



„Kradzież” strategii

Bartłomiej BZDEGA

Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Oto trzecia część cyklu poświęconego grom kombinatorycznym – zakładam, że Czytelnik zapoznał się już z dwiema poprzednimi. Na rozgrzewkę weźmy

Przykład 1. W grze *chrup!* gracz I ma strategię wygrywającą.

Dowód. Przypuśćmy, że drugi gracz ma strategię wygrywającą W . Gracz I usuwa prawe-dolne pole, przechodząc ze stanu początkowego S do stanu S_1 . Gracz drugi, według strategii W , przechodzi z S_1 do pewnego stanu T . Plansza teraz wygląda tak, jakby gracz II przeszedł od razu ze stanu początkowego do stanu T . Ale przecież gracz I mógł to zrobić w pierwszym ruchu, a potem samemu stosować strategię W , która zapewniłaby mu zwycięstwo – i mamy sprzeczność. Fakt, że remis jest niemożliwy, kończy dowód. $\square$

To rozumowanie nazywane jest *kradzieżą strategii*, ale warto sobie uświadomić, że strategia W , którą chcielibyśmy ukraść... nie istnieje! Jest ona jedynie hipotetycznym wytworem rozumowania nie wprost, które można streścić tak: gdyby W istniała, toby nie istniała. W szczególności nie mamy tu żadnych wskazówek, jaka powinna być strategia wygrywająca gracza I, a usunięcie jednej kostki nie zawsze jest dobrym pierwszym ruchem (zob. zadanie 2 z poprzedniego kącika).

Ten sam dowód napisany zwięźlej. Przypuśćmy, że stan początkowy S jest P . Ponieważ $S \rightarrow S_1$, stan S_1 jest W . Wobec tego $S_1 \rightarrow T$ dla pewnego stanu T , który jest P . Ale przecież $S \rightarrow T$, więc T powinien być W – sprzeczność. $\square$

Przykład 2. W grze *hex* gracz I ma strategię nieprzegrywającą.

Dowód. Przypuśćmy, że gracz II ma strategię wygrywającą W . Gracz I zajmuje w pierwszym ruchu jakiekolwiek pole, a potem gra tak, jakby to pole – nazwijmy je polem nadmiarowym – było wolne. Wtedy jest w roli gracza II, więc może stosować strategię W w każdej sytuacji, w której nie wskazuje ona pola nadmiarowego. Jeśli strategia W nakazuje zajęcie nadmiarowego pola, to nic złego się nie dzieje, bo gracz I zajął je wcześniej, jest zatem tak, jakby ruch wskazany przez strategię został już wykonany. Trzeba jednak zająć jakieś pole – gracz I zajmuje pole dowolne i od teraz to ono jest nadmiarowe. W ten sposób gracz I, stosując zmodyfikowaną strategię wygrywającą gracza II, wygrywa (pole nadmiarowe może tylko mu pomóc) – sprzeczność. $\square$

Wygląda na to, że jeden z graczy jest w korzystniejszej sytuacji, więc powinien wygrywać. Należy tu jednak uważać, bo czasem to, co uznajemy za korzystne, wcale takie nie musi być (zob. zad. 4). Podobnie jak poprzednio, dowodzimy tu jedynie istnienia strategii wygrywającej dla gracza I, natomiast nie otrzymujemy żadnych informacji o tej strategii.

W rzeczywistości gracz I ma coś więcej – strategię wygrywającą, bo w grze *hex* remis jest niemożliwy. Dowód tego faktu można przeprowadzić na wiele sposobów, ale tutaj zmieści się tylko następująca intuicja. Patrzymy na obszar złożony z jednego z czerwonych brzegów oraz z czerwonych pól mających z nim połączenie. Jeśli C nie sięga drugiego czerwonego brzegu, to możemy przejść niebieskimi polami sąsiadującymi ze zbiorem C .

Zadania

1. Na tablicy napisano wszystkie dzielniki pewnej liczby naturalnej $n > 1$. Ruch polega na wybraniu jednej z liczb, które w danym momencie są na tablicy, a następnie zmazaniu wszystkich jej dzielników wraz z tą liczbą. Przegrywa ten, kto zmaże liczbę n . Udowodnić, że gracz I ma strategię wygrywającą.
2. Gracz pierwszy w pierwszym ruchu zapisuje liczbę 1, 2 lub 3. W każdym kolejnym ruchu gracz na zmianę zamieniają zapisaną liczbę – nazwijmy ją n – na jedną z liczb $n + 1, n + 2, n + 3, \dots, 3n$. Wygrywa ten, po czym ruchu zapisana liczba przekroczy 1 googol. Kto ma strategię wygrywającą?
3. Gra *gomoku* jest wzorowana na grze *kółko i krzyżyk* – gramy na planszy 19×19 i wygrywa ten, kto pierwszy postawi pięć swoich znaczków pod rząd, w linii poziomej, pionowej lub skośnej. Udowodnić, że gracz I ma strategię, która zapewnia mu co najmniej remis.
4. Gra *rex* ma taki sam przebieg jak *hex*, z tą tylko różnicą, że przegrywa gracz, który jako pierwszy zbuduje połączenie. Ocenic poprawność następującego rozumowania:
Każde dodatkowe pole czerwone sprawia, że łatwiej zbudować czerwone połączenie, więc pierwszy ruch utrudnia grę graczowi I. Wobec tego, ponieważ remis nie jest możliwy, gracz II ma strategię wygrywającą.
5. Udowodnić, że w grze *hex* wybór pola w wąskim rogu w pierwszym ruchu jest błędem gracza I.

Wskazówki do zadań

1. Przypuśćmy, że gracz II ma strategię wygrywającą d i dalej stosować hipotetyczną strategię gracza II.

2. Jeśli gracz I wybierze 1, to II może odpowiedzieć 2 lub 3. Gracz I może wybrać 2 lub 3 już w pierwszym ruchu.

3. Wystarczy zastosować argument z drugiego przykładu.

4. Nadmiarowe pole nie zawsze pomaga graczowi II – może mu zablokować możliwość uniknięcia zbudowania połączenia.

5. W odpowiedzi na zamałowanie na czerwono nadmiarowego pola P_1 , gracz II ma niebieskie pole P_2 , sąsiadujące z polem P_1 oraz z niebieskim brzegiem. Gracz II przez całą grę halucynuje, że pole P_1 jest niebieskie, a pole P_2 puste. W grze halucynowanej gracz II pełni honoru gracza I. Ponadto jeśli istnieje niebieskie połączenie w pozycji z halucynacją, to istnieje również na pozycji oryginalnej.