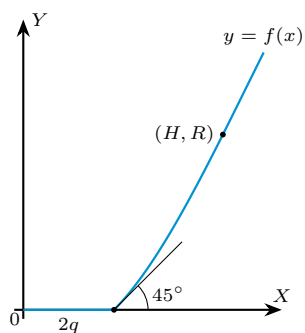
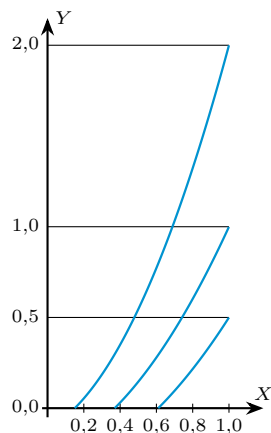




Rys. 6. Wykres funkcji $y = f(x)$ na przedziale $[2q, \infty)$ jest styczny w punkcie $x = 2q$ do prostej $y = x - 2q$



Rys. 7. Wykresy funkcji $y = f(x)$ dla $R = 1$ i H przyjmującego wartości $2, 1, \frac{1}{2}$, odpowiednio
O problemie brachistochny pisaliśmy w Δ_{07}^7 .

natomiast dla $x = 2q$ funkcja $L(u)$ osiąga minimum w dwóch punktach: $u = 0$ oraz $u = 1$. Ponieważ $u(x) = f'(x)$, a przy tym $f(0) = 0$, więc optymalna postać funkcji f jest następująca: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$ jej pochodna jest pierwiastkiem równania $L'(u) = 0$ większym od 1.

Pozostaje znaleźć u z równania $L'(u) = 0$. Niestety nie potrafimy tego zrobić bezpośrednio. Traktujmy więc od teraz u jako parametr (z przedziału $[1, \infty)$), za pomocą którego wyrazimy obie współrzędne punktu $(x(u), y(u))$ na wykresie f ; wzór na funkcję $x(u)$ mamy już w równaniu (*). Ponadto postulujemy $f'(x(u)) = u$, więc ze wzoru na pochodną złożenia:

$$y'(u) = (f(x(u)))' = f'(x(u)) \cdot x'(u) = u \cdot x'(u) = \frac{q}{2} \left(3u^3 + 2u - \frac{1}{u} \right).$$

Całkując obie strony, wyznaczamy $y(u) = \frac{q}{2} \left(\frac{3u^4}{4} + u^2 - \ln u + C \right)$, a warunek $y(u = 1) = 0$ wyznacza nam stałą: $C = -\frac{7}{4}$. Ostatecznie znaleźliśmy równania opisujące wykres funkcji $y = f(x)$ będącej rozwiązaniem postawionego problemu: $f(x) = 0$ dla $x \in [0, 2q]$, a w przedziale $[2q, R]$,

$$\begin{cases} x = \frac{q}{2} \left(u^3 + 2u + \frac{1}{u} \right), \\ y = \frac{q}{2} \left(\frac{3}{4} u^4 + u^2 - \ln u - \frac{7}{4} \right), \quad u \geq 1, \end{cases}$$

gdzie q znajdujemy z warunku $f(R) = H$ (rys. 6).

* * *

Rozwiązanie problemu aerodynamicznego podane przez Newtona zaskakuje nawet dzisiaj. Powierzchnia, która w ruchu postępowym stawia najmniejszy opór, musi mieć „płaski czubek”! Wielkość spłaszczenia zależy od wartości H i R , co ilustruje rysunek 7.

Rozwiązanie Newtona przeszło bez echa. Świat nauki zachwycił się problemem brachistochny postawionym przez Johanna Bernoulliego (a więc narodzinami rachunku wariacyjnego, 1696), a potem metodą mnożników Lagrange’a i wspaniałymi osiągnięciami Eulera. Tymczasem Isaac Newton, bez rozgłosu, na kilku stronach *Principiów* (1687) wyprzedził swoją epokę o 300 lat.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1151. W Wielkim Zderzaczu Hadronów (LHC) protony rozpędzane są do energii $E = 6,5 \text{ TeV} = 6,5 \cdot 10^{12} \text{ eV}$, a ich tor zakrzywiany jest wówczas przez jednorodne pole magnetyczne o indukcji $7,7 \text{ T}$ wytwarzane przez magnesy nadprzewodzące. Ile wynosi promień R krzywizny toru protonów w LHC? Pole magnetyczne jest prostopadłe do prędkości protonów. Jako prędkość światła przyjmij $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.

F 1152. Wkrótce po utworzeniu neutralny mezon rozpadł się na dwa fotony: w kierunku uprzedniego lotu mezonu powstał foton o energii $E_1 = 202,5 \text{ MeV}$, a w kierunku wstecznym – o energii $E_2 = 22,5 \text{ MeV}$. Jaka była masa spoczynkowa m_0 mezonu? Z jaką prędkością poruszał się mezon?

Przygotował Dominik BUREK

M 1864. Dla jakich liczb całkowitych dodatnich n można wybrać cztery różne liczby a, b, c, d ze zbioru $\{n, n+1, \dots, n^2\}$ tak, aby $ab = cd$?

M 1865. Dany jest trójkąt różnoboczny, którego długości boków są liczbami całkowitymi dodatnimi a, b, c . Udowodnić, że co najmniej jedna z liczb

$$ab + 1, \quad bc + 1, \quad ca + 1$$

nie jest kwadratem liczby całkowitej.

M 1866. Na kwadratowej planszy 11×11 zaznaczono wszystkie 144 wierzchołki pól. Następnie zaznaczone punkty pokolorowano na pięć kolorów. Jakie jest największe możliwe do uzyskania minimum odległości między dwoma jednokolorowymi punktami?

Rozwiązania na str. 24

Rozwiązania zadań ze strony 12



Rozwiązanie zadania M 1864.

Odpowiedź: dla wszystkich $n \geq 3$.

Zauważmy, że jeśli $n \geq 3$, to wśród liczb od n do n^2 znajdują się cztery różne liczby

$$n < n+1 < 2n < 2n+2,$$

dla których zachodzi równość

$$n(2n+2) = 2n(n+1).$$

(Uzasadnienie, że dla $n \geq 3$ mamy $2n+2 \leq n^2$, pozostawiamy Czytelnikom).

Jeśli zaś $n \leq 2$, to w zbiorze są mniej niż 4 liczby, więc nie da się wybrać czterech różnych liczb.



Rozwiązanie zadania M 1865.

Przypuśćmy przeciwnie, że wszystkie trzy liczby

$$ab+1, \quad bc+1, \quad ca+1$$

są kwadratami. Bez straty ogólności założmy, że $a < b < c$.

Z nierówności trójkąta mamy wtedy $a+b > c$.

Zauważmy, że liczby $(ca+1)(cb+1)$ oraz $c^2(ab+1)$ są kwadratami. Istnieją więc liczby całkowite x, y takie, że

$$(ca+1)(cb+1) = x^2 \quad \text{oraz} \quad c^2(ab+1) = y^2.$$

Wtedy liczba

$$d := x^2 - y^2 = (ca+1)(cb+1) - c^2(ab+1) = c(a+b-c) + 1$$

jest dodatnia, skąd $x > y$, a więc $x \geq y+1$. Zatem

$$d = x^2 - y^2 \geq (y+1)^2 - y^2 = 2y+1.$$

Ponieważ $y = c\sqrt{ab+1}$, to

$$d \geq 2c\sqrt{ab+1} + 1.$$

W szczególności $d > 2ac + 1$. Z kolei ponieważ $c > b$, to

$$ac+1 > c(a+b-c) + 1 = d.$$

Ostatecznie więc

$$d \geq 2c\sqrt{ab+1} + 1 > 2ac + 1 > ac + 1 > c(a+b-c) + 1 = d,$$

sprzeczność.



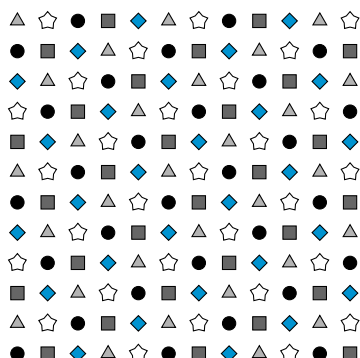
Rozwiązanie zadania M 1866.

Odpowiedź: $\sqrt{5}$.

Rozważmy w naszym kwadracie dowolne dwie kratki mające wspólny bok. Mają one łącznie 6 wierzchołków, a odległość między dowolnymi dwoma spośród nich nie przekracza $\sqrt{5}$.

Ponieważ punktów tych jest 6, a kolorów tylko 5, to z zasady szufladkowej Dirichleta dwa z tych punktów mają ten sam kolor. Zatem w każdym przypadku znajdują się dwa jednokolorowe punkty w odległości nie większej niż $\sqrt{5}$.

Następujący przykład dowodzi, że ograniczenie $\sqrt{5}$ jest optymalne.



Rozwiązanie zadania F 1151.

W polu magnetycznym o indukcji $\vec{B}$ na protony o ładunku e (ładunek elementarny) poruszające się z prędkością $\vec{v}$ działa siła Lorentza $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$. Równanie ruchu (Newtona) wiąże szybkość zmiany pędu $\vec{p}$ z działającą siłą. Mamy:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Masa spoczynkowa protonu wynosi około

$1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV} = 10^{-3} \text{ TeV}$, a więc proton o energii 6,5 TeV porusza się z prędkością praktycznie równą prędkości światła c . Pęd cząstki poruszającej się z prędkością porównywalną z prędkością światła wynosi:

$$\vec{p} = \gamma m_0 \vec{v}, \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}.$$

Przepiszmy równanie ruchu, wykorzystując relatywistyczny związek między $\vec{v}$ i $\vec{p}$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \left(\frac{e}{\gamma m_0} \right) \vec{p} \times \vec{B}.$$

Iloczyn wektorowy po prawej stronie jest prostopadły do $\vec{B}$ i do $\vec{p}$, co oznacza, że zgodnie z tym równaniem (wektor $\vec{B}$ ma stałą wartość, kierunek i zwrot) zmienia się jedynie kierunek wektora $\vec{p}$, a jego długość pozostaje bez zmian – ruch odbywa się po okręgu o promieniu R , a szybkość, z jaką obraca się wektor prędkości $\vec{v}$ (prędkość kąтова ruchu), wynosi:

$$\frac{v}{R} = \frac{eB}{\gamma m_0}.$$

Otrzymujemy:

$$R = \frac{\gamma m_0 v}{eB} \approx \frac{E}{eBc}.$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z faktu, że $v \approx c$ oraz $E = \gamma m_0 c^2$. Liczbowo otrzymujemy $R \approx 2,8 \cdot 10^3 \text{ m}$ (dokładna wartość podawana w dokumentach technicznych LHC to $R = 2803 \text{ m}$). Długość LHC (26 659 m) jest większa niż 2π razy otrzymana tu wartość R , bo tunel, w którym biegnie wiązka, nie jest dokładnie okręgiem (są odcinki proste), a pole zakrzywiające wiązkę ma na niektórych odcinkach bardziej skomplikowaną formę niż przyjęte tu pole jednorodne.



Rozwiązanie zadania F 1152.

Prawa zachowania pędu i energii pozwolą nam znaleźć energię i pęd mezonu. Energia całkowita E mezonu była równa sumie energii fotonów: $E = E_1 + E_2 = 225 \text{ MeV}$. Pęd mezonu także był równy sumie pędów fotonów. Po rozpadzie fotony poruszały się wzdłuż tej samej prostej co mezon przed rozpadem. Przyjmijmy zwrot ruchu mezonu przed rozpadem za dodatni. Energia fotonu równa jest iloczynowi wartości jego pędu i prędkości światła c . Pęd p mezonu przed rozpadem wynosił więc:

$$p = E_1/c - E_2/c = 180 \text{ MeV}/c.$$

Dla obliczenia masy spoczynkowej m_0 mezonu skorzystamy z tożsamości:

$$m_0 c^2 = \sqrt{E^2 - c^2 p^2}.$$

Liczbowo otrzymujemy $m_0 c^2 = 135 \text{ MeV}$, natomiast prędkość wyznaczmy ze związku:

$$\frac{v}{c} = \frac{cp}{E} = 180/225 = 0,8.$$

Otrzymujemy, że rozpadł się mezon o masie $m_0 = 135 \text{ MeV}/c^2$ (mezon π^0), o energii całkowitej $E = 225 \text{ MeV}$, poruszający się z prędkością $v = 0,8c \approx 2,4 \cdot 10^8 \text{ m/s}$.