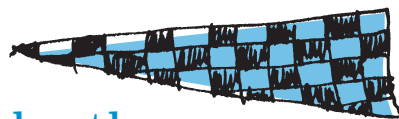


złotej reguły rządzącej Nim na ten moment leży poza ich zasięgiem. Łączy się to zapewne z założeniem, że w przeciwieństwie do szachów czy Go Nim ma nieskończenie wiele pozycji startowych, gdyż ani liczba stosów, ani kamieni nie jest z góry ustalona. Stosów może być tysiąc, milion, miliard i tak ad infinitum... Matematycy od czasów paradoksów Zenona z Elei zmagają się z konceptem nieskończoności i zdążyli nabrać już pewnej wprawy w tej materii. Potrafią spojrzeć na nieograniczoną przestrzeń stanów Nim jako całość, wspiąć się na wyższy poziom abstrakcji i wydestylować strategię wygrywającą. Komputery jeszcze do tego nie dojrzały. Chcąc przerechować każdy możliwy stan po kolei, utykają niczym strzała Zenona, która nigdy nie sięga tarczy.

Prowadzi to wszystko do dość optymistycznego wniosku, że póki co my, ludzie, jesteśmy w stanie spojrzeć „głębiej” niż nasi krzemowi rywale. Owszem, liczymy wolniej i gorzej, i w silnie zaksjomatyzowanych systemach komputery biją nas na głowę. Niemniej, jeśli chodzi o wyjście poza utarte schematy i reguły, człowiek nadal potrafi wieść prym nad maszyną. Pytanie tylko: jak długo?



Trójkąty w kratkę

Łukasz RAJKOWSKI

Zastanówmy się, jakie trójkąty możemy narysować na kartce w kratkę tak, by ich wierzchołki znajdowały się w punktach kratowych? Interesują nas tu ich kształty, a zatem pytanie zadajemy z dokładnością do podobieństwa trójkątów (np. nie odróżniamy trójkąta równobocznego o boku 1 od tego o boku $\sqrt{2}$).

Trójkąt prostokątny równoramienny – wiadomo, . Ale czy każdy trójkąt prostokątny? Gdyby dwa jego boki miały być równoległe do linii kraty, to oczywiście mamy tu pewne ograniczenie: długości jego przyprostokątnych (wyrażone w wielokrotnościach krawędzi kraty) będą całkowite, więc tangensy jego kątów muszą być liczbami wymiernymi. Jednak kratowy trójkąt prostokątny nie musi mieć krawędzi równoległych do linii kraty...

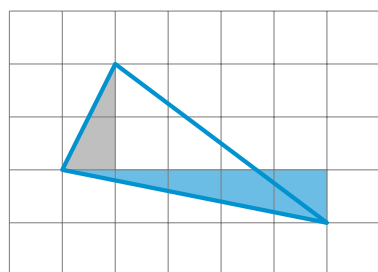
Wymierne tangensy – dobry trop! Jeśli kąty α, β mają wymierne tangensy, to na mocy wzoru

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

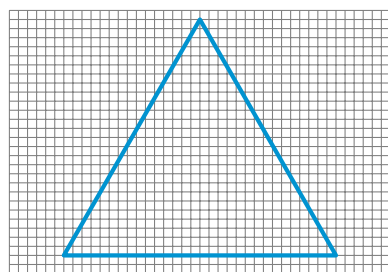
kąt $\alpha + \beta$ również ma wymierny tangens. To samo dotyczy kąta $\alpha - \beta$.

To już załatwia sprawę w pełnej ogólności. Dowolny kąt trójkąta kratowego możemy wyrazić jako sumę lub różnicę kątów *prostokątnych* trójkątów kratowych o przyprostokątnych równoległych do linii siatki (rys. 1). Oznacza to, że wszystkie kąty trójkąta kratowego muszą mieć wymierne tangensy. Działa to również w drugą stronę: jeśli dwa kąty ostre pewnego trójkąta mają tangensy równe $\frac{a}{b}$ oraz $\frac{c}{d}$, gdzie a, b, c, d są liczbami naturalnymi, to trójkąt ten można (z dokładnością do podobieństwa) otrzymać, sklejając dwa kratowe trójkąty prostokątne: jeden o przyprostokątnych długości ac i bc , zaś drugi o przyprostokątnych ac i ad .

Nasza obserwacja ma fatalne konsekwencje natury estetycznej. Tangens kąta 60° jest równy $\sqrt{3}$. Nie jest to liczba wymierna, zatem na papierze w kratkę nie znajdziemy niestety trójkąta równobocznego. Na pocieszenie dodajmy, że na kartce standardowego zeszytu w kratkę formatu A5 możemy narysować trójkąt kratowy będący trójkątem równoramiennym o podstawie długości 15 cm (czyli 30 kratek), równoległej do dłuższego boku zeszytu, oraz wysokości 13 cm (rys. 2). Odchylenie kątów tego trójkąta od 60° nie przekracza $0,04^\circ$. Lepiej na kartce A5 się nie da, ale oszustwo i tak jest raczej nie do wychwycenia przez ludzkie oko. Co ciekawe, na kartce w kratkę formatu A4 też nie da się lepiej, ale da się niebanalnie inaczej, tak by żaden z boków nie był równoległy do krawędzi kartki. Jak? Polecamy zastanowić się samemu!



Rys. 1



Rys. 2