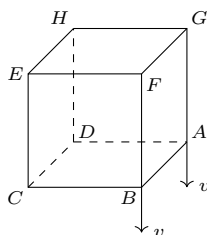


Klub 44 F



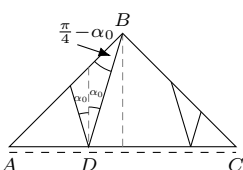
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2026



Rys. 1

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 812 ($WT = 3,07$), 813 ($WT = 3,37$) z numeru 2/2026

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	3-38,16
Tomasz Wietecha	Tarnów	18-36,68
Krzysztof Zygan	Lubin	34,85
Marian Łupieżowiec	Gliwice	3-23,88
Paweł Kubit	Kraków	23,36
Filip Wojaczek	Rybnik	17,03



Rys. 3

818. Promienie wychodzące z gazety pod szkłem biegną we wszystkich kierunkach i przecinając granicę powietrze-szkło, załamują się. Do szkła wchodzi tylko wewnątrz stożka o kącie rozwarcia $2\alpha_0$, gdzie α_0 jest kątem całkowitego wewnętrznego odbicia w szkłe (rys. 3):

$$\alpha_0 = \arcsin(1/n).$$

Musimy rozważyć dwa przypadki (pierwszy przedstawia rys. 3).

I. $\alpha_0 < \pi/4$, czyli $n > \sqrt{2}$

Wszystkie promienie z obszaru AD padają na matową krawędź i obszar ten jest niewidoczny.

Stosując do trójkąta ABD twierdzenie sinusów, mamy:

$$\frac{AD}{\sin(\pi/4 - \alpha_0)} = \frac{AB}{\sin(\pi/2 + \alpha_0)}.$$

Uwzględniając, że

$$AB = AC/\sqrt{2}, \quad AD = AC - DC,$$

otrzymujemy

$$k = \frac{DC}{AC} = \frac{1 + \tan \alpha_0}{2} = \frac{1 + 1/\sqrt{n^2 - 1}}{2}.$$

Aby jednak promienie padające z obszaru DC na krawędź BC przynajmniej częściowo wychodziły na zewnątrz, najmniejszy kąt padania na krawędź BC musi być mniejszy od kąta granicznego α_0 :

$$\pi/4 - \alpha_0 < \alpha_0,$$

czyli

$$\alpha_0 > \pi/8 \implies n < 1/\sin(\pi/8) = 2,61.$$

Stąd

$$k_{\min} = \frac{1 + \tan(\pi/8)}{2} \approx 0,7.$$

Zadania z fizyki nr 822, 823

Redaguje Elżbieta ZAWISTOWSKA

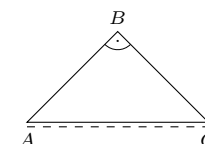
822. Sześcian porusza się w przestrzeni. W pewnej chwili jego ściana $ABCD$ (rys. 1) jest pozioma, a prędkości punktów A i B skierowane są pionowo w dół i mają wartości v . Prędkość punktu C w tej samej chwili ma wartość $2v$. Jaką maksymalną prędkość mogą mieć w tym samym momencie inne punkty sześcianu?

823. Do źródła o sile elektromotorycznej U dołączono szeregowo nienaładowany kondensator o pojemności C i cewkę o indukcyjności L . W chwili gdy napięcie na kondensatorze osiągnęło wartość U , do cewki dołączono równolegle jeszcze jeden kondensator o pojemności C . Znaleźć maksymalny ładunek na tym kondensatorze. Opór wewnętrzny źródła oraz opory przewodów łączących są pomijalnie małe.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2026

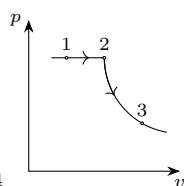
Przypominamy treść zadań:

818. Przekrój szklanego pryzmatu jest prostokątnym trójkątem równoramiennym (rys. 2). Podstawa AC i ścianka boczna BC są gładkie, ścianka boczna AB – matowa. Szkło, z którego wykonano pryzmat, ma współczynnik załamania n . Pryzmat stoi na gazecie. Jaką część powierzchni tekstu widzi obserwator, który patrzy przez gładką ściankę BC ?



Rys. 2

819. W naczyniu znajduje się ciecz i jej para nasycona. W wyniku procesu izotermicznego rozprężania objętość zajmowana przez parę wzrosła $\beta = 3$ razy, a ciśnienie pary zmalało $\alpha = 2$ razy. Znaleźć stosunek masy cieczy do masy pary znajdujących się w naczyniu w chwili początkowej. Objętość zajmowaną przez ciecz zaniedbać.



Rys. 4

II. $\alpha_0 > \pi/4$, czyli $n < \sqrt{2}$

Do krawędzi BC dotrą promienie ze wszystkich punktów podstawy AC , a ich kąty padania będą mniejsze niż $\pi/4$, czyli promienie wyjdą na zewnątrz pryzmatu.

Podsumowując:

dla $n < \sqrt{2}$ obserwator widzi cały tekst,

dla $\sqrt{2} \leq n \leq 1/\sin(\pi/8) = 2,61$ widoczna jest część tekstu

$$k = \frac{1 + 1/\sqrt{n^2 - 1}}{2},$$

dla $n > 2,61$ tekstu nie widać wcale.

819. W opisywanym procesie układ ciecz-para o masie $m_c + m_p$ przechodzi w stałej temperaturze T ze stanu początkowego 1 do stanu końcowego 3 (rys. 4).

Oznaczając ciśnienie pary nasyconej w tej temperaturze przez p_0 , a jej objętość przez V_1 , mamy:

$$(1) \quad p_0 V_1 = \frac{m_p R T}{\mu_p},$$

gdzie μ_p jest masą molową pary.

W stanie pośrednim 2 cała ciecz wyparowała i w naczyniu znajduje się tylko para nasycona o ciśnieniu p_0 i objętości V_2 :

$$(2) \quad p_0 V_2 = \frac{(m_c + m_p) R T}{\mu_p}.$$

W stanie końcowym ciśnienie tej samej masy pary nienasyconej wynosi p_3 , a objętość V_3 :

$$(3) \quad p_3 V_3 = \frac{(m_c + m_p) R T}{\mu_p}.$$

Z treści zadania:

$$p_3 = \frac{p_0}{\alpha}, \quad V_3 = \beta V_1.$$

Z równań (2) i (3):

$$V_2 = V_3 \frac{p_3}{p_0} = \frac{V_3}{\alpha}.$$

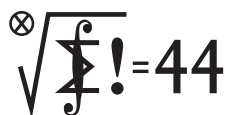
Dzieląc (3) przez (1), otrzymujemy

$$\frac{m_c + m_p}{m_p} = \frac{p_3 V_3}{p_0 V_1} = \frac{\beta}{\alpha}.$$

Szukany stosunek masy cieczy do masy pary w stanie początkowym wynosi

$$\frac{m_c}{m_p} = \frac{\beta}{\alpha} - 1 = \frac{1}{2}.$$

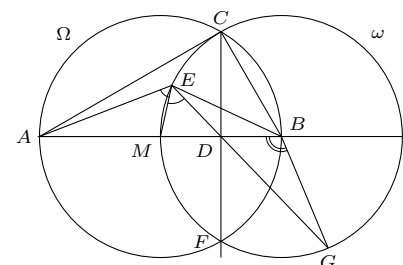
Klub 44 M



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2026

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 915 ($WT = 2,46$) i 916 ($WT = 1,33$) z numeru 2/2026

Roksana Słowik	42,93
Krzysztof Kamiński	42,66
Jędrzej Biedrzycki	42,06
Janusz Olszewski	41,53
Marian Łupieżowiec	40,52
Janusz Fiett	38,51
Tomasz Wietecha	34,34
Paweł Kubit	32,69
Piotr Kumor	32,18
Łukasz Merta	31,54
Piotr Wiśniewski	30,84
Paweł Najman	30,41
Marek Spychała	29,44
Andrzej Kurach	29,17



922. Gdy zmienna d przebiega zbiór wszystkich (dodatnich) dzielników liczby k , iloraz k/d przebiega ten sam zbiór. Przyjmijmy oznaczenie:

$$h(d, k) = \begin{cases} 1 & \text{gdy } k \text{ dzieli się przez } d, \\ 0 & \text{gdy } k \text{ nie dzieli się przez } d \end{cases}$$

(to funkcja charakterystyczna relacji $d|k$). Tak więc

$$\sigma(k) = \sum_{d=1}^n d \cdot h(d, k) = \sum_{d=1}^n \frac{k}{d} \cdot h(d, k).$$

Przekształcamy wyrażenie określające A_n , zmieniając porządek sumowania:

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma(k)}{k} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \cdot h(d, k) \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \left(\frac{1}{d} \sum_{k=1}^n h(d, k) \right). \end{aligned}$$

Przy ustalonym d suma $\sum_{k=1}^n h(d, k)$ zlicza jedynki

Zadania z matematyki nr 925, 926

Redaguje Marcin E. KUCZMA

925. Wewnątrz ustalonego czworokąta wypukłego leży taki punkt, że odcinki łączące ów punkt z wierzchołkami dzielą czworokąt na cztery trójkąty o równych polach. Dowieść, że istnieją dwa wierzchołki równoodległe od punktu przecięcia przekątnych czworokąta.

926. Znaleźć wszystkie funkcje ciągłe $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające równanie funkcyjne

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = 2x + 2y \quad \text{dla } x, y \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 926 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 5/2026

Przypominamy treść zadań:

921. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości CD . Punkt E leży wewnątrz tego trójkąta i zachodzą związki: $AC > BC = BE$, $CD^2 = AD \cdot BD$. Dwusieczna kąta AED połowi bok AB . Wyznaczyć wszystkie możliwe wartości miary kąta ABC .

922. Niech $\sigma(k)$ oznacza sumę wszystkich (dodatnich) dzielników liczby naturalnej k . Niech A_n będzie średnią arytmetyczną liczb $\sigma(k)/k$ po $k = 1, \dots, n$. Obliczyć granicę ciągu (A_n) , gdy $n \rightarrow \infty$, lub wykazać, że ten ciąg nie ma granicy.

921. Z założeń o długościach odcinków wynika, że $AD > BD$ oraz że kąt BCA jest prosty. Zatem AB jest średnicą okręgu Ω opisanego na trójkącie ABC . Przyjmijmy, że okrąg ω o środku B i promieniu $BC (= BE)$ przecina odcinek AD w punkcie M oraz przedłużenia odcinków CD i ED odpowiednio w punktach F i G . Patrząc na potęgi punktu D względem okręgów ω i Ω , dostajemy równości:

$$ED \cdot DG = CD \cdot DF = AD \cdot DB.$$

Równość skrajnych iloczynów oznacza, że czworokąt $AEBG$ ma okrąg opisany, wobec czego

$$\sphericalangle AEG = \sphericalangle ABG = \sphericalangle MBG = 2 \cdot \sphericalangle MEG$$

(ostatnia równość: kąt środkowy okręgu ω i kąt wpisany). Tak więc półprosta EM jest dwusieczną kąta AED , zatem (w myśl założenia) M jest środkiem boku AB trójkąta prostokątnego ABC . Stąd wniosek, że $AB = 2 \cdot BC$ i w konsekwencji $\sphericalangle ABC = 60^\circ$. Jest to jedyna możliwa miara kąta ABC . Łatwo sprawdzić, że wszystkie postawione warunki są wówczas spełnione przy każdym położeniu punktu E na łuku CM okręgu ω .

odpowiadające liczbom $k \in \{1, \dots, n\}$, podzielny przez d ; jest ich $\lfloor n/d \rfloor$, zatem

$$A_n = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{1}{d} \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor.$$

Ponieważ $\frac{n}{d} \geq \left\lfloor \frac{n}{d} \right\rfloor > \frac{n-d}{d}$, dostajemy dwustronne oszacowanie:

$$\frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{n}{d^2} \geq A_n > \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \frac{n-d}{d^2} = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^n \left(\frac{n}{d^2} - \frac{1}{d} \right),$$

czyli:

$$K_n \geq A_n > K_n - \frac{1}{n} H_n, \quad \text{gdzie } K_n = \sum_{d=1}^n \frac{1}{d^2}, \quad H_n = \sum_{d=1}^n \frac{1}{d}.$$

Wiadomo ($\rightarrow$ komentarz redaktora Ligi w e-wydaniu), że $K_n \rightarrow \frac{1}{6} \pi^2$, $\frac{1}{n} H_n \rightarrow 0$. Z twierdzenia o trzech ciągach wynika odpowiedź: $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n = \frac{1}{6} \pi^2$.

[Autor zadania, Witold Bednarek, opatrzył je uwagą, że pomysłodawcą rozwiązania jest (był) Andrzej Schinzel].

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Można je przysyłać również pocztą elektroniczną pod adresem delta@mimuw.edu.pl (preferujemy pliki pdf). Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez

współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, przy czym S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl.