

materii, ale już blisko powierzchni, bo na głębokościach poniżej 1 μm . Wydajność takiego moderatora (czyli spowalniacza) jak wolfram jest niewielka, bo na 10^4 pozytonów implantowanych ze źródła ^{22}Na tylko jeden jest wyrzucany z równie niską energią. Pomimo tego jest to wystarczające, aby uzyskać strumień – jak je nazywamy – powolnych pozytonów. Powstał tu ogromny obszar badań dotyczący defektów zlokalizowanych przy powierzchni, np. w półprzewodnikach istotnych z punktu widzenia współczesnej elektroniki. Można już dziś mówić o tzw. profilometrii pozytonowej.

O ile źródła pozytonów emitowane w rozpadach β^+ nie są zbyt wydajne, o tyle zastosowanie liniowych akceleratorów elektronowych pozwala uzyskać naprawdę wysokie wydajności. Przyspieszony we wspomnianych akceleratorach do energii około 30 MeV elektron uderza w tarczę, np. wolframową, produkując podczas hamowania ogromny strumień fotonów. Jeśli taki foton znajdzie się w pobliżu jądra atomowego, to w procesie reakcji może zamienić się w parę pozyton–elektron. Tarcza wolframowa wypełnia się pozytonami, z których część jest wyrzucana na powierzchnię, a dalej procedura przebiega jak wyżej. Uzyskane w ten sposób strumienie powolnych pozytonów są o trzy, cztery rzędy wielkości większe niż w przypadku użycia emiterów β^+ . Pozwala to przymierzyć się do naprawdę marzycielskich pomysłów, takich jak na przykład laser z użyciem pozytu, czy kondensat Bosego–Einsteina pozytonów. W takiej instalacji, jaka znajduje się w Instytucie Fizyki Promieniowania w Dreźnie-Rossendorfie, wiązkę dodatkowo szatkuje się na paczki, które w równych odstępach czasu uderzają w próbkę, ale na głębokości już poniżej 0,2 μm . Dalej za pomocą specjalnej aparatury mierzy się w tym obszarze widma czasów życia. Widmo takie już po czasie kilku minut zawiera około 10^7 zliczeń anihilacyjnych zdarzeń. W japońskim Instytucie Nauki o Strukturze Materiałów w Tsukubie używa się tak uzyskanej wiązki do dyfrakcji pozytonów na powierzchni kryształów. Dodatkowo naładowany pozyton,

poruszając się pod niewielkim kątem do badanej powierzchni, skanuje tylko pierwszą warstwę atomową, nie wnikając do wnętrza struktury. Dyfrakcyjny obraz rozproszonych pozytonów powstaje na luminescencyjnej tarczy ustawionej prostopadłe do tej powierzchni.

Na końcu należy wspomnieć o diagnostycznej technice medycznej nazwanej PET, czyli tomografii pozytonowej. Komórki guzów nowotworowych rozwijające się u chorych osób, charakteryzują się wysokim zapotrzebowaniem na glukozę, znacznie wyższym niż zdrowe komórki. Wystarczy do glukozy przytwierdzić β^+ izotop, na przykład ^{18}F , i wstrzyknąć tak przygotowany preparat do ciała pacjenta. Izotop ten, z czasem połowicznego zaniku około 110 min., emituje pozyton – który przecież musi anihilować, bo elektrony są wszędzie – produkując dwa kolinearne kwanty. Wystarczy teraz otoczyć pacjenta detektorami i zrekonstruować mapę miejsc anihilacyjnych zdarzeń. Tam, gdzie izotopu będzie najwięcej, a więc w samym guzie nowotworowym, detektor ujawni większą liczbę anihilacji niż w otoczeniu. Pozwala to zlokalizować samego guza, jeśli się rozwija, i określić jego rozmiar. Istnieją już w naszym kraju ośrodki prowadzące taką diagnostykę, która staje się standardową metodą w diagnostyce i terapii nowotworowej.

Jeśli Czytelnik chciałby zapoznać się bliżej z anihilacją pozytonów, autor zachęca do odwiedzenia strony: ifj.edu.pl/private/jdryzek/.

Jako autor zajmujący się od wielu, wielu lat techniką anihilacji pozytonów, jestem pewien, że jeszcze nieraz nas zaskoczą. Pozyton to lekka cząstka, o stosunkowo małej masie spoczynkowej, łatwa do wyprodukowania w energetycznych procesach. Może być ona pomocna w poszukiwaniu rozpadu protonu czy rozpadu cząstek ciemnej materii. Jakież anomalne zachowania w strumieniu pozytonów, docierających z kosmosu, mogą być sygnałem takich procesów. Fakt, że pozytony są obecne w centrum naszej galaktyki jako wynik rozpadów izotopów promieniotwórczych został stwierdzony już dawno, ale czy tylko tam?

Zagrajmy w Sopera

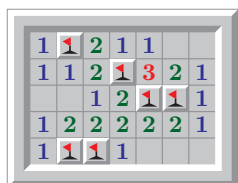
Tomasz CIEŚLA*

*Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Czytelnicy, którzy mieli styczność ze starszymi wersjami systemu operacyjnego Windows, z pewnością korzystali z dostępnych tam pasjansów Solitaire i FreeCell oraz gier: zręcznościowej Pinball, karcianej Kierki czy logicznej Saper. W artykule przyjrzymy się bliżej ostatniej z nich.

Zasady

Gra w Sopera polega na odkrywaniu pól prostokątnej planszy $m \times n$, na której ukryto k min (liczba ta jest znana uczestnikowi przed rozpoczęciem rozgrywki). Miny rozmieszczone są losowo – każdy układ pojawia się w grze z takim samym prawdopodobieństwem. Gdy pole z miną zostanie odkryte, dochodzi do wybuchu, a gracz przegrywa. W przeciwnym razie na odkrytym polu pojawia się liczba sąsiednich pól, na których są ukryte miny (pola sąsiadują, jeśli stykają się bokiem lub wierzchołkiem). Celem gry jest zlokalizowanie wszystkich min. Dla przejrzystości, pola z zerem wyświetlane są jako puste, a żeby przyspieszyć rozgrywkę, odkrycie takiego pola automatycznie odsłania również wszystkie pola sąsiednie. Gracz ma możliwość stawiania flag na polach – oznacza w ten sposób miejsca, w których znajduje się mina.

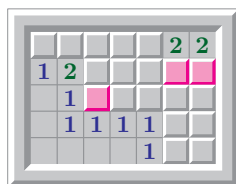


Przykładowa pozycja końcowa na planszy 7×5 , na której ukryto 6 min.

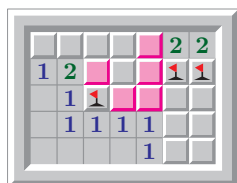
Podstawowe techniki

Liczby na odsłanianych polach dają graczowi informacje, które można wykorzystać do lokalizacji min. Często ze stuprocentową pewnością uda nam się odkryć pole lub oznaczyć je flagą. Przydatne są następujące dwie proste obserwacje.

- Jeśli na polu jest liczba j i pole to sąsiaduje z dokładnie j nieodkrytymi polami, to na każdym z nich jest mina.
- Jeśli na polu jest liczba j oraz postawiliśmy już j flag na polach sąsiednich, to można odkryć pozostałe sąsiednie pola.



Na zaznaczonych polach znajdują się miny.



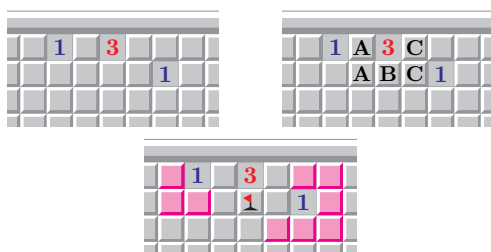
Zaznaczone pola można odsłonić.

Na prawym diagramie można odsłonić jeszcze dwa pola, ale wymaga to innych obserwacji niż powyższe. Które to pola?

Co najmniej, co najwyżej, dokładnie...

Następujący łatwy do uzasadnienia fakt daje przydatną regułę wnioskowania.

Fakt. Załóżmy, że $a_i \leq b_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, j$ oraz $\sum_{i=1}^j a_i = \sum_{i=1}^j b_i$. Wówczas $a_i = b_i$ dla każdego $i = 1, 2, \dots, j$.

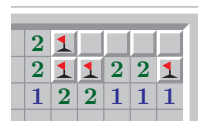


Zobaczmy, jak zastosować ten fakt na powyższym przykładzie. Oznaczmy niektóre pola literami **A**, **B** i **C**, tak jak przedstawiono to na diagramie. Wówczas pola **A** łącznie skrywają co najwyżej jedną minę (gdyż sąsiadują z polem z jedynką), pole **B** skrywa co najwyżej jedną minę (jest to oczywiste – mina albo jest, albo jej nie ma), a pola **C** – łącznie co najwyżej jedną minę (analogicznie jak dla pól **A**). Ale łączna liczba min w polach **A**, **B** i **C** to trzy. Z faktu wynika więc, że we wszystkich powyższych szacowaniach zachodzą równości. Stąd mina jest na jednym z pól **A**, na polu **B** oraz na jednym z pól **C**. Co za tym idzie, można postawić flagę na polu **B**, a pokolorowane pola – odsłonić.

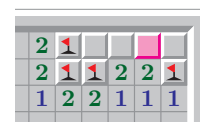
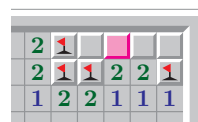
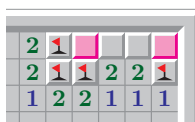
W grze dostępne są też: poziom średniozaawansowany (16×16 , 40 min), poziom ekspert (30×16 , 99 min) oraz gra na planszy o wymiarach i liczbie min wybranych dowolnie przez gracza.

Końcówka gry

Rozważmy sytuację przedstawioną na poniższym diagramie.



Wygląda na to, że jesteśmy skazani na ślepy strzał, gdyż miny można umieścić na trzy różne sposoby: w dwóch skrajnych polach lub w jednym ze środkowych pól.

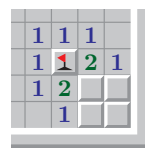


Jeżeli jednak jest to końcówka gry i są to jedyne nieodkryte pola na planszy, to gra jest wygrana.

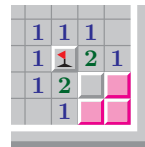
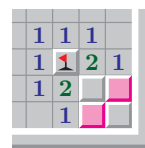
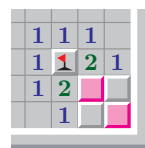
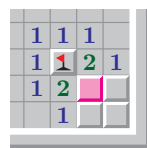
W trakcie rozgrywki nad planszą wyświetlana jest liczba min pomniejszona o liczbę postawionych flag.

Wiemy bowiem, ile min zostało do znalezienia. Jeśli do zlokalizowania zostały dwie miny, to znajdują się one w skrajnych polach – odkrywamy dwa środkowe pola i wygrywamy. Jeśli do znalezienia została jedna mina, to znajduje się ona w jednym ze środkowych pól. Odkrywamy skrajne pola i na podstawie ujawnionych liczb lokalizujemy minę.

Rzućmy okiem na inny przykład.



Miny można umieścić na cztery różne sposoby. Jeśli do zlokalizowania została jedna lub trzy miny, to gra kończy się zwycięstwem. Jeśli zaś zostały dwie miny, jesteśmy zmuszeni do odkrycia losowego pola i wygrywamy z prawdopodobieństwem $\frac{1}{2}$.

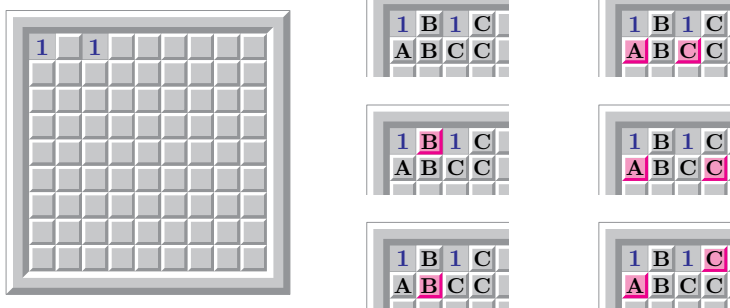


Jak tu grać?

Często nie da się bezpiecznie odkryć żadnego pola ze stuprocentową pewnością. W takiej sytuacji pozostaje tylko strzał w niepewne pole. Przy odrobinie szczęścia nie trafimy w minę i gra toczy się dalej. Jak pomóc szczęściu? To jasne – należy odkrywać pola o niskim prawdopodobieństwie posiadania miny.

Weźmy pod uwagę następujący przykład. Gramy na poziomie początkującym (10 min na planszy 9×9). W pierwszym ruchu odsłaniliśmy lewe górne pole

i ujrzelismy jedynekę. W tym momencie prawdopodobieństwo, że na sąsiednim polu jest mina, wynosi $\frac{1}{3}$, a na polu niesąsiadującym – $\frac{9}{77} \approx 11,69\%$. Aby zminimalizować ryzyko przegranej, odsłoniłismy pole niesąsiadujące z narożnym polem, a konkretnie w pierwszym wierszu i trzeciej kolumnie. Znowu odkryta została jedynekę. Które pole teraz najlepiej odsłonić? Przed przeczytaniem dalszej części tekstu proponujemy Czytelnikowi zastanowić się nad tym samodzielnie.



Obliczmy. Oznaczmy pola literami **A**, **B**, **C** tak jak na diagramie. Jeśli pole **A** nie zawiera miny, to jedno z pól **B** zawiera minę i wtedy pola **C** są puste – dwie możliwe opcje. Jeśli zaś pole **A** zawiera minę, to pola **B** są puste i jedno z pól **C** zawiera minę – trzy możliwości w tym przypadku. Łącznie mamy pięć scenariuszy, z których wynika, że pole **A** zawiera minę z prawdopodobieństwem $p_A = \frac{3}{5} = 60\%$, a pola **B** i **C** z prawdopodobieństwem $p_B = p_C = \frac{1}{5} = 20\%$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że pole nieoznaczone literą ma minę? W dwóch z pięciu opisanych scenariuszy prawdopodobieństwo to wynosi $\frac{9}{73}$, a w trzech pozostałych $\frac{8}{73}$. Szukane prawdopodobieństwo wynosi $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{73} + \frac{3}{5} \cdot \frac{8}{73} = \frac{42}{365} \approx 11,51\%$. Najlepiej więc odsłonić pole niesąsiadujące z odkrytymi dotąd polami.



Czy doszedłeś, Drogi Czytelniku, do takich samych wniosków? Jeżeli tak, to... pomyliłeś się! Okazuje się, że powyższe wyliczenia są niepoprawne i prowadzą do błędnej odpowiedzi. Co poszło nie tak?

Układy, w których mina znajduje się na jednym z pól **B**, występują znacznie częściej niż pozostałe układy. Dlaczego? Po umieszczeniu miny na jednym z dwóch pól **B** pozostaje 9 min do ustawienia na 73 polach. Liczba takich układów to $2 \cdot \binom{73}{9}$. Jeśli zaś pozostawimy oba pola **B** bez min, to musimy postawić minę na polu **A** oraz drugą minę na jednym z trzech pól **C**. Pozostało 8 min do umieszczenia na 73 polach – takich układów jest $3 \cdot \binom{73}{8}$.

Poprawnie obliczone prawdopodobieństwa to:

$$p_A = \frac{3 \cdot \binom{73}{8}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{27}{157} \approx 17,20\%,$$

$$p_B = \frac{\binom{73}{9}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{65}{157} \approx 41,40\%,$$

$$p_C = \frac{\binom{73}{8}}{3 \cdot \binom{73}{8} + 2 \cdot \binom{73}{9}} = \frac{9}{157} \approx 5,73\%.$$

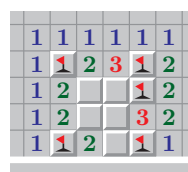
Można obliczyć, że wynosi dokładnie $\frac{1386}{11461} \approx 12,09\%$ – przeprowadzenie stosownego rachunku pozostawiamy Czytelnikowi Pracowitemu.

Przy tym prawdopodobieństwo, że pole nieoznaczone żadną literą zawiera minę, jest zbliżone do zagęszczenia min na planszy, czyli równe około $\frac{10}{81} \approx 12,35\%$.

Mamy werdykt: najbezpieczniej jest odkryć jedno z pól **C**.

Wybierz mądrze

Rozważmy poniższą sytuację.



Szybka analiza pokazuje, że brakuje dwóch min i mogą być one rozmieszczone na trzy sposoby.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2		1	1

Wynikają stąd takie oto prawdopodobieństwa trafienia na minę.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2	A	B	1	2
1	2	C	D	3	2
1	1	2	E	1	1

$$p_A = \frac{2}{3}$$

$$p_B = p_C = p_D = p_E = \frac{1}{3}$$

Wygląda na to, że najbardziej opłaca się strzelić w jedno z pól **B**, **C**, **D**, **E** i nie ma znaczenia, które z nich wybierzemy.

Czy aby na pewno? Okazuje się, że odsłonięcie pola **D** lub pola **E** jest tak samo nierozsądne, jak odsłonięcie pola **A**! Najlepszy ruch to odkrycie pól **B** i **C**.

Przyczyna jest następująca: po strzale w pole **D** bądź **E**, jeśli nie trafimy w minę, znowu trzeba strzelać! Prawdopodobieństwo wygranej wynosi $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2		4	3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2		4	3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2	2	1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2			1	2
1	2			3	2
1	1	2	2	1	1

Jeśli pole **D** nie ma miny, to ma czwórkę.

Jeśli pole **E** nie ma miny, to ma dwójkę.

Z kolei przy strzałach w pola **B** i **C**, jeśli nie trafimy w minę, to jedna mina jest na polu **A**, a druga na jednym z pól **D**, **E**. Na którym? O tym dowiadujemy się na podstawie liczby odsłoniętej na polu **B**. Nie ma potrzeby strzelania, a szansa na sukces wynosi $\frac{2}{3}$ – jest dwa razy większa niż dla pozostałych pól.

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2		4	1	2
1	2	3		3	2
1	1	2		1	1

1	1	1	1	1	1
1	1	2	3	1	2
1	2		3	1	2
1	2	3		3	2
1	1	2		1	1

Jeśli pola **B** i **C** nie mają miny, to w **C** jest trójka, a w **B** czwórka lub trójka.

Na deser

Ten przydługi tekst zakończymy zadaniem do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie. Znajdź wszystkie pola, które można bezpiecznie odkryć, oraz wszystkie pola, które na pewno zawierają minę:

2	1	2	1	1	
2	1	3	1	2	2
2	3		1		
			1	2	2

	2	1	3		
	1		1		
	1	2	2		

1		1			
		1			
	1	2	3		

Odpowiedzi znajdują się na stronie 16.

Gdzie pograć w Sapera? W sieci dostępnych jest wiele implementacji gry. Autor artykułu gorąco poleca stronę minesweeper.online.