

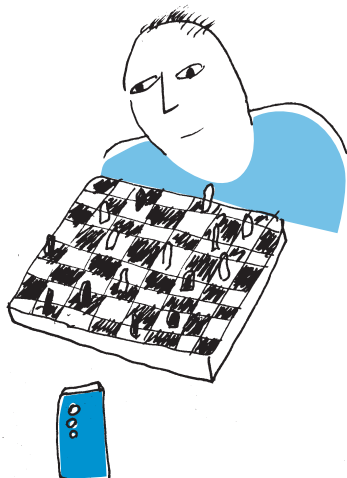
Czy AI gra w geometrię?

Mateusz KRUKOWSKI*

Cykl *Człowiek o AI*, zainaugurowany w Δ_{26}^3 , to świetna okazja do szerszej dyskusji na tematy, którymi od dłuższego czasu męczę nie tylko swoich znajomych, ale i studentów analizy danych oraz uczenia maszynowego na Politechnice Łódzkiej, gdzie pracuję. Wielowymiarowość (*pun definitely intended*) zagadnień związanych ze sztuczną inteligencją sprawiła, że dłuższy moment wahałem się co do warunków początkowych poniższego strumienia świadomości, przelanego na papier. . . znaczy się do LaTeXowego pliku, rzecz jasna. Ostatecznie zauważyłem, że to tekst profesora Marcinkowskiego pt. *Ośiem krótkich uwag z pamiętnika* najdłużej rezonował w neuronach mojego mózgu, i to on (tj. tekst, nie mózg) powinien stanowić punkt wyjścia moich dalszych spekulacji.

Szachowa polemika

W „uwagach z pamiętnika” profesor Marcinkowski słusznie zauważa, że nie ma na świecie nikogo, kto wygrałby w szachy ze swoim telefonem. Zdanie to dzielą wszyscy arcymistrzowie gry królewskiej, na czele z GOAT-em Magnusem Carlsenem, który otwarcie mówi o dominacji krzemowych graczy, chociażby w podcaście *Joe Rogan Experience* (odc. 2275). Co do wyniku meczu człowiek–maszyna wszyscy są zgodni, ale profesor Marcinkowski idzie o krok dalej, przekonując, że telefon *nie rozumie* pozycji figur na szachownicy, on jedynie „liczy warianty”. Nie jestem pewien, jak Autor „uwag z pamiętnika” rozumie „rozumienie”, ale z kontekstu wnioskuję, że chodzi o pewnego rodzaju intuicję, która nie sprowadza się do mechanicznego rachunku możliwych posunięć. Jak się okazuje, tak pojmowana sztuczna intuicja jest fundamentalną składową najlepszych silników szachowych i to dzięki niej telefony rozumieją szachy lepiej niż my.



Jeśli rozważyć szachową pozycję „zero”, to żaden współczesny (a najpewniej i żaden przyszły) komputer nie jest w stanie przeanalizować wszystkich możliwych wariantów rozgrywki. Owszem, silniki takie jak Stockfish rachują szybciej i głębiej niż najlepsi arcymistrzowie, ale nawet one nie są w stanie dotrzeć do końca gry królów. Widzą kilkanaście lub kilkadziesiąt ruchów do przodu, ale drzewo potencjalnych partii jest monstrualnych rozmiarów kolosem, którego nie sposób zobaczyć w całej okazałości. Oznacza to, że komputer gdzieś musi powiedzieć „STOP” (inaczej nie skończyłby liczyć do śmierci termicznej Wszechświata) i podjąć się wyzwania oceny pozycji, na której się zatrzymał. Nie wie, „co będzie dalej”, ale skoro ma ocenić ustawienie figur na szachownicy, to musi użyć swojej. . . intuicji(?).

Jeszcze w latach 90. komputer Deep Blue w legendarnym meczu z Garrym Kasparowem (innym pretendentem do miana szachowej „kozy”) do ewaluacji używał heurystyk postaci „−0,1 punktu za zdwojone piony” lub „+0,2 punktu za zroszowanego króla”. Kolejne dekady pokazały, że nie jest to podejście optymalne, a ludzkie heurystyki stopniowo odeszły do lamusa. Obecnie najmocniejsze silniki, jak Stockfish, Leela Chess Zero czy Komodo Dragon, oceniają pozycje szachowe przy użyciu sieci neuronowych. Sieci te przechodzą długotrwały proces treningowy (tak samo jak arcymistrzowie), w trakcie którego rozgrywają miliardy partii i uczą się na własnych błędach. Docelowo strategia ta okazuje się na tyle skuteczna, że żadna ludzka intuicja zapisana węglem w aksonach nie jest w stanie konkurować z intuicją sztuczną, zapisaną krzemem w naszych komputerach.

Metoda Kartezjusza i powrót do antyku

Wróćmy do artykułu profesora Marcinkowskiego. W jednej z uwag przeprowadza on eksperyment myślowy, w którym Banach ze Steinhausem siedzą w zadymionej kawiarni Szkockiej i dyskutują o problemach, które my znamy z Międzynarodowej Olimpiady Matematycznej 2025. Profesor argumentuje za wyższością lwowskich geniuszy nad sztuczną inteligencją, którzy nie

potrzebowaliby setek zadań testowych, by na serwetkach spisać rozwiązania problemów olimpijskich. Autor przyznaje jednak wyjątkowy status geometrii, z którą AI powinna sobie poradzić nawet bez takowego treningu. „Bo geometria jest z nami od bardzo dawna” pisze Autor, a ja mam nieodparte wrażenie, że nie o sam wiek tej gałęzi matematyki chodzi.

Gdy po raz pierwszy usłyszałem o srebrnym medalu olimpijskim dla AlphaGeometry, byłem przekonany, że sztuczna inteligencja podąża drogą przetartą jeszcze w XVII wieku przez jednego z ojców nowożytnej nauki. Mowa, rzecz jasna, o Kartezjuszu, który blisko 400 lat temu rozpoczął proces algebraizacji geometrii. Do dziś pomysł „wpiszę wszystko w układ współrzędnych i rozwiążę kilka równań” przynosi zaskakująco dobre rezultaty. Przykładem służy zadanie 5 z finału tegorocznej, 77. Olimpiady Matematycznej (zob. margines), gdzie „wystarcza” przyjęcie środka O okręgu (bez straty ogólności o promieniu 1) za początek układu współrzędnych, przy czym oś OX najwygodniej ustawić równoległe do boku BC . W takim układzie mamy $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, -1)$, $C = (x_C, -1)$, $D = (0, -1)$ oraz $M = (\frac{x_B + x_C}{2}, -1)$ i całe zadanie sprowadza się do żmudnych i nudnych rachunków, wyznaczających proste przechodzące przez dwa punkty, proste do nich prostopadłe, ich punkty przecięcia itd.

Dość niespodziewanie (przynajmniej dla mnie) AlphaGeometry nie używa jednak uniwersalnej metody Kartezjusza, a zamiast tego korzysta z klasycznych technik i narzędzi, znanych jeszcze Talesowi czy Pitagorasowi. Studiując publikacje analityków z Google DeepMind, odnoszę wrażenie, że ich sztuczna inteligencja traktuje geometrię podobnie jak szachy, warcaby czy starochińską grę Go. Każdy krok dowodu to kolejny ruch, ale zamiast przesuwac figurę po szachownicy, AI wpisuje okręgi w trójkąty, dorysowuje proste równoległe i rachuje miary kątów. Przyczyną sukcesu tego podejścia wydaje się stosunkowo łatwa „aksjomatyzowalność” geometrii, którą zauważył już Euklides w „Elementach”, a uściślił David Hilbert pod koniec XIX w. AI zwyczajnie potrafi grać w gry (także w geometrię) o jasno zdefiniowanych regułach.

Ostatni bastion ludzkości

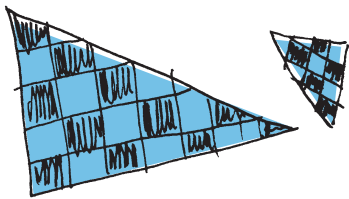
Sukcesy sztucznej inteligencji w rozwiązywaniu problemów olimpijskich mogłyby sugerować, że już niebawem będziemy świadkami narodzin... ekhm... konstrukcji najlepszego matematyka w historii. Odnoszę jednak wrażenie, i tu chyba zgadzamy się z profesorem Marcinkowskim, że wciąż nie pokonailiśmy głównych przeszkód na drodze do krzemowego uczonego, dla którego dotychczas zgromadzona ludzka wiedza o matematyce będzie jawić się niczym szkolna tabliczka mnożenia. Wspomniane przeszkody sięgają jeszcze początków XX wieku, gdy okazało się (m.in. za sprawą hipotezy continuum czy twierdzenia Gödla), że jednolita aksjomatyzacja całej matematyki jest nieosiągalna. O ile zatem AI potrafi grać w geometrię, to gra w matematykę jest znacznie trudniejsza, gdyż nikt nie jest w stanie spisać jej wszystkich reguł. Co więcej, sami matematycy od dekad kłócą się o reguły już spisane, czego najżywszym przykładem jest podważana zasadność przyjmowania aksjomatu wyboru.

Kolejny (i może poważniejszy) problem łatwo zilustrować na przykładzie gry Nim, w której dwóch graczy naprzemiennie zabiera kamienie z ustalonej liczby stosów. W trakcie swojej rundy gracz wybiera pojedynczy stos, a następnie zabiera z niego dowolnie wybraną przez siebie liczbę kamieni (włącznie z zabraniami całego stosu). Zwycięzcą zostaje ten, kto zbierze ostatni kamień w grze (tzn. jego przeciwnik nie będzie miał już możliwości ruchu). Jak wykazują niedawne badania opublikowane na łamach „Machine Learning”, nawet modele wzorowane na algorytmach ze stajni Google DeepMind nie mogą równać się z najlepszymi graczami ludzkimi w Nim. Przewaga człowieka to bowiem efekt pracy Charlesa L. Boutona, który ponad 120 lat temu opracował strategię wygrywającą, opartą na xor-sumie liczby kamieni na poszczególnych stosach. Mimo całej swej sztucznej inteligencji i syntetycznej intuicji, krzemowi gracze do tej pory nie są w stanie odtworzyć pomysłu Boutona. Wyabstrahowanie

Zadanie 5 z finału 77. OM: Dany jest trójkąt ostrokątny ABC , w którym $AB < AC$. Okrąg wpisany w ten trójkąt jest styczny do boków BC, CA, AB , odpowiednio, w punktach D, E, F . Punkty X i Y leżą na prostej EF , przy czym proste BX i CY są prostopadłe do prostej BC . Punkt M jest środkiem odcinka BC . Prosta symetryczna do BX względem MX przecina prostą symetryczną do CY względem MY w punkcie Z . Wykazać, że proste ZD i BC są prostopadłe.

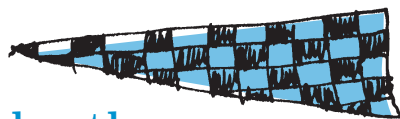
Więcej o grze Nim można poczytać w samej *Delcie* ($\Delta_{10}^7, \Delta_{13}^6$), ale także w oryginalnym artykule Boutona – w tomie 3 (1901-1902) *Annals of Mathematics*, dostępnym pod adresem www.jstor.org/stable/1967631.

Gościwie zachęcam do lektury całego artykułu „Impartial Games: A Challenge for Reinforcement Learning” autorstwa Bei Zhou oraz Sorena Riisa.



złotej reguły rządzącej Nim na ten moment leży poza ich zasięgiem. Łączy się to zapewne z założeniem, że w przeciwieństwie do szachów czy Go Nim ma nieskończenie wiele pozycji startowych, gdyż ani liczba stosów, ani kamieni nie jest z góry ustalona. Stosów może być tysiąc, milion, miliard i tak ad infinitum... Matematycy od czasów paradoksów Zenona z Elei zmagają się z konceptem nieskończoności i zdążyli nabrać już pewnej wprawy w tej materii. Potrafią spojrzeć na nieograniczoną przestrzeń stanów Nim jako całość, wspiąć się na wyższy poziom abstrakcji i wydestylować strategię wygrywającą. Komputery jeszcze do tego nie dojrzały. Chcąc przerechować każdy możliwy stan po kolei, utykają niczym strzała Zenona, która nigdy nie sięga tarczy.

Prowadzi to wszystko do dość optymistycznego wniosku, że póki co my, ludzie, jesteśmy w stanie spojrzeć „głębiej” niż nasi krzemowi rywale. Owszem, liczymy wolniej i gorzej, i w silnie zaksjomatyzowanych systemach komputery biją nas na głowę. Niemniej, jeśli chodzi o wyjście poza utarte schematy i reguły, człowiek nadal potrafi wieść prym nad maszyną. Pytanie tylko: jak długo?



Trójkąty w kratkę

Łukasz RAJKOWSKI

Zastanówmy się, jakie trójkąty możemy narysować na kartce w kratkę tak, by ich wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych? Interesują nas tu ich kształty, a zatem pytanie zadajemy z dokładnością do podobieństwa trójkątów (np. nie odróżniamy trójkąta równobocznego o boku 1 od tego o boku $\sqrt{2}$).

Trójkąt prostokątny równoramienny – wiadomo, . Ale czy każdy trójkąt prostokątny? Gdyby dwa jego boki miały być równoległe do linii kraty, to oczywiście mamy tu pewne ograniczenie: długości jego przyprostokątnych (wyrażone w wielokrotnościach krawędzi kraty) będą całkowite, więc tangensy jego kątów muszą być liczbami wymiernymi. Jednak kratowy trójkąt prostokątny nie musi mieć krawędzi równoległych do linii kraty...

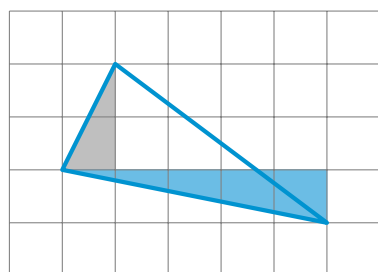
Wymierne tangensy – dobry trop! Jeśli kąty α, β mają wymierne tangensy, to na mocy wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

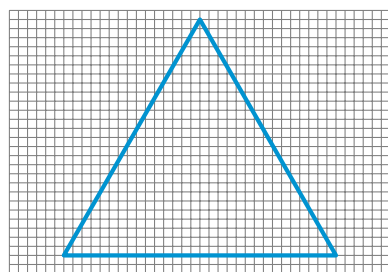
kąt $\alpha + \beta$ również ma wymierny tangens. To samo dotyczy kąta $\alpha - \beta$.

To już załatwia sprawę w pełnej ogólności. Dowolny kąt trójkąta kratowego możemy wyrazić jako sumę lub różnicę kątów *prostokątnych* trójkątów kratowych o przyprostokątnych równoległych do linii siatki (rys. 1). Oznacza to, że wszystkie kąty trójkąta kratowego muszą mieć wymierne tangensy. Działa to również w drugą stronę: jeśli dwa kąty ostre pewnego trójkąta mają tangensy równe $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi, to trójkąt ten można (z dokładnością do podobieństwa) otrzymać, sklejając dwa kratowe trójkąty prostokątne: jeden o przyprostokątnych długości ac i bc , zaś drugi o przyprostokątnych ac i ad .

Nasza obserwacja ma fatalne konsekwencje natury estetycznej. Tangens kąta 60° jest równy $\sqrt{3}$. Nie jest to liczba wymierna, zatem na papierze w kratkę nie znajdziemy niestety trójkąta równobocznego. Na pocieszenie dodajmy, że na kartce standardowego zeszytu w kratkę formatu A5 możemy narysować trójkąt kratowy będący trójkątem równoramiennym o podstawie długości 15 cm (czyli 30 kratek), równoległej do dłuższego boku zeszytu, oraz wysokości 13 cm (rys. 2). Odchylenie kątów tego trójkąta od 60° nie przekracza $0,04^\circ$. Lepiej na kartce A5 się nie da, ale oszustwo i tak jest raczej nie do wychwycenia przez ludzkie oko. Co ciekawe, na kartce w kratkę formatu A4 też nie da się lepiej, ale da się niebanalnie inaczej, tak by żaden z boków nie był równoległy do krawędzi kartki. Jak? Polecamy zastanowić się samemu!



Rys. 1



Rys. 2