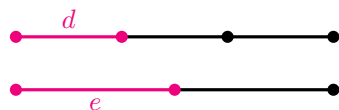
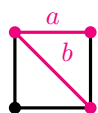
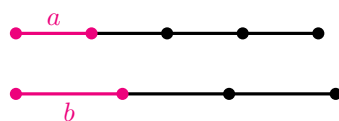


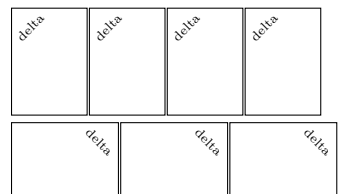
* Wydział Matematyki, Informatyki
i Mechaniki Uniwersytetu
Warszawskiego,
Instytut Matematyczny PAN



Odcinki d i e są w stosunku 2 do 3:
 $3 \cdot d = 2 \cdot e$.



Odcinki a i b nie są współmierne, np.
 $4 \cdot a < 3 \cdot b$. Można się o tym przekonać,
układając obok siebie kartki formatu
A (A4, A5 etc.):



Kartki A4 stawiane pionowo i poziomo
nigdy się nie spotykają.

Czym są liczby rzeczywiste? Istnieje wiele możliwych odpowiedzi na to pytanie. Chciałbym przedstawić jedną z nich, pochodzącą od Eudoksosa z Knidos (ok. 408–355 p.n.e.), wraz z odpowiadającą jej dużo późniejszą konstrukcją, która pozwala łatwo zbudować liczby rzeczywiste na fundamencie liczb całkowitych. Ma ona zalety, dzięki którym – mam nadzieję – zadowoli zarówno Czytelników znających konstrukcję Richarda Dedekinda (1831–1916) i Georga Cantora (1845–1918), jak i tych jedynie intuicyjnie rozumiejących liczby rzeczywiste. Podejrzewam też, że zadowoliłaby samego Eudoksosa, bo stanowi bezpośrednie przedłużenie jego myśli. Z tego też powodu Stephen H. Schanuel (1933–2014), autor omawianej konstrukcji, nazwał powstałe liczby *liczbami rzeczywistymi Eudoksosa* [1].

Teoria proporcji Eudoksosa. Cofnijmy się do czasów, w których znano jedynie liczby naturalne oraz stosunki między nimi, czyli liczby wymierne. Skąd bierze się potrzeba jakichkolwiek innych liczb? Otóż właśnie z badania stosunków. Jeśli porównujemy długości odcinków d i e (patrz margines), to okazuje się, że po odłożeniu d trzy razy i e dwa razy otrzymujemy odcinki przystające, co rozpoznajemy przez nałożenie jednego na drugi. W takim przypadku użyjemy zapisu $3 \cdot d = 2 \cdot e$ (uwaga: to nie jest zapis mnożenia liczb, bo d i e liczbami nie są) i możemy z całą pewnością stwierdzić, że odcinki d i e są w stosunku 2 do 3.

Nie zawsze mamy tyle szczęścia i starożytni Grecy o tym wiedzieli. Rozważmy mianowicie bok kwadratu a i jego przekątną b . Jak widać obok, czterokrotne odłożenie a daje odcinek ciut krótszy niż trzykrotne odłożenie b , co zapiszemy jako $4 \cdot a < 3 \cdot b$. Czytelnikowi wyposażonemu w ryż papieru A4 – boki kartki A4 są w tym właśnie stosunku – polecam sprawdzić samodzielnie, że wielokrotne przedłużanie obu odcinków nie doprowadza do ich spotkania. Jak więc opisać stosunek $a : b$? I co to znaczy, że boki kartki A4 są *w tym samym stosunku*? Przypomnijmy, że rozwiązanie polegające na przypisaniu każdemu z badanych odcinków liczby rzeczywistej opisującej jego długość, a następnie porównaniu odpowiednich ilorazów, nie wchodzi w grę jako anachroniczne.

Jak już wspomnieliśmy, stosunkowi $a : b$ nie można przypisać wartości wymiernej, więc tymczasem pozostawimy pierwsze pytanie bez odpowiedzi, a skupimy się na drugim. Teoria Eudoksosa pozwala bowiem traktować same stosunki jak liczby, a przede wszystkim, porównywać je [2, księga V]. Otóż jeśli dla pewnych naturalnych n, m zachodzą jednocześnie związki $n \cdot a > m \cdot b$ i $n \cdot d < m \cdot e$, to przyjmujemy, że stosunek $a : b$ jest *większy* od stosunku $d : e$. Warto samodzielnie sprawdzić, że tak jest właśnie dla odcinków a, b, d, e z naszych dotychczasowych przykładów, wystarczy przyjąć $n = 10$ i $m = 7$. Nawiasem mówiąc, nic nie szkodzi, żeby tę samą konkluzję (stosunek a do b jest *większy* od stosunku d do e) przyjąć również wtedy, gdy jedna z powyższych nierówności jest nieostra; w naszym przypadku pozwala to zakończyć poszukiwanie na $n = 3$ i $m = 2$.

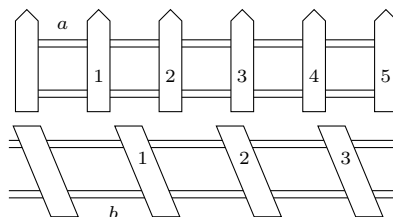
A co powiemy o przypadku, w którym nie istnieje para liczb naturalnych m, n świadcząca o nierówności między stosunkami? Otóż wówczas przyjmujemy, że dwa badane stosunki są *równe* (inaczej: *tworzą proporcję*). Z tym przypadkiem mieliśmy do czynienia, zestawiając stosunek a do b ze stosunkiem krótszego do dłuższego boku kartki A4. Geniusz Eudoksosa leży między innymi w tym, że porównywać można stosunki wielkości dowolnych rodzajów, a więc stosunek dwóch odcinków może być równy stosunkowi dwóch pól, dwóch mas albo po prostu dwóch liczb... Porównywać można wszystko. O tym aspekcie koncepcji Eudoksosa polecam przeczytać w artykule *Jak powstały wszystko opisujące liczby z Δ_{18}^7* .

Interpretacja De Morgana i konstrukcja Kołmogorowa.

Dla zilustrowania tej definicji Augustus De Morgan (1806–1871) zaproponował następujący eksperyment myślowy [2, str. 122–124], tutaj nieco unowocześniony. Wyobraźmy sobie, że jedziemy drezyną po torach kolejowych, w których odcinek między kolejnymi podkładami przystaje do b . Wzdłuż torów ciągnie

Literatura:

- [1] R. D. Arthan, *The Eudoxus real numbers*, arXiv:math/0405454 (2004).
- [2] T. L. Heath, *The thirteen books of Euclid's elements with introduction and commentary*, vol. 2 (Books III–IX), Cambridge University Press (1908).
- [3] M. H. Stone, *The real number system revisited*, L'Enseignement Mathématique 15 (1969).



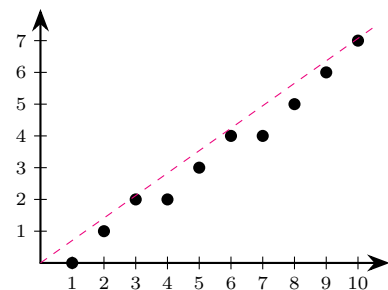
Zliczając przy każdym słupku liczbę miniętych podkładów, otrzymujemy ciąg $f_{a:b}(1) = 0, f_{a:b}(2) = 1, f_{a:b}(3) = 2, f_{a:b}(4) = 2$ etc.

Sięgając na chwilę po dzisiejszy język, możemy stosunek $a : b$ opisać liczbą $x \in \mathbb{R}$ i wtedy $f_{a:b}(n) = \lfloor nx \rfloor$, ale nie wyprzedzajmy faktów.

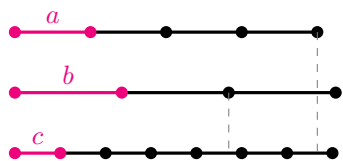
Konstrukcja Kołmogorowa: dodatnią liczbą rzeczywistą nazwiemy każdą funkcję $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, dla której:

- (1) jeśli $m, n \in \mathbb{N}$, to $mf(n) \leq f(mn) < m(f(n) + 1)$;
- (2) jeśli $n \in \mathbb{N}$, to istnieje takie $m \in \mathbb{N}$, że $mf(n) < f(mn)$.

Uwaga! Konstrukcja ta odpowiada innej konwencji zliczania podkładów: $f_{a:b}(n) = \max\{m : n \cdot a > m \cdot b\}$. Sprawdzenie, że dla takich funkcji zachodzą (1) i (2), jest niezłym ćwiczeniem.



Kropki tworzące wykres funkcji $f_{a:b}$ (dla odcinków a, b jak wcześniej) układają się blisko prostej $y = x/\sqrt{2}$, ale tylko w pewnym przybliżeniu, stąd nazwa: funkcja *prawie liniowa*.



Powyżej geometryczna interpretacja równości $f_{b:c}(f_{a:b}(4)) = f_{b:c}(2) = 4$: po minięciu 4 odcinków a mamy za sobą 2 odcinki b , a więc *na pewno* 4 odcinki c . Być może więcej, ale niewiele więcej, co sugeruje, że $f_{a:c} \approx f_{b:c} \circ f_{a:b}$. Ilustracja dla $f_{(a+c):b} \approx f_{a:b} + f_{c:b}$ jest podobna, a nawet ciut łatwiejsza.

się ogrodzenie, w którym odcinek między kolejnymi słupkami przystaje do a . Dla uproszczenia przyjmiemy, że w punkcie naszego startu słupek stoi na przedłużeniu podkładu. Wówczas jeden przejazd (nieskończonym) torem wystarczy nam, by zgromadzić pełną wiedzę o wszystkich nierównościach postaci $n \cdot a < m \cdot b$ (i $n \cdot a > m \cdot b$). Rzeczywiście, w tym celu musimy po prostu przy każdym mijanym słupku odnotować, ile podkładów mamy już za sobą. Przyjmując, że słupek i podkład startowy się nie liczą, oznaczmy przez $f_{a:b}(n)$ liczbę miniętych podkładów w chwili dotarcia do n -tego słupka (dopuszczając, że minięcie następuje dokładnie w tym momencie). Przykładowo, przy czwartym słupku przekonamy się, że $f_{a:b}(4) = 2$; oznacza to dokładnie tyle, że $4 \cdot a \geq 2 \cdot b$ (tym bardziej $4 \cdot a > 1 \cdot b$) oraz $4 \cdot a < 3 \cdot b$ (tym bardziej $4 \cdot a < 4 \cdot b, 4 \cdot a < 5 \cdot b$ etc.). Językiem mniej obrazowym, definiujemy

$$f_{a:b}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad f_{a:b}(n) := \max\{m : n \cdot a \geq m \cdot b\}.$$

Zgodnie z teorią Eudoksosa wszystko, co potrzebne do badania stosunku $a : b$, zakodowane jest w jednej funkcji $f_{a:b}$, a więc w pewnym ciągu liczb naturalnych.

Andrzej Kołmogorow (1903–1987) zapostulował więc, że można liczbę rzeczywistą odpowiadającą $a : b$ zdefiniować właśnie jako funkcję $f_{a:b}$ [3]. Lub inaczej: zdefiniować zbiór dodatnich liczb rzeczywistych jako zbiór funkcji $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ spełniających warunki (1) i (2) streszczone na marginesie. O ile ta konstrukcja udziela łatwej odpowiedzi na pytanie *czym są* liczby rzeczywiste, o tyle nie wskazuje od razu, *jak działają*. Innymi słowy, jak mielibyśmy takie liczby dodawać i mnożyć? Określenie owych działań okazuje się możliwe, ale dość trudne. Pewnym wyjściem z sytuacji jest konstrukcja Shanuela, którą teraz pokrótce omówimy.

Liczby rzeczywiste jako funkcje prawie liniowe. Ujmijmy aksjomatycznie własności przysługujące funkcjom postaci $f_{a:b}$. Zauważmy, że jeśli a jest wielokrotnością b , czyli $a = k \cdot b$ dla pewnego $k \in \mathbb{N}$, to mamy po prostu $f_{a:b}(n) = nk$ dla każdego n . Taką funkcję nazywamy *liniową*, przez co rozumiemy, że $f_{a:b}(n+m) = f_{a:b}(n) + f_{a:b}(m)$ dla dowolnych n, m . W ogólnym przypadku tak nie jest (patrz wykres na marginesie), ale niewiele brakuje: różnica $f_{a:b}(n+m) - f_{a:b}(n) - f_{a:b}(m)$ może przyjmować jedynie wartości 0 i 1. Przyjmijmy więc:

Definicja 1

- Funkcję $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ nazwiemy *prawie liniową* (w skrócie p.l.), jeśli funkcja dwóch zmiennych $d_f(n, m) := f(n+m) - f(n) - f(m)$ jest ograniczona.
- Powiemy, że dwie funkcje p.l. f, f' określają tę samą liczbę rzeczywistą (piszemy $f \sim f'$), jeśli ich różnica, czyli funkcja określona wzorem $f(n) - f'(n)$, jest ograniczona.

Jak widać, rozpatrujemy tutaj nie tylko funkcje postaci $f_{a:b}$, gdyż nie wymagamy, aby funkcja d_f przyjmowała jedynie wartości 0, 1 (choć nadal przyjmuje jedynie skończenie wiele różnych wartości). Korzyści wynikające z tego rozluźnienia wymagań pokażą się już za chwilę. W każdym razie liczymy się z tym, że jednej liczbie rzeczywistej odpowiada wiele funkcji prawie liniowych, i w rezultacie potrzebna jest też druga część definicji. Formalnie powiedzielibyśmy, że zbiór liczb rzeczywistych definiujemy jako zbiór klas abstrakcji funkcji p.l. względem relacji $\sim$.

Czytelnik Uważny zauważy też, że zbiór $\mathbb{N}$ zamieniliśmy na $\mathbb{Z}$. Ta zmiana odpowiada po prostu potrzebie rozważania liczb ujemnych, na temat których do tej pory milczeliśmy.

Obiecałem, że określenie działań na tak określonych liczbach nie jest trudne. Rzeczywiście, ilustracja De Morgana sama daje wskazówkę, jak to zrobić. Otóż jeśli połączymy odcinki a i c w jeden odcinek $a+c$, to spodziewamy się, że funkcja $f_{(a+c):b}$ jest bliska sumie funkcji $f_{a:b}$ i $f_{c:b}$. Z kolei funkcja $f_{a:c}$ nie powinna być odległa od złożenia $f_{a:b}$ i $f_{b:c}$. Intuicyjne wyjaśnienie można znaleźć na marginesie, tymczasem przekujemy tę obserwację w definicję sumy, iloczynu i porządku:



Definicja 2

- Sumą funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f + g$ określoną wzorem $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$.
- Iloczynem funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f \cdot g$ określoną jako ich złożenie: $(f \cdot g)(n) := f(g(n))$.
- Przyjmiemy, że $f \leq g$, jeśli różnica $g - f$ jest ograniczona z dołu na liczbach naturalnych.

Żeby ta definicja poprawnie określała działania i porządek na liczbach rzeczywistych, należy jeszcze sprawdzić kilka własności (zad. 1, 2).

W tym miejscu warto odnotować, że nawet gdyby funkcje f i g były postaci $f_{a:b}$ i spełniały silniejszy warunek $d_f(n, m), d_g(n, m) \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ już tego warunku spełniać nie muszą. Okazuje się więc, że przyjęcie słabszego założenia w definicji 1 rozwiązuje problem. Tworzy jednak kolejny: o ile nierówność między stosunkami $a : b, c : d$ sprowadza się do nierówności $f_{a:b}(n) \geq f_{c:d}(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to z funkcjami p.l. jest trudniej. Istotnie, jeśli funkcję p.l. f zaburzymy, w dowolny sposób zwiększając lub zmniejszając jej wartości o nie więcej niż (dajmy na to) tysiąc, to otrzymana funkcja nadal będzie p.l., co więcej, nadal będzie reprezentować tę samą liczbę rzeczywistą – stąd też konieczna jest ostatnia część definicji 2.

Powrót do współczesności. Wróćmy do roku 2026. Liczby rzeczywiste zostały już odkryte, więc chcielibyśmy przekonać się, że działają tak samo jak liczby skonstruowane powyżej. Nie jest to trudne. W tym celu każdej liczbie rzeczywistej $p \in \mathbb{R}$ przypisujemy stosunek liczb $p : 1$, który z kolei definiuje funkcję $f_{p:1}$. Nietrudno się przekonać, że dana jest ona wzorem $f_{p:1}(n) = \lfloor np \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ to zaokrąglenie x w dół do najbliższej liczby całkowitej.

Pozostaje sprawdzić, że każda funkcja p.l. f jest w relacji $f \sim f_{p:1}$ dla *dokładnie jednej* liczby $p \in \mathbb{R}$, oraz że działania na liczbach rzeczywistych odpowiadają tym na funkcjach p.l. Problem sam w sobie okazuje się pouczający, dlatego wrócimy do niego niebawem, w osobnym artykule. Do tego czasu polecam zmierzyć się z zadaniami:

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli funkcje f, g są prawie liniowe, to funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ również.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeśli $f \sim f'$ i $g \sim g'$, to $f + g \sim f' + g'$ oraz $f \cdot g \sim f' \cdot g'$, ponadto $f \leq g$ jest równoważne $f' \leq g'$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że funkcje $0(n) := 0$ i $1(n) := n$ spełniają role zera i jedynki: $f + 0 = 0 + f = f$, $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$, $0 \cdot f = 0$, $f \cdot 0 \sim 0$.

Szkice rozwiązań znajdują się na stronie 21.

Magnetohydrodynamika

Mariusz MRÓZEK*

*Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

Magnetohydrodynamika (z greckiego: magneto – pole magnetyczne, hydro – woda/płyn, dynamika – ruch, w skrócie MHD) to dziedzina fizyki zajmująca się badaniem dynamiki płynów przewodzących prąd elektryczny, na które działa pole magnetyczne. Płynami takimi mogą być plazma, ciekłe metale (np. rtęć, ciekły sód, gal), a także elektrolity, takie jak słona woda.

Zarys historyczny

Choć jako odrębna gałąź nauki została zdefiniowana znacznie później, historia badań nad magnetohydrodynamiką sięga początków XIX wieku. W 1832 roku Michael Faraday przeprowadził pierwszy znany eksperyment z zakresu MHD (magnetohydrodynamiki). Zaintrygowany zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej, opuścił dwie miedziane płyty z mostu Waterloo do Tamizy. Jego celem było zmierzenie napięcia wygenerowanego przez (lekko zasoloną) wodę w rzece, przecinającą linie ziemskiego pola magnetycznego. Ze względu na zjawiska polaryzacji elektrod oraz bardzo słabe pole magnetyczne Ziemi, eksperyment nie przyniósł jednoznacznych odczytów, jednak jego założenia teoretyczne były bezbłędne.