

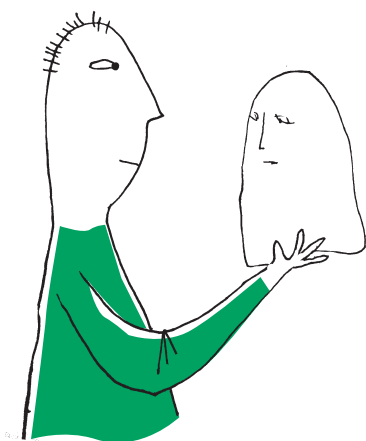
Rys. 12. Optyczne własności paraboli przedstawia artykuł Joanny Jaszuńskiej w Δ_{18}^6 .

Zaniedbaliśmy możliwość zmian kierunku ruchu, występowanie energii cieplnej, strukturę materiału, itp. Bądźmy jednak optymistami. Wiele istniejących dzisiaj rzeczy (rozwiązań) kiedyś uważano za abstrakcyjne.

O niewidzialnych bryłach opowiemy w następnej części.

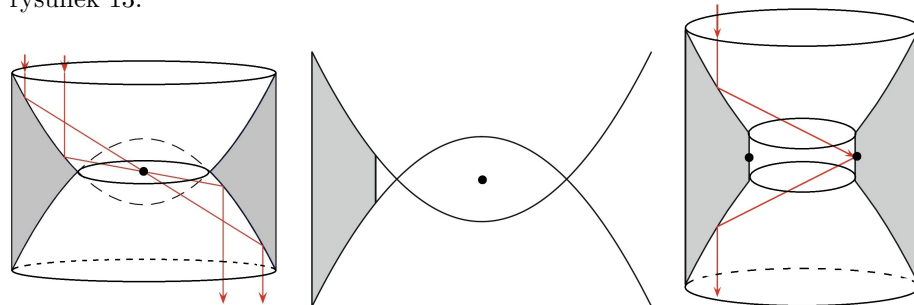


Zadania



Rozwiązania na str. 24

dalej jako wiązka równoległa do osi symetrii paraboli (rys. 12). Również na odwrót, wiązka promieni równoległych do osi symetrii paraboli – po odbiciu od „wewnętrznej strony” krzywej – skupia się w jej ognisku. Tak samo jest dla trójwymiarowej paraboloidy obrotowej otrzymanej przez obrót paraboli wokół jej osi symetrii. Ideę konstrukcji brył opartych na tym pomysłe przedstawia rysunek 13.



Rys. 13. Zaznaczone punkty to wspólne ogniska „przeciwnie skierowanych” parabol o wspólnych osiach symetrii

Niestety, to tylko rozważania teoretyczne w rozrzedzonym ośrodku, które nie uwzględniają wielu aspektów (patrz margines), a ponadto prawdziwe są twierdzenia:

Twierdzenie (Alexander Plakhov, Vera Roshchina, 2011).

- Istnieje bryła, której powierzchnia stawia zerowy opór w przypadku ruchu w dwóch prostopadłych kierunkach.
- Nie istnieje bryła, której powierzchnia stawia zerowy opór we wszystkich kierunkach.

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1153. Żaglowa łódź o masie $M = 1000$ kg jest unieruchomiona w obszarze równikowej ciszy. Kapitan próbuje ją „uruchomić”, wciągając na maszt skrzynię o masie $m = 200$ kg. Jaką maksymalną prędkość u może osiągnąć łódź, jeśli środek masy skrzyni został podniesiony na wysokość $h = 20$ m, a łódź znajduje się dokładnie na równiku? Równikowy promień Ziemi wynosi $R = 6378$ km, a doba trwa $T = 86\,400$ s.

F 1154. Wykonano pomiary zależności od temperatury, T , ciśnienia pary amoniaku nad jego fazą stałą, $p_s(T)$, oraz nad jego fazą ciekłą, $p_l(T)$. Wyniki z dobrym przybliżeniem opisują wzory ($p_0 = 1$ Pa, $T_0 = 1$ K):

$$\ln \frac{p_s}{p_0} = 27,92 - \frac{3754T_0}{T}, \quad \ln \frac{p_l}{p_0} = 24,38 - \frac{3063T_0}{T}.$$

Wyznacz współrzędne (p_t, T_t) punktu potrójnego amoniaku.

Przygotował Dominik BUREK

M 1867. Dana jest liczba pierwsza $p > 2$. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych dodatnich a i b takich, że

$$\frac{a}{p} + \frac{p}{b} = 2.$$

M 1868. Na tablicy wypisano 2026 parami różnych liczb naturalnych większych od 1. Okazało się, że dla każdej wypisanej liczby a istnieje co najmniej k par wypisanych liczb $b < c$, dla których liczba $bc - 1$ jest podzielna przez $a - 1$. Wyznaczyć największą możliwą wartość k .

M 1869. Dany jest czworokąt przestrzenny $ABCD$, którego boki AB , BC , CD , DA są styczne do pewnej sfery, odpowiednio, w punktach K , L , M i N . Udowodnić, że:

- punkty K , L , M i N leżą na jednej płaszczyźnie, a na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg;
- środek okręgu opisanego na czworokącie $KLMN$ leży na płaszczyźnie wyznaczonej przez środki odcinków AC i BD oraz środek sfery.

Rozwiązania zadań ze strony 6



Rozwiązanie zadania M 1867.

Odpowiedź: Szukane pary (a, b) to (p, p) oraz $(2p - 1, p^2)$.

Mnożąc równość przez pb , otrzymujemy

$$ab + p^2 = 2pb,$$

skąd $p^2 = (2p - a)b$.

Zatem b jest dzielnikiem liczby p^2 , skąd b jest równe 1, p lub p^2 .

Jeśli $b = 1$, to $2p - a = p^2$, zatem $a = 2p - p^2 = p(2 - p) < 0$, więc ten przypadek jest niemożliwy.

Jeśli $b = p$, to $2p - a = p$, skąd $a = p$ i dostajemy parę $(a, b) = (p, p)$.

Jeśli $b = p^2$, to $2p - a = 1$, skąd $a = 2p - 1$ i dostajemy parę $(a, b) = (2p - 1, p^2)$. Łatwo sprawdzamy, że znalezione pary spełniają warunki zadania.



Rozwiązanie zadania M 1868.

Odpowiedź: $k = 1012$.

Najpierw pokażemy, że taka wartość jest możliwa. Wypiszmy na tablicy liczby

$$2^1, 2^2, \dots, 2^{2026}.$$

Weźmy dowolną z nich, powiedzmy $a = 2^n$. Dla każdego $m \in \{1, 2, \dots, 2026\}$ wybierzmy liczbę $r \in \{1, 2, \dots, n\}$ taką, że $m + r$ jest podzielne przez n .

Przyjrzyjmy się, kiedy $r = m$. Wtedy $m \leq n$ (bo $r \leq n$) oraz $2m$ jest podzielne przez n , więc możliwe są co najwyżej dwa takie wykładniki: $m = n$ oraz, gdy n jest parzyste, $m = n/2$. Zatem co najmniej 2024 wykładniki m można połączyć z innym wykładnikiem r tak, że $m + r$ jest podzielne przez n . Wtedy

$$2^m \cdot 2^r - 1 = 2^{m+r} - 1$$

jest podzielne przez $2^n - 1 = a - 1$. Każda para została policzona co najwyżej dwa razy, więc dla danego a mamy co najmniej 1012 par.

Pozostaje udowodnić, że więcej być nie może. Niech a będzie największą spośród liczb wypisanych na tablicy. Liczba a nie może występować w żadnej z rozważanych par dla tej właśnie wartości a , bo gdyby $ax - 1$ było podzielne przez $a - 1$ dla pewnej wypisanej liczby $1 < x < a$, to $z \equiv 1 \pmod{a - 1}$ wynikałoby

$$x - 1 \equiv 0 \pmod{a - 1},$$

co jest niemożliwe, gdyż $0 < x - 1 < a - 1$.

Pokażemy teraz, że każda z pozostałych 2025 liczb może należeć do co najwyżej jednej rozważanej pary. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna wypisana liczba m tworzy dwie pary z różnymi liczbami k i n . Wtedy

$$mk - 1 \equiv mn - 1 \equiv 0 \pmod{a - 1}.$$

W szczególności m jest względnie pierwsze z $a - 1$, a po odjęciu dostajemy

$$m(k - n) \equiv 0 \pmod{a - 1},$$

czyli $k - n$ jest podzielne przez $a - 1$. Jednak liczby k i n są mniejsze od a , więc

$$|k - n| < a - 1,$$

sprzeczność. Zatem rozważane pary tworzą rozłączne pary wśród najwyżej 2025 liczb, więc jest ich co najwyżej

$$\left\lfloor \frac{2025}{2} \right\rfloor = 1012.$$



Rozwiązanie zadania M 1869.

(i) Niech X i Y będą punktami przecięcia prostej AC z prostymi KL i MN . Korzystając z twierdzenia Menelaosa (patrz np. Δ_{03}) oraz równości odcinków stycznych do sfery, poprowadzonych z tego samego punktu, dostajemy

$$\frac{AX}{XC} = \frac{AK}{LC} = \frac{AN}{MC} = \frac{AY}{YC}.$$

Oznacza to, że $X = Y$, a zatem punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Jej przecięcie ze sferą to okrąg opisany na czworokącie $KLMN$.

(ii) Niech π będzie płaszczyzną, na której leży czworokąt $KLMN$, a ω – okręgiem na nim opisanym. Niech A', B', C' i D' będą rzutami prostymi punktów A, B, C i D , odpowiednio, na płaszczyznę π . Skoro $AK = AN$, to $A'K = A'N$, analogicznie uzasadniamy $B'K = B'L$, $C'L = C'M$ oraz $D'M = D'N$ i dlatego ω jest okręgiem wpisanym w czworokąt $A'B'C'D'$. Obrazami środków odcinków AC i BD w tym rzucie są środki przekątnych czworokąta $A'B'C'D'$. Na mocy twierdzenia Newtona (patrz Δ_{07}) leżą one na jednej prostej k wraz ze środkiem I okręgu ω . Ponieważ odcinek OI jest prostym do π , płaszczyzna przechodząca przez k i O zawiera wszystkie punkty z tezy zadania.



Rozwiązanie zadania F 1153.

Poszukując maksymalnej prędkości, zaniedbamy opór powietrza i opór związany z ruchem po powierzchni wody. Siła podnosząca skrzynię działa wzdłuż promienia Ziemi, a więc moment pędu układu nie zmienia się. Przed wciągnięciem skrzyni na szczyt masztu łódź i skrzynia spoczywały względem powierzchni Ziemi obracającej się z prędkością kątową $\omega = 2\pi/T$. Po podniesieniu skrzyni łódź zaczyna poruszać się względem wody, to znaczy jej prędkość kątowa wynosi teraz ω' . Ułożymy bilans momentu pędu:

$$MR^2\omega = (M - m)R^2\omega' + m(R + h)^2\omega'.$$

Otrzymujemy

$$\omega' = \frac{MR^2\omega}{MR^2 + 2hRm + mh^2} \approx \frac{\omega}{1 + \frac{2mh}{MR}} \approx \omega \left(1 - \frac{2mh}{MR}\right).$$

W pierwszym przybliżeniu pominęliśmy wyraz rzędu h^2/R^2 , a w drugim rozwinęliśmy ułamek do wyrazów liniowych w h/R . Prędkość łodzi wynosi więc

$$u = \omega'R - \omega R \approx -2mh\omega/M = -4\pi mh/(MT).$$

Minus oznacza ruch wzdłuż równika na zachód. Liczbowo $u = 5,82 \cdot 10^{-4}$ m/s, czyli tylko nieco ponad pół milimetra na sekundę.

Uwaga: Czytelnik Dociekliwy zapyta zapewne o równanie ruchu łodzi. Rozpatrzmy ten ruch w układzie nieinercyjnym związanym z Ziemią. W układzie nieinercyjnym należy uwzględnić siły bezwładności. Na skrzynię poruszającą się w górę (kierunek osi z) z prędkością $\vec{v} = (0, 0, v)$, poza siłą odśrodkową, która ułatwia podnoszenie skrzyni, działa też siła Coriolisa $\vec{F}_C = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$. Skrzynia jest sztywno związana z masztem, a wraz z nim także z resztą łodzi, więc siła $\vec{F}_C$ działa na całą łódź. Równanie ruchu łodzi ma zatem postać

$$M \frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}_C = -2m\vec{\omega} \times \left(0, 0, \frac{dz}{dt}\right).$$

Po scałkowaniu obu stron względem czasu od 0 do τ oznaczającego czas wciągania skrzyni na maszt, otrzymujemy ($u = u_z(\tau)$, $z(\tau) = h$): $u = -2mh\omega/M$, czyli nasz poprzedni wynik.



Rozwiązanie zadania F 1154.

Dla układu jednoskładnikowego istnieje tylko jeden punkt, w którym mogą jednocześnie współistnieć fazy: stała, ciekła i gazowa (para). Taki punkt nazywany jest punktem potrójnym badanego składnika. W tym punkcie, w przestrzeni zmiennych (p, T) , zbiegają się krzywe $p_s(T)$ i $p_l(T)$. Punkt ten wyznaczony jest więc równaniem

$$p_s(T_t) = p_l(T_t).$$

Podstawiając podane w treści zadania wzory przybliżone otrzymujemy

$$T_t = \frac{3754 - 3063}{27,92 - 24,38} T_0 \approx 195,2 T_0.$$

Podstawienie wartości T_t do wzoru opisującego $p_s(T)$ lub $p_l(T)$ pozwala wyznaczyć $p_t \approx 5933 p_0$. Po podstawieniu wartości p_0 i T_0 otrzymujemy $p_t = 5933$ Pa i $T_t = 195,2$ K.