 widać, że

$$r = l\sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2}}.$$

Wahadło na półsfery jest równoważne zwykłemu wahadłu o długości nici r . Stąd jego częstotliwość małych drgań wynosi:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l\sqrt{1 - \frac{l^2}{4R^2}}}}.$$

Dla $l = \sqrt{2}R$, $\omega = \sqrt{g/R}$. Jest to częstość małych drgań swobodnych ciała na dnie półsfery. Gdy $l \ll R$, $\omega = \sqrt{g/l}$. Element powierzchni, na której zachodzą drgania, wyraża się w pionową płaszczyznę.

817. Po zderzeniu hantle nieruchomy zaczyna poruszać się ruchem postępowym z prędkością v_2 , ruch drugiego hantla jest złożeniem ruchu postępowego jego środka masy z prędkością v_1 oraz ruchu obrotowego względem środka masy z prędkością kątową ω . Zderzenie jest sprężyste, co oznacza, że energia kinetyczna układu zachowuje się:

$$\frac{2mv^2}{2} = \frac{2mv_2^2}{2} + \frac{2mv_1^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2},$$

gdzie m jest masą kulki,

$$I = \frac{2ml^2}{4} = m\frac{l^2}{2}$$

momentem bezwładności hantla względem jego środka masy, stąd

$$(1) \quad v^2 = v_2^2 + v_1^2 + l^2\frac{\omega^2}{2}.$$

Na układ w płaszczyźnie poziomej nie działają z zewnątrz żadne siły, obowiązują więc zasada zachowania pędu układu:

$$(2) \quad v = v_1 + v_2.$$

Możemy też skorzystać z zasady zachowania momentu pędu względem dowolnego punktu na płaszczyźnie, najwygodniej względem punktu O , gdzie znajduje się środek hantla poruszającego się w chwili zderzenia:

$$(3) \quad 0 = 2mv_2\frac{l}{2} - I\omega.$$

Rozwiązując układ równań (1)–(3), otrzymujemy szukany wynik:

$$v_2 = \frac{2v}{3}.$$

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązanie tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.