

Kształt i opór, część 1/4: kula, walec, stożek ścięty

* Kontakt: gornicki59@gmail.com



Portret Isaaca Newtona (G. Kneller, 1689) ze zbiorów *The Isaac Newton Institute for Mathematical Sciences, University of Cambridge*. Newton osiwił w wieku 30 lat, ale do końca życia zachował długie, gęste, faliste włosy. Nigdy nie nosił peruki, jak to było wówczas w modzie

Jarosław GÓRNICKI*

W filmie *Die another day* z 2002 roku (polski tytuł *Śmierć nadejdzie jutro*) agent 007 dostaje od Q samochód, który może być niewidzialny. Czy istnieją rzeczy niewidzialne wykonane z nieprzezroczystego materiału, przez które można widzieć bez zniekształceń? Zauważmy, że „niewidzialność” to pojęcie niejednoznaczne. Technologia *stealth* pozwala samolotowi być niewidzialnym dla radaru. Pochłania on fale radiowe emitowane przez radar i ich nie odbija, ale my ten samolot widzimy. Ustalmy zatem, że obiekt niewidzialny to taki, który jest niewidzialny dla ludzkiego oka, w ramach optyki geometrycznej. Pokażemy, że niewidzialność dla ludzkiego oka jest możliwa! Uzyskamy to dzięki geometrii powierzchni; własność materiału nie ma z tym nic wspólnego. Zanim o tym powiemy, poznamy zaskakujące odkrycia Newtona dotyczące... oporu ośrodka.

Isaac Newton (1642–1727) w wieku 23 lat dostrzegł działanie powszechnej siły grawitacji, wymyślił nowe metody rachunkowe (rachunek różniczkowy i całkowity) i opisał naturę światła. W latach 1669–1701 piastował stanowisko *Lucasian Professor of Mathematics* w Cambridge (Trinity College). W maju 1684 roku (gdy miał 42 lata) zaczął pisać książkę *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*. Napisał ją po łacinie w formie nawiązującej do *Elementów* Euklidesa. Praca nad nią trwała do kwietnia 1686 roku, a jej pierwsze wydanie ukazało się w 1687 roku. Treścią nie były nagłe ośnienia, lecz długotrwałe, głębokie przemyślenia Newtona z lat wcześniejszych.

Na *Principia* składają się definicje, aksjomaty, czyli prawa ruchu, Księga I i II, obie o ruchu ciał, Księga III o układzie świata oraz Komentarz ogólny. Księga I dotyczy ruchu zachodzącego bez jakiegokolwiek ośrodka stawiającego opór. Księga II to opis ruchu w ośrodku stanowiącym opór. Księga III to zastosowanie zasad opisanych w dwóch pierwszych księgach do wyjaśnienia działania i budowy Układu Słonecznego: skutki grawitacji, orbity planet i komet, spłaszczenie Ziemi i planet, zaburzony ruch Księżyca, zjawisko pływów, precesja punktu równonocy.

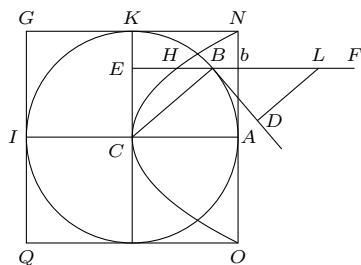
W tym precyzyjnym planie część tekstu Newton poświęcił zagadnieniom szczegółowym (przypominają one dygresje). Niektóre z nich przez blisko 300 lat budziły zdziwienie. Tak było z problemem aerodynamicznym, który spróbujemy omówić. *Problem aerodynamiczny* polega na znalezieniu kształtu powierzchni, która napotyka najmniejszy opór podczas ruchu w danym ośrodku. W naszej prezentacji pójdziemy śladami Newtona, rozważając możliwie prostą sytuację. W Księdze II *Principiów* znajdujemy

Stwierdzenie XXXIV. *Niech w rozrzedzonym ośrodku składającym się z jednakowych cząstek rozmieszczonych w jednakowych wzajemnych odległościach poruszają się kula i cylinder [walec], które mogą być wpisane w sześciiany o tym samym boku, z jednakowymi prędkościami w kierunku osi cylindra. Wówczas opór kuli będzie o połowę mniejszy od oporu cylindra.*

Znajomość treści *Principiów* nie jest powszechna, więc zaczniemy od niezbędnych wyjaśnień. Przez ruch rozumiemy ruch postępowy: ciało porusza się w jednym kierunku, bez obrotu. Ośrodek, w którym zachodzi ruch, jest nieruchomy i jednorodny (wszędzie taki sam). Ośrodek jest rozrzedzony, gdy jego cząstki są daleko od siebie i są nieruchome (temperatura ośrodka jest bliska zera bezwzględного). Każda z nieruchomych cząstek ma ustaloną masę m i jest idealnie sprężystą kulą. Samo ciało jest również idealnie sprężyste, więc mała kulka, zderzając się z ciałem, odbija się od niego zgodnie z prawem: kąt padania jest równy kątowi odbicia. Dla wygody przyjmijmy, że to nie ciało porusza się w nieruchomym ośrodku, lecz odwrotnie, nieruchome ciało umieszczone jest w ośrodku poruszającym się ze stałą prędkością v . Porównamy siły oporu, jakie działają na nieruchomą kulę i nieruchomy walec (opisane w Stwierdzeniu XXXIV), gdy ciała te uderzane są przez poruszające się

Przypomina to sytuację, gdy ciało porusza się w górnych warstwach atmosfery, gdzie powietrze jest rozrzedzone i zimne, lub też w przestrzeni międzygwiezdnej.

Przyjęte tu założenie prowadzi do poprawnych konkluzji, bo działanie ośrodka na ciało jest takie samo, niezależnie czy ciało porusza się w nieruchomym ośrodku, czy też cząstki ośrodka uderzają w nieruchome ciało z taką samą prędkością w danym kierunku. Ignorujemy również, że odbite cząstki mogą zderzać się z cząstkami nacierającego ośrodka i ruch ośrodka może stać się chaotyczny.

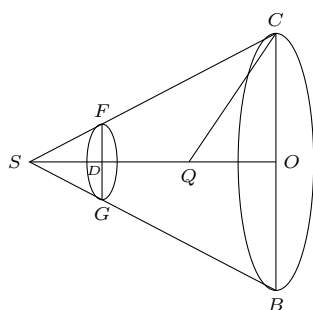


Rys. 1

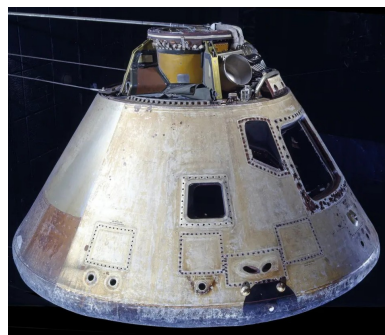
Idealizując sytuację, ignorujemy fakt, że odbite cząstki mogą zaburzać tor ruchu cząstek podążających na spotkanie z bryłą, tworząc rozmaite zawirowania.

Istotnie, jeśli wzdłuż OAN ustalimy oś X , $Ab = CE = x$, gdzie $-r \leq x \leq r$, wzdłuż ACI ustalimy oś Y , to $y = H(x) = \frac{1}{r} \cdot BE^2 = \frac{1}{r}(r^2 - x^2)$.

O objętości paraboloidy wpisanej w walec pisałem w Δ_{16}^{11} .



Rys. 2



Moduł dowodzenia Skylab 4 umożliwił powrót na Ziemię załogi ze stacji kosmicznej *Skylab* (1974)

Punkt x_0 można wyznaczyć, korzystając z rachunku pochodnych lub bez jego pomocy (jak?).

cząsteczki ośrodka. Newton posługuje się proporcjami odcinków i nie stosuje wektorów. Aby dostosować rozważania do współczesnych umiejętności, wykorzystamy jednak trygonometrię i układ współrzędnych.

Założmy, że kula i walec wpisane są w jeden sześciąt i obie bryły zostały przecięte płaszczyzną zawierającą oś walca AI (rys. 1). Na kulę i walec działają niezależnie cząstki ośrodka poruszające się w kierunku FE (równolegle do osi walca). Wszystkie cząstki niosą taki sam pęd. Niech odcinek LB reprezentuje pęd cząstki uderzającej w kulę i niech $LB = CB = r$. Jeżeli BD jest styczną do powierzchni kuli w punkcie B , to kąt $\sphericalangle LBD = \alpha$, $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$, nazywamy *kątem natarcia*. Wtedy składowa pędu prostopadła do stycznej ma wartość $LD = LB \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin \alpha$. W wyniku zderzenia składowa ta zmienia zwrot na przeciwny i przekazuje kuli pęd równy dwukrotności tej składowej, skierowany w stronę jej środka masy. Rzut tej składowej na kierunek BE ma wartość $LD \cdot \sin \alpha = r \cdot \sin^2 \alpha$. Jest to właśnie ta interesująca nas część przekazywanego pędu. Analogiczne wkłady od wszystkich cząstek sumują się i przyczyniają do ruchu kuli wzdłuż osi BE , natomiast składowe prostopadłe do osi BE wzajemnie się znoszą. Z przystawiania trójkątów $\triangle DLB \sim \triangle EBC$ mamy $LD = BE$ i $\sin \alpha = \frac{BE}{BC} = \frac{BE}{r}$. Interesującą nas część pędu cząstki padającej w punkcie B , ale zaczepioną w punkcie b , reprezentuje odcinek $bH = r \cdot \sin^2 \alpha = \frac{1}{r} \cdot BE^2$. Gdy punkt B przemieszcza się wzdłuż półokręgu od punktu K do punktu A , to przemieszcza i zmienia się odcinek bH tak, że punkt H zakreśla parabolę. Obrót tej paraboli wokół osi AC ogranicza paraboloidę, którą zajmują wszystkie odcinki bH tworzące składowe pędów wszystkich cząstek padających na kulę, które po zsumowaniu powodują zmianę pędu kuli w kierunku FE . Walec opisany na tej paraboloidzie tworzą wszystkie odcinki $bE (= r)$, które po zsumowaniu (i pomnożeniu przez 2, ze względu na odbicie sprężyste cząstki) dają zmianę pędu kuli spowodowaną przez wszystkie cząstki padające na walec z tego samego kierunku w jednostce czasu. Efektywna siła oporu jest proporcjonalna do tego przekazu pędu w jednostce czasu. Paraboloida wpisana w walec ma objętość o połowę mniejszą od objętości tego walca, stąd wynika teza. $\square$

W świetle dewizy Newtona *hypotheses non fingo* (nie stawiam hipotez) ciekawsze są jego komentarze (*scholium*) do omawianej propozycji. Ponieważ mała powierzchnia będzie miała mały opór, musimy określić rozmiar poszukiwanej powierzchni. Newton zakłada, że powierzchnia ta ogranicza figurę wypukłą i jest powierzchnią obrotową (a więc symetryczną).

Problem. Określ wymiary stożka ściętego o promieniu podstawy $OC = r$ i wysokości $OD = 2a$ stawiającego najmniejszy opór podczas ruchu w kierunku OS w rozrzedzonym ośrodku.

Niech $OS = x \geq 2a$ i kąt $\sphericalangle CSO = \alpha < \frac{\pi}{2}$. Na powierzchnię stożka działają niezależnie cząstki ośrodka poruszające się w kierunku SO , wszystkie niosące taki sam pęd P zarówno co do wartości, jak i kierunku. Z podobieństwa trójkątów $\triangle SOC \sim \triangle SDF$ mamy $DF = r \cdot \frac{x-2a}{x}$. Na kołową podstawę o polu $\pi \cdot DF^2 = \pi \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2}$ działają cząsteczki, każda przekazując pęd $2P$. Kąt natarcia cząsteczki na tworzącą stożka ma miarę α , więc przekazany stożkowi pęd (prostopadły do tworzącej i skierowany do wnętrza stożka) jest równy $2P \cdot \sin \alpha$, gdzie $\sin \alpha = \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}}$, a jego składowa w kierunku SO wynosi $2P \cdot \sin^2 \alpha$. Zatem całkowity pęd przekazany stożkowi jest sumą pędów $2P$ w każdym punkcie koła o polu $\pi \cdot DF^2$ oraz pędu $2P \cdot \sin^2 \alpha$ w każdym punkcie pierścienia o polu $\pi \cdot OC^2 - \pi \cdot DF^2$. Jeśli przez k oznaczmy stały czynnik, to efektywny opór jest równy

$$k \left[\frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} + \left(r^2 - \frac{r^2(x-2a)^2}{x^2} \right) \cdot \frac{r^2}{x^2 + r^2} \right] = kr^2 \cdot \frac{(x-2a)^2 + r^2}{x^2 + r^2},$$

gdzie $x \geq 2a$. Osiąga on wartość najmniejszą w punkcie, w którym jest minimum funkcji:

$$f(x) = \frac{(x-2a)^2 + r^2}{x^2 + r^2} \quad \text{dla } x \geq 2a,$$

a to ma miejsce dla $x_0 = a + \sqrt{a^2 + r^2}$.



Voyager 1 (1977), który opuścił Układ Słoneczny w 2012 r.

Otrzymana odpowiedź jest zgodna z konstrukcją wskazaną przez Newtona: „połowimy odcinek OD w Q i przedłużamy OQ do S tak, aby QS było równe QC . Wówczas S jest wierzchołkiem stożka, którego część [stożek ścięty $COBGDF$] jest rozwiązaniem problemu”.

Z przeprowadzonych rozważań wynika również, że kąt $\angle CSB$ jest zawsze ostry. □

I mamy niespodziankę, wśród stożków o danej podstawie i wysokości najmniejszy opór w rozrzedzonym ośrodku stawia stożek ścięty (!), i to niezależnie od początkowych wartości r i $2a$. Dodatkowo, im mniejszy stosunek $\frac{2a}{r}$, tym większa będzie część płaska. Czy więc rzeczywiście „odwrócona patelnia” to najbardziej opływowa powierzchnia w rozrzedzonym ośrodku?

Wnioski te wydawały się tak absurdalne, że uznano je za błąd geniusza, były ignorowane (niezrozumiane?) przez 300 lat, aż do XX wieku, gdy rozpoczęła się eksploracja kosmosu. . .



Niebo nade mną, grzyby pode mną

Jeśli jest lato i myślisz o grzybach, bardzo słusznie. Jeśli jest jesień i myślisz o grzybach, jeszcze lepiej. W sumie, bez względu na porę roku i doby powinniśmy myśleć o grzybach. Bo sieć cieniutkich nitek, która zawarta jest w wierzchniej warstwie naszych łądów ma kolosalne znaczenie. Od niej zależy dobrostan roślin łądowych. I, co tu dłużej ukrywać, nasz.

Wszystko zaczęło się od trufl. Albert B. Frank, niemiecki botanik, w 1885 roku badał możliwość sprowadzenia trufl do Prus. Odkrył niezwykłą rzecz: korzenie niektórych roślin były ściśle splątane ze strzępkami grzybni, a związek ten wydawał się korzystny dla obu stron. Dotąd obecność dziwnych struktur i strzępek grzybni w korzeniach roślin uważano za chorobę, pasożytnictwo lub, w najlepszym razie, za niedbałość przy pobieraniu próbek. Opublikowana przez Franka teoria o mikoryzie (ukuł ten termin od greckich słów *mykes*, grzyb oraz *rhiza*, korzeń) spotkała się z krytyką środowiska naukowego. Tymczasem Frank słusznie założył, że strzępki grzybni rozszerzają zasięg rośliny w glebie, dostarczają jej wody i związków nieorganicznych, głównie fosforanów i azotanów, ale także cynku i miedzi. Grzyb zyskuje związki organiczne do odżywiania.

Przypomnę tylko, że to, co potocznie nazywamy grzybem (zarówno takim w lesie, jak i w zapomnianym słoiku z dżemem), jest jedynie widoczną na zewnątrz małą częścią grzybiego ciała. Reszta to cienkie nitkowate struktury otoczone ścianą komórkową, nie zawsze podzielone na wyraźnie odrębne komórki, jak to jest u roślin i zwierząt. Mogą one stanowić długie, zawierające wiele jąder kanały. Ciało, które wyrasta na powierzchni, służy jedynie rozmnożeniu się za pomocą zarodników, roznoszonych wiatrem lub wodą na duże odległości.

W mikoryzie związek korzeni rośliny i strzępek może być różny. W przypadku drzew najczęściej strzępki grzybni gęsto oplatają korzeń i wchodzi w przestrzenie międzykomórkowe tkanek rośliny, jest to tzw. mikoryza zewnętrzna. W przypadku mikoryzy arbuskularnej strzępki wnikają do wnętrza komórek, a ściślej mówiąc, pod ścianę komórkową, tworząc silnie rozgałęzione arbuskule, twory, przez które zachodzi wymiana substancji. Struktura błony komórkowej pozostaje nienaruszona.

Uważa się, że około 90% gatunków roślin łądowych wchodzi w związki mikoryzowe, co nie jest dziwne, bo to dzięki temu powiązaniu rośliny mogły „wyjść z wody” około 470 milionów lat temu. Wtedy powierzchnia Ziemi była uboga w składniki mineralne, a pierwsze rośliny nie miały jeszcze dobrze wykształconych korzeni. Cieniutkie strzępki grzybów pozwalały zwiększyć zasięg i powierzchnię chłonną. Dowody na tę hipotezę pochodzą z badań kopalnych oraz analiz genetycznych współczesnych grzybów mikoryzowych. Niektórzy badacze uważają, że to mikoryza pozwoliła roślinom osiągnąć wielką różnorodność i opanować ogromną część powierzchni Ziemi.

Rosnąca liczba badań nad mikoryzą pokazuje, że rola grzybów jest większa, niż jedynie dostarczanie minerałów i wody. Grzyby wytwarzają także hormony roślinne, które po wnikięciu do organizmu rośliny regulują jego wzrost i rozwój. Grzyby wydzielają do gleby antybiotyki, zmniejszając prawdopodobieństwo zakażenia rośliny patogenami. Rośliny w związku z grzybem są bardziej odporne na stres: na skrajne