



Kółko i krzyżyk, i jeszcze więcej

Bartłomiej BZDEGA*

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Gra kółko i krzyżyk jest szczególnym przypadkiem gier MM (ang. *maker-maker*), które określamy następująco. Skończony zbiór Ω jest planszą, niektóre jego podzbiory nazywamy *wygrываяjącymi*; przez W będziemy oznaczać ich rodzinę. Gracz I (czerwony) koloruje elementy zbioru Ω na czerwono, a gracz II (niebieski) – na niebiesko. Celem każdego gracza jest pokolorowanie w całości jednego ze zbiorów *wygrываяjących* (używa się również określenia *zajęcie* lub *zbudowanie*).

Argument kradzieży strategii (zob. poprzedni kącik) pozwala wykazać, że gra MM jest wygrana dla gracza I lub remisowa. Tutaj podamy naturalną strategię gracza II, która niekiedy gwarantuje mu remis. Idea jest następująca – gracz niebieski zapomina o tym, że ma zajmować zbiory *wygrываяjące* i skupi się jedynie na przeszkadzaniu w tym czerwonemu.

W ustalonej pozycji T , dla każdego zbioru $W \in \mathcal{W}$, zdefiniujemy jego *potencjał* $\rho_T(W)$, który jest tym większy, im łatwiej gracz I może ten zbiór w całości zająć. Kluczowe będą następujące warunki:

- (1) $0 \leq \rho_T(W) \leq 1$, a potencjał równy 1 mają wyłącznie całe czerwone zbiory;

- (2) po pokolorowaniu jednego z elementów na niebiesko potencjał danego zbioru zeruje się;
- (3) po pokolorowaniu jednego z elementów na czerwono potencjał danego zbioru wzrasta dwukrotnie.

Tylko jedna funkcja je spełnia:

$$\rho_T(W) = \begin{cases} 1/2^b & \text{jeśli czerwonemu brakuje } b \text{ elementów} \\ & \text{do zajęcia zbioru } W, \\ 0 & \text{jeśli zbiór } W \text{ ma co najmniej} \\ & \text{jeden element niebieski.} \end{cases}$$

Potencjałem pozycji T nazwiemy sumę potencjałów wszystkich zbiorów *wygrываяjących* i oznaczmy go przez $\sigma(T)$. Odnotujmy, że jeśli $\sigma(T) < 1$, to na mocy (1) gracz czerwony nie ma jeszcze żadnego zbioru *wygrываяjącego*.

Dla niepokolorowanego $x \in \Omega$ w pozycji T niech $g_T(x)$ oznacza sumę potencjałów wszystkich zbiorów *wygrываяjących*, zawierających x . Pokolorowanie elementu x na niebiesko skutkuje zmniejszeniem $\sigma(T)$ o $g_T(x)$ (warunek (2)), a na czerwono – zwiększeniem o $g_T(x)$ (warunek (3)).

Najbardziej naturalna strategia gracza II to minimalizacja sumy wszystkich potencjałów lub równoważnie – kolorowanie takiego x , dla którego wartość $g_T(x)$ jest najwyższa.

Przypuścimy, że T_0 jest pozycją z ruchem niebieskiego gracza, który koloruje optymalny element x , przechodząc do pozycji T_1 . Następnie gracz czerwony koloruje element y , przechodząc do pozycji T_2 . Mamy $\sigma(T_2) = \sigma(T_0) - g_{T_0}(x) + g_{T_1}(y)$, a ponadto $g_{T_1}(y) \leq g_{T_0}(y) \leq g_{T_0}(x)$, więc $\sigma(T_1) \leq \sigma(T_2) \leq \sigma(T_0)$. Strategia gracza II gwarantuje zatem, że do samego końca rozgrywki potencjał pozycji nigdy nie przekroczy $\sigma(T_0)$. W takim razie wykazaliśmy:

Twierdzenie Erdősa–Selfridge’a. Jeśli w grze MM gracz I nie może w pierwszym ruchu otrzymać pozycji z potencjałem co najmniej 1, to gra jest remisowa.*

W praktyce sprawdza się, czy potencjał pozycji początkowej jest mniejszy niż $\frac{1}{2}$, gdyż gracz I w swoim ruchu może co najwyżej podwoić potencjał pozycji.

Zadania

1. Oznaczmy przez $KK(n, k)$ uogólnioną grę *kółko i krzyżyk* – na planszy $n \times n$ wygraną daje k znaczków pod rząd (pionowo, poziomo lub skośnie). Wykazać, że jeśli $k \geq 2 \log_2 n + 3$, to gra $KK(n, k)$ jest remisowa.
2. Gracze na zmianę kolorują, każdy swoim kolorem, krawędzie dwudziestościanu ściętego („piłki nożnej”), a zwycięstwo daje pokolorowanie wszystkich krawędzi należących do jednej ze ścian. Rozstrzygnąć tę grę.
3. Dane są liczby naturalne $k \geq 3$ oraz $n < 2^{k/2}$. Udowodnić, że liczby $1, 2, \dots, n$ można pokolorować dwoma kolorami w taki sposób, żeby żadne k liczb tego samego koloru nie tworzyło ciągu arytmetycznego.
4. Ustalmy stałą $c \in [0, 1]$. Rozważmy grę na planszy $n \times n$ podobną do uogólnionego *kółka i krzyżyka*. Celem jest uzyskanie co najmniej cn znaczków w jednej linii poziomej lub pionowej, ale niekoniecznie pod rząd. Wykazać, że istnieją stałe $c_0, c_1 \in (0, 1)$ o następującej własności:
 - (a) jeśli $c > c_0$, to gra jest remisowa dla dostatecznie dużych n ;
 - (b) jeśli $c < c_1$, to gra jest wygrana dla dostatecznie dużych n .

*Sformułowanie, na potrzeby kącika, jest nieco inne niż oryginalne.

Wskazówki do zadań

1. Liczba zbiorów *wygrываяjących* jest mniejsza niż $4n^2/2^k$, więc potencjał pozycji początkowej jest mniejszy niż $4n^2/2^k$.
2. Niech $W(n, k)$ oznacza stwierdzenie, że gra $KK(n, k)$ jest wygrana dla gracza I, a $D(n, k)$ – że jest remisowa. Intuicja podpowiada, że:
(1) $W(n, k) \Rightarrow D(n+1, k)$;
(2) $D(n, k) \Rightarrow D(n+1, k+1)$.
Jest to najbardziej frustrujący problem teorii gier – nikomu jeszcze nie udało się ani udowodnić, ani obalić żadnej z powyższych implikacji (choć są one prawdziwe dla podobnej klasy gier – *maker-breaker*).
3. Potencjał pozycji po dowolnym pierwszym ruchu gracza I jest mniejszy niż 1.
4. Rozważmy grę na planszy $\Omega = \{1, 2, \dots, n\}$, w której rodzinę W stanowią k -wyrazowe podzbiory arytmetyczne. Ta gra jest remisowa, więc wystarcząca do dowodzenia z pozycji końcowej w remisowej rozgrywce.
4. Nietrudno zauważyć, że $c_1 = \frac{1}{2}$ spełnia nasze oczekiwania. Dalej niech $c > \frac{1}{2}$ i zapiszmy $c = 1 - \varepsilon$. Z wykorzystaniem oszacowania $\binom{n}{k} \leq (en/k)^k$ dla $k = \varepsilon n$ dowodzimy, że jeśli zachodzi nierówność $4n > \binom{n}{\varepsilon n} \left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\varepsilon n}$, to potencjał pozycji początkowej jest mniejszy od $\frac{1}{2}$.
Chcilibyśmy, żeby $\left(\frac{2\varepsilon}{\varepsilon} \right)^{\varepsilon n}$ było tak małe, dla $\varepsilon > c_{\max} \approx 0.2378$, więc można wziąć $c_0 = 1 - \varepsilon_{\max}$.
Ciekawostka. József Beck wykazał, że teża jest prawdziwa dla $c_0 = c_1 = \frac{1}{2}$ (2008).