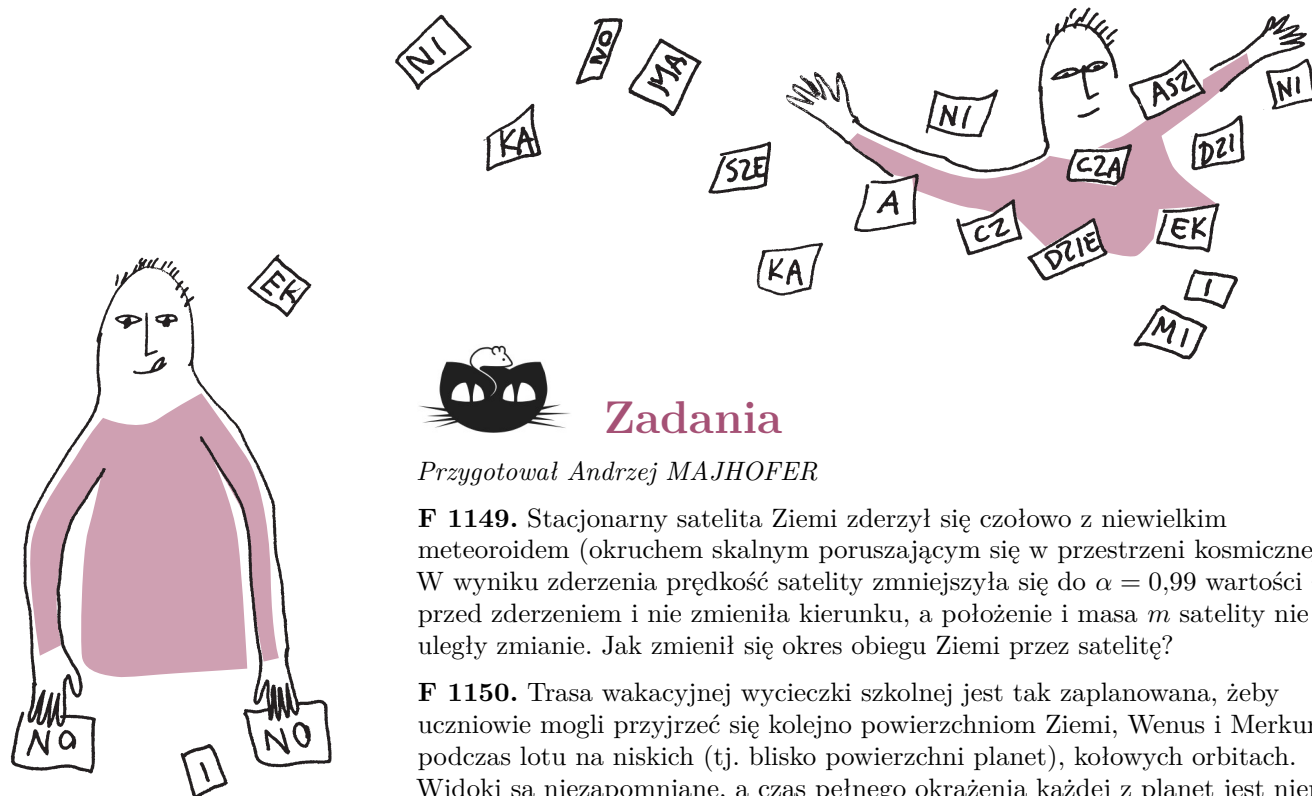


Inne podejście zastosował Lucas Mol z Kamloops, który postanowił poszukać – przy użyciu komputera – dwuwyrazowych sentencji w języku angielskim. Znalazł w ten sposób 9659 przetasowanych kwadratów! Poniżej prezentujemy kilka z nich:

<i>abelian beeline</i>	<i>folks folksinging</i>	<i>rain raging</i>
<i>assassins sin</i>	<i>iconic nonsense</i>	<i>referees fees</i>
<i>bad bandana</i>	<i>kinkiest nest</i>	<i>swaps wasps</i>
<i>barbaric kick</i>	<i>ominous minus</i>	<i>tomato mass</i>
<i>einstein stinging</i>	<i>prepare fela fel</i>	<i>we weeded</i>

Więcej przetasowanych kwadratów Mola można znaleźć na okładce niniejszej *Delt*y.

Wszystkie przetasowane kwadraty Kreczmana i Mola zostały odkryte na przełomie czerwca i lipca 2025 roku. Jeżeli udałoby Ci się stworzyć, Czytelniku, inne przykłady nietrywialnych przetasowanych kwadratów w językach naturalnych, to koniecznie mi je przyslij! Może nawet komuś uda się znaleźć takie słowo (lub zdanie) w języku naturalnym, które przetasowane ze sobą da słowo lub zdanie w tym samym języku, tak jak ostatni przytoczony przykład Mola czy też francuskie słowo *tuteurer*? To by było coś!



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1149. Stacjonarny satelita Ziemi zderzył się czołowo z niewielkim meteoroidem (okruczem skalnym poruszającym się w przestrzeni kosmicznej). W wyniku zderzenia prędkość satelity zmniejszyła się do $\alpha = 0,99$ wartości v_0 przed zderzeniem i nie zmieniła kierunku, a położenie i masa m satelity nie uległy zmianie. Jak zmienił się okres obiegu Ziemi przez satelitę?

F 1150. Trasa wakacyjnej wycieczki szkolnej jest tak zaplanowana, żeby uczniowie mogli przyjrzeć się kolejno powierzchniom Ziemi, Wenus i Merkurego podczas lotu na niskich (tj. blisko powierzchni planet), kołowych orbitach. Widoki są niezapomniane, a czas pełnego okrążenia każdej z planet jest niemal taki sam i wynosi około 85 minut. Co na tej podstawie można powiedzieć o wewnętrznej budowie odwiedzanych planet?

Przygotował Dominik BUREK

M 1861. Czy można umieścić trójkąt równoboczny wewnątrz sześciokąta foremnego w taki sposób, aby każdy wierzchołek sześciokąta *widział* wszystkie wierzchołki trójkąta? (Punkt A jest widoczny z punktu B , jeżeli odcinek AB nie zawiera punktów wewnętrznych trójkąta).

M 1862. Dany jest wielomian f stopnia trzeciego o współczynnikach całkowitych, którego współczynnik przy najwyższej potęgde jest równy 1 lub -1 . Wiadomo, że f ma trzy różne pierwiastki, z których każdy jest kwadratem liczby naturalnej. Udowodnić, że w ciągu liczb

$$|f(1)|, |f(2)|, |f(3)|, \dots$$

występuje kwadrat liczby naturalnej.

M 1863. Rozważamy wszystkie liczby 100-cyfrowe podzielne przez 19. Udowodnić, że liczba tych spośród nich, które nie zawierają cyfr 4, 5, 6, jest równa liczbie tych spośród nich, które nie zawierają cyfr 1, 4, 7.

Rozwiązania na str. 24

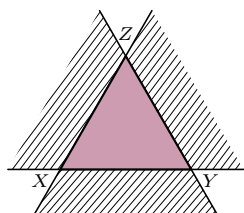
Rozwiązania zadań ze strony 15



Rozwiązanie zadania M 1861.

Niech XYZ będzie danym trójkątem równobocznym.

Wszystkie punkty, z których widać wierzchołki trójkąta XYZ , leżą wewnątrz trzech kątów wierzchołkowych do kątów wewnętrznych tego trójkąta.



Jeżeli każdy z tych kątów zawiera dokładnie dwa wierzchołki sześciokąta, to jego główne przekątne nie mogą być współpękowe. W przeciwnym razie dwa nieprzyległe wierzchołki sześciokąta leżą w tym samym kącie, na przykład w kącie wierzchołkowym do kąta przy wierzchołku X . Oznaczmy je przez A i B . Wówczas

$$\sphericalangle AXB \leq 60^\circ,$$

a zatem odpowiedni łuk AXB leży na zewnątrz sześciokąta, co jest sprzeczne z założeniem, że punkt X leży wewnątrz sześciokąta.



Rozwiązanie zadania M 1862.

Z założeń wynika, że

$$f(x) = \pm(x-a^2)(x-b^2)(x-c^2),$$

gdzie a, b, c są liczbami całkowitymi dodatnimi. Bez straty ogólności możemy przyjąć, że $a \leq b \leq c$. Połóżmy

$$n = ac + bc - ab.$$

Jest to liczba całkowita dodatnia, gdyż

$$n > bc - ab = b(c-a) \geq 0.$$

Ponadto

$$n - a^2 = ac + bc - ab - a^2 = (a+b)(c-a),$$

$$n - b^2 = ac + bc - ab - b^2 = (a+b)(c-b),$$

$$n - c^2 = ac + bc - ab - c^2 = (a-c)(c-b).$$

Zatem

$$f(n) = \pm(n-a^2)(n-b^2)(n-c^2)$$

jest równe

$$\mp(a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2.$$

Wobec tego

$$|f(n)| = (a+b)^2(c-a)^2(c-b)^2,$$

a więc $|f(n)|$ jest kwadratem liczby naturalnej.



Rozwiązanie zadania M 1863.

Niech $S = \{0, 1, 2, 3, 7, 8, 9\}$ oraz $T = \{0, 2, 3, 5, 6, 8, 9\}$. Zdefiniujemy funkcję $f: S \rightarrow T$ wzorem

$$f(x) = 3x \bmod 19.$$

Łatwo sprawdzić, że $f(0) = 0$, $f(1) = 3$, $f(2) = 6$, $f(3) = 9$, $f(7) = 2$, $f(8) = 5$, $f(9) = 8$, więc rzeczywiście f jest bijekcją z S na T . Jej funkcja odwrotna jest zdefiniowana przez

$$g(y) = -6y \bmod 19,$$

gdyż $g(f(x)) \equiv -18x \equiv x \pmod{19}$ oraz $f(g(y)) \equiv -18y \equiv y \pmod{19}$.

Oznaczmy przez $\mathcal{A}$ zbiór wszystkich 100-cyfrowych liczb podzielnych przez 19, które nie zawierają cyfr 4, 5, 6, a przez $\mathcal{B}$ zbiór wszystkich 100-cyfrowych liczb podzielnych przez 19, które nie zawierają cyfr 1, 4, 7.

Każdej liczbie $A = \overline{a_{99}a_{98} \dots a_0} \in \mathcal{A}$ przyporządkowujemy liczbę

$$F(A) = \overline{f(a_{99})f(a_{98}) \dots f(a_0)}.$$

Ponieważ cyfry liczby A należą do S , cyfry liczby $F(A)$ należą do T , zatem $F(A)$ nie zawiera cyfr 1, 4, 7. Ponadto pierwsza

cyfra A jest niezerowa i $f(x) = 0$ zachodzi tylko dla $x = 0$, więc $F(A)$ jest nadal liczbą 100-cyfrową.

Ponadto dla $A \in \mathcal{A}$ mamy:

$$F(A) \equiv f(a_0) + 10f(a_1) + \dots + 10^{99}f(a_{99})$$

$$\equiv 3a_0 + 10 \cdot 3a_1 + \dots + 10^{99} \cdot 3a_{99}$$

$$\equiv 3A \equiv 0 \pmod{19},$$

a więc $F(A) \in \mathcal{B}$.

Podobnie dla $B = \overline{b_{99}b_{98} \dots b_0} \in \mathcal{B}$ definiujemy

$$G(B) = \overline{g(b_{99})g(b_{98}) \dots g(b_0)}.$$

Wtedy $G(B) \in \mathcal{A}$, a z zależności $g \circ f = \text{id}_S$ i $f \circ g = \text{id}_T$ wynika, że $G \circ F = \text{id}_\mathcal{A}$ oraz $F \circ G = \text{id}_\mathcal{B}$. Zatem F jest bijekcją między $\mathcal{A}$ i $\mathcal{B}$, więc $|\mathcal{A}| = |\mathcal{B}|$.



Rozwiązanie zadania F 1149.

Początkowy okres obiegu satelity wynosił dobę, tj. $T_0 = 24$ godziny. Przed zderzeniem satelita stacjonarny poruszał się po orbicie kołowej. Przyjmijmy, że promień tej orbity wynosił R , prędkość v_0 spełniała wówczas związek $v_0^2 = GM/R$, w którym G jest stałą grawitacji, a M masą Ziemi. Po zderzeniu satelita pozostaje w odległości R od Ziemi, a jego prędkość zmalała do wartości αv_0 , ale pozostaje prostopadła do promienia wodzącego. Punkt zderzenia staje się więc apogeum nowej orbity eliptycznej. Po zderzeniu moment pędu satelity wynosi $L = m\alpha v_0 R$, a energia całkowita

$$E = \frac{m\alpha^2 v_0^2}{2} - \frac{GMm}{R}.$$

Podczas ruchu po orbicie energia i moment pędu pozostają stałe. Dla znalezienia długiej półosi orbity musimy teraz wyznaczyć odległość w perigeum r . Prędkość w perigeum jest prostopadła do promienia wodzącego r i wynosi: $v = L/(mr) = \alpha v_0 R/r$. Ze wzoru na energię całkowitą otrzymujemy:

$$E = \frac{m\alpha^2 v_0^2}{2} - \frac{GMm}{R} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r},$$

a po podstawieniu v i skorzystaniu ze związku $v_0^2 = GM/R$ otrzymujemy równanie:

$$\frac{\alpha^2}{2} - 1 = \frac{R}{r} \left(\frac{\alpha^2 R}{2r} - 1 \right),$$

którego rozwiązaniem są apogeum $r = R$ i perigeum $r = \alpha^2 R / (2 - \alpha^2)$. Długa półoś orbity wynosi więc $a = (r + R)/2 = 1/(2 - \alpha^2)$. Po skorzystaniu z prawa Keplera otrzymujemy ostatecznie:

$$T = T_0 (2 - \alpha^2)^{-3/2}.$$

Liczbowo $T = 0,9709T_0 \approx 23,30$ godziny, czyli około 23 godziny 18 minut.



Rozwiązanie zadania F 1150.

Według opisu lot wokół każdej z planet odbywał się z odpowiednią dla tej planety I prędkością kosmiczną, a wszystkie okresy obiegu były sobie niemal równe. Pierwsza prędkość kosmiczna v_I dla planety o masie M i promieniu R spełnia znane wszystkim równanie (G jest stałą grawitacji):

$$v_I^2 = \frac{GM}{R}.$$

Korzystamy ze związków v_I z okresem obiegu T oraz M ze średnią gęstością planety ρ i otrzymujemy:

$$\frac{4\pi^2 R^2}{T^2} = \frac{4\pi R^3 \rho G}{3R}.$$

Otrzymujemy:

$$\rho = \frac{3\pi}{GT^2}.$$

Wniosek: niemal jednakowe czasy obiegu wskazują na niemal równe średnie gęstości Ziemi, Wenus i Merkurego. Podstawienie $T = 85$ minut oraz $G = 6,6743 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/(\text{kg} \cdot \text{s}^2)$ prowadzi do $\rho = 5,429 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$. W tablicach można znaleźć wartości $5,513 \cdot 10^3$; $5,243 \cdot 10^3$; $5,427 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$, odpowiednio, dla Ziemi, Wenus i Merkurego.