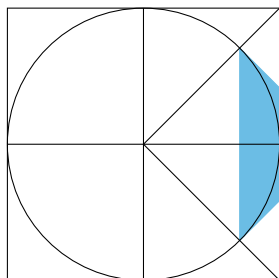


Kształt i opór, część 2/4

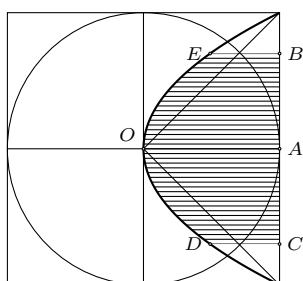
Nie tylko czapka Newtona

Jarosław GÓRNICKI*

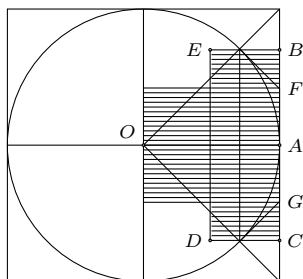
* Kontakt: gornicki59@gmail.com



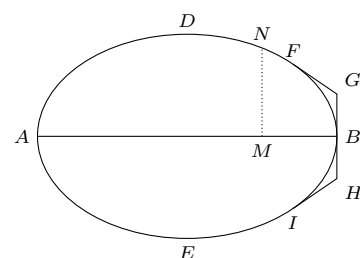
Rys. 1. Czapka Newtona



Rys. 2. Aby ułatwić obliczenia, odcinki reprezentujące efektywną siłę oporu działającą na dany punkt powierzchni mają swój początek na ścianie sześcianu



Rys. 3



Rys. 4

Ustalmy kulę i walec o takich wielkościach, że bryły te mogą być wpisane w sześciiany o tym samym boku (dla ustalenia uwagi równym 2). W części pierwszej pokazaliśmy, że w rozrzedzonym ośrodku, gdy bryły te poruszają się z takimi samymi prędkościami w kierunku osi walca, kula stawia o połowę mniejszy opór niż walec. Czy w rozważanej sytuacji, w sześcianie, można utworzyć bryłę o objętości większej niż kula, a jednocześnie stawiającą w ruchu mniejszy opór niż kula? Odpowiedź – tak! – jest nieco zaskakująca.

Stożek ścięty, którego tworzącą nachyloną jest do osi stożka pod kątem 45° , nazywamy *czapką Newtona* (rys. 1). Wykażemy, że nałożenie na kulę, prostopadłe do kierunku ruchu, czapki Newtona o promieniu podstawy $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ i wysokości $\frac{1}{2}(2 - \sqrt{2})$ zmniejsza opór stawiany przez taką bryłę podczas ruchu (w rozrzedzonym ośrodku).

Jak w części pierwszej, założmy, że na kulę działają niezależne cząstki ośrodka poruszające się w kierunku AO , wszystkie z takim samym pędem zarówno co do wartości, jak i kierunku. Niech odcinek AO (o długości 1) reprezentuje pęd cząstki uderzającej w bryłę. Posłużymy się rozważaniami z uzasadnienia Stwierdzenia XXXIV (patrz część 1/4). Opór, jaki stawia fragment powierzchni kuli wycięty przez walec o osi AO i promieniu podstawy $AB = AC = \frac{\sqrt{2}}{2}$, jest co do wartości równy objętości zaznaczonego fragmentu paraboloidy obrotowej $BEODC$ (rys. 2). Ponieważ $BE = CD = \frac{1}{2}$ (jeśli OA utożsamimy z nieujemną częścią osi rzędnych OY , to nasza parabola ma równanie $y(x) = x^2$), a objętość odcinka paraboloidy EOD jest równa połowie objętości walca na niej opisanego, więc objętość fragmentu paraboloidy $BEODC$ jest równa $\frac{3}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8}\pi$.

Obliczmy teraz opór, jaki (przy tych samych warunkach) na tym samym obszarze stawia czapka Newtona ustawiona prostopadłe do kierunku ruchu. Opór ten jest równy, co do wartości liczbowej, objętości walca o osi AO i promieniu podstawy $AF = AG = \sqrt{2} - 1$, powiększony o objętość rury $BECD$ (otrzymanej przez usunięcie z walca $BEDC$ walca o osi AO i promieniu podstawy $AF = AG$), gdzie $BE = CD = \frac{1}{2}$ (rys. 3). Z części I wiemy, że efektywny opór powierzchni bocznej czapki Newtona (stożka ściętego) jest równy $AO \cdot \sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$, więc stąd $BE = CD = \frac{1}{2}$. Łączna objętość opisanych tu brył jest równa:

$$\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AB^2 + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot AF^2 = \pi \left(\frac{1}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 \right).$$

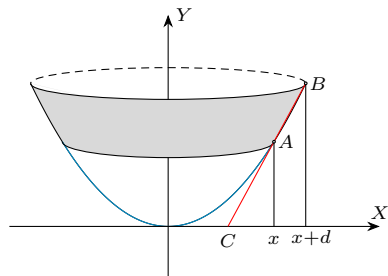
Ponieważ $\frac{1}{4} + (\sqrt{2} - 1)^2 < \frac{3}{8}$, więc kula z czapką Newtona stawia mniejszy opór niż kula bez czapki! $\square$

Prawdziwe jest ogólniejsze stwierdzenie Newtona (zawarte w *Principiach*, Księga II, Scholium do Stwierdzenia XXXIV): (...) jeśli bryła $ADBE$ powstaje w wyniku obrotu eliptycznej lub owalnej figury $ABDE$ wokół osi AB oraz jeśli generująca figura jest styczna do trzech prostych FG , GH i HI w punktach F , B i I w taki sposób, że GH jest prostopadłe do osi w punkcie styczności B oraz FG i HI przecinają się na prostej GH pod kątami FGB i BHI równymi 135° , to bryła powstająca w wyniku obrotu figury $ADFGHIE$ wokół tej samej osi AB napotyka mniejszy opór niż poprzednia figura, zakładając, że każda z nich porusza się naprzód wzdłuż osi AB w kierunku B .

Dalszy tekst Newtona zaskakuje jeszcze bardziej – to rozwiązanie ogólnego problemu aerodynamicznego.

Problem aerodynamiczny. Wyznaczyć powierzchnię obrotową (o wysokości H , której podstawą jest okrąg o promieniu R), która ogranicza obszar wypukły i stawia najmniejszy opór podczas ruchu postępowego w rozrzedzonym ośrodku.

Newton zawarł rozszerzone wyjaśnienie swojego rozwiązania problemu aerodynamicznego w liście z 1694 roku do Davida Gregory'ego z Oksfordu.



Rys. 5

Newton podał właściwą odpowiedź, ale nie wyjaśnił, jak do niej doszedł. Chętni mogą spojrzeć na szkic współczesnego rozwiązania problemu (podanego między gwiazdkami). Daje to pewne wyobrażenie o wiedzy matematycznej Newtona w 1687 roku.

* * *

Założmy, że powierzchnię obrotową uzyskujemy przez obrót wykresu funkcji wypukłej i niemalejącej $y = f(x)$, gdzie $x \in [0, R]$, $f(0) = 0$ i $f(R) = H > 0$. Na wykresie funkcji f wybieramy dwa punkty, A i B , tak blisko siebie, że odcinek AB jest jego dobrym przybliżeniem. Podczas obrotu wokół osi Y odcinek ten zakreśla powierzchnię boczną stożka ściętego. Jeśli cząstki ośrodka uderzają z pędem P w kierunku osi Y , to w punkcie A przekazany pęd w kierunku osi Y wynosi $2P \cdot \sin^2(\angle CAx) = 2P \cdot \cos^2(\angle ACx)$. Zatem efektywny opór powierzchni bocznej stożka ściętego o tworzącej AB jest (w przybliżeniu) równy $2P \cdot 2\pi \cdot x \cdot d \cdot \cos^2(\angle ACx)$. Ponieważ kąt $\alpha(x) := \angle ACx$ tworzy styczna do wykresu funkcji f w punkcie A – a jak pamiętamy, $f'(x) = \tan(\alpha(x))$ – więc po skorzystaniu z zależności $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1+\tan^2 \alpha}$ otrzymujemy $\cos^2 \alpha(x) = \frac{1}{1+[f'(x)]^2}$.

Dzieląc teraz wykres funkcji na małe odcinki, sumując opory na wszystkich pierścieniach, otrzymujemy całkowity opór stawiany przez powierzchnię otrzymaną z obrotu wykresu funkcji f wokół osi Y jako

$$2\pi \cdot 2P \int_0^R x \cdot \cos^2 \alpha(x) dx = 2\pi \cdot 2P \int_0^R \frac{x}{1+[f'(x)]^2} dx.$$

Problem sprowadza się więc do znalezienia funkcji f , dla której całka

$\int_0^R \frac{x}{1+[f'(x)]^2} dx$ przyjmuje wartość najmniejszą przy dodatkowym warunku,

że $f(R) - f(0) = H$. Uprościmy to sformułowanie, wprowadzając oznaczenie

$u(x) := f'(x)$. Ponieważ $\int_0^R u dx = \int_0^R f'(x) dx = f(R) - f(0) = H$, więc teraz

problem ma postać:

Problem (N). Wyznaczyć funkcję $u(x)$, dla której całka $\int_0^R \frac{x}{1+u^2} dx$ przyjmuje wartość najmniejszą przy warunku $\int_0^R u(x) dx = H$.

Uprościmy Problem (N), zastępując go problemem bez ograniczeń: spośród wszystkich nieujemnych funkcji $u(x)$ wyznaczyć taką, dla której całka

$\int_0^R \left(\frac{x}{1+u^2} + qu \right) dx$ ma wartość najmniejszą, gdzie liczba $q \geq 0$ jest jeszcze

nieokreślonym (dokładnie) parametrem. Zrobimy to tak, że dla każdego x znajdziemy minimum funkcji $L(u) = \frac{x}{1+u^2} + qu$. Oznaczmy przez $u(x)$ wartość minimum tej funkcji, a potem znajdziemy funkcję f spełniającą $f'(x) = u(x)$ dla wszystkich $x \in [0, R]$.

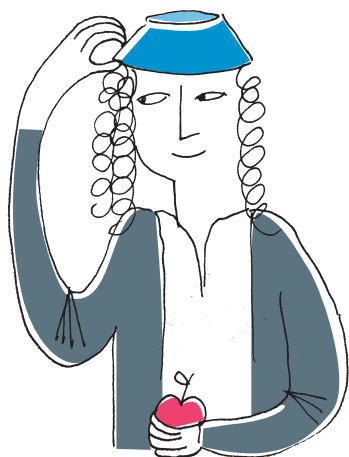
Minimum funkcji $L(u)$ w przedziale $[0, \infty)$ znajdziemy za pomocą pochodnej $L'(u) = -\frac{2xu}{(1+u^2)^2} + q$. Ponieważ $L(u) \rightarrow +\infty$, gdy $u \rightarrow +\infty$, więc funkcja L ma minimum albo w punkcie u , gdzie $L'(u) = 0$, albo na początku przedziału, tj. dla $u = 0$. Jeśli minimum funkcji L jest osiągnięte w punkcie $u \neq 0$, to spełnione są warunki, $L' = 0$ i $L(u) \leq L(0)$, które dają $\frac{q}{x} = \frac{2u}{(1+u^2)^2}$ i $\frac{1}{1+u^2} + \frac{q}{x}u \leq 1$. Stąd otrzymujemy $\frac{1}{1+u^2} + \frac{2u^2}{(1+u^2)^2} \leq 1$, a po dalszych uproszczeniach $u^2 \geq 1$, więc $u \geq 1$. Oznacza to, że dla dowolnego x wartość u może być wyznaczona z równania

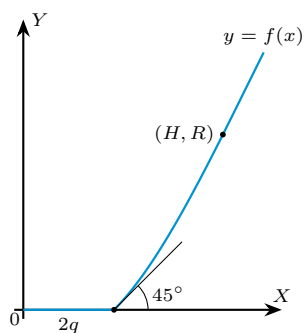
$$(*) \quad x = \frac{q}{2} \left(u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \quad \text{gdzie } u \geq 1.$$

Ponieważ funkcja po prawej stronie jest rosnąca ze względu na zmienną u , więc jej minimum znajduje się w punkcie $u = 1$ i wartość ta jest równa $2q$. Oznacza to, że równanie $(*)$ ustala wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między punktami $x \in [2q, \infty)$ i $u \in [1, \infty)$. Dla każdego $x > 2q$ minimum funkcji $L(u)$ jest osiągnięte przy $u > 1$, dla każdego $x \in [0, 2q)$ minimum jest osiągnięte w punkcie $u = 0$,

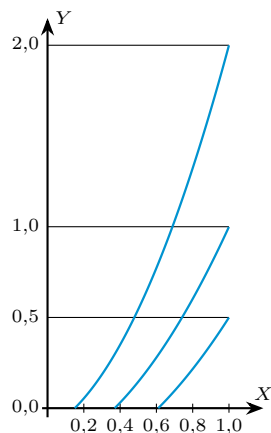
Problem ten zaliczamy dzisiaj do teorii sterowania optymalnego, która w połowie XX wieku wyrosła z rachunku wariacyjnego. Jego dalsze uproszczenie to de facto zastosowanie metody mnożników Lagrange'a, którą Joseph Lagrange (1736–1813) odkrył w wieku 19 lat.

Twierdzenie. Jeśli dla dowolnego x wartość $u = f'(x)$ jest wartością minimalną funkcji $L(u)$ na zbiorze $[0, \infty)$, to f jest rozwiązaniem Problemu (N) dla odpowiednio dobranej wartości H .





Rys. 6. Wykres funkcji $y = f(x)$ na przedziale $[2q, \infty)$ jest styczny w punkcie $x = 2q$ do prostej $y = x - 2q$



Rys. 7. Wykresy funkcji $y = f(x)$ dla $R = 1$ i H przyjmującego wartości $2, 1, \frac{1}{2}$, odpowiednio
O problemie brachistochny pisaliśmy w Δ_{07}^7 .

natomiast dla $x = 2q$ funkcja $L(u)$ osiąga minimum w dwóch punktach: $u = 0$ oraz $u = 1$. Ponieważ $u(x) = f'(x)$, a przy tym $f(0) = 0$, więc optymalna postać funkcji f jest następująca: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$ jej pochodna jest pierwiastkiem równania $L'(u) = 0$ większym od 1.

Pozostaje znaleźć u z równania $L'(u) = 0$. Niestety nie potrafimy tego zrobić bezpośrednio. Traktujmy więc od teraz u jako parametr (z przedziału $[1, \infty)$), za pomocą którego wyrazimy obie współrzędne punktu $(x(u), y(u))$ na wykresie f ; wzór na funkcję $x(u)$ mamy już w równaniu (*). Ponadto postulujemy $f'(x(u)) = u$, więc ze wzoru na pochodną złożenia:

$$y'(u) = (f(x(u)))' = f'(x(u)) \cdot x'(u) = u \cdot x'(u) = \frac{q}{2} \left(3u^3 + 2u - \frac{1}{u} \right).$$

Całkując obie strony, wyznaczamy $y(u) = \frac{q}{2} \left(\frac{3u^4}{4} + u^2 - \ln u + C \right)$, a warunek $y(u = 1) = 0$ wyznacza nam stałą: $C = -\frac{7}{4}$. Ostatecznie znaleźliśmy równania opisujące wykres funkcji $y = f(x)$ będącej rozwiązaniem postawionego problemu: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$,

$$\begin{cases} x = \frac{q}{2} \left(u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \\ y = \frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} u^4 + u^2 - \ln u - \frac{7}{4} \right), \quad u \geq 1, \end{cases}$$

gdzie q znajdujemy z warunku $f(R) = H$ (rys. 6).

* * *

Rozwiązanie problemu aerodynamicznego podane przez Newtona zaskakuje nawet dzisiaj. Powierzchnia, która w ruchu postępowym stawia najmniejszy opór, musi mieć „płaski czubek”! Wielkość spłaszczenia zależy od wartości H i R , co ilustruje rysunek 7.

Rozwiązanie Newtona przeszło bez echa. Świat nauki zachwycił się problemem brachistochny postawionym przez Johanna Bernoulliego (a więc narodzinami rachunku wariacyjnego, 1696), a potem metodą mnożników Lagrange’a i wspaniałymi osiągnięciami Eulera. Tymczasem Isaac Newton, bez rozgłosu, na kilku stronach *Principiów* (1687) wyprzedził swoją epokę o 300 lat.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1151. W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) protony rozpędzane są do energii $E = 6,5 \text{ TeV} = 6,5 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, a ich tor zakrzywiany jest wówczas przez jednorodne pole magnetyczne o indukcji $7,7 \text{ T}$ wytwarzane przez magnesy nadprzewodzące. Ile wynosi promień R krzywizny toru protonów w LHC? Pole magnetyczne jest prostopadłe do prędkości protonów. Jako prędkość światła przyjmij $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

F 1152. Wkrótce po utworzeniu neutralny mezon rozpadł się na dwa fotony: w kierunku uprzedniego lotu mezonu powstał foton o energii $E_1 = 202,5 \text{ MeV}$, a w kierunku wstecznym – o energii $E_2 = 22,5 \text{ MeV}$. Jaka była masa spoczynkowa m_0 mezonu? Z jaką prędkością poruszał się mezon?

Przygotował Dominik BUREK

M 1864. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n można wybrać cztery różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{n, n+1, \dots, n^2\}$ tak, aby $ab = cd$?

M 1865. Dany jest trójkąt różnoboczny, którego długości boków są liczbami całkowitymi dodatnimi a, b, c . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb

$$ab + 1, \quad bc + 1, \quad ca + 1$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

M 1866. Na kwadratowej planszy 11×11 zaznaczono wszystkie 144 wierzchołki pól. Następnie zaznaczone punkty pokolorowano na pięć kolorów. Jakie jest największe możliwe do uzyskania minimum odległości między dwoma jednokolorowymi punktami?

Rozwiązania na str. 24