



Definicja 2

- Sumą funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f + g$ określoną wzorem $(f + g)(n) := f(n) + g(n)$.
- Iloczynem funkcji p.l. f, g nazywamy funkcję $f \cdot g$ określoną jako ich złożenie: $(f \cdot g)(n) := f(g(n))$.
- Przyjmiemy, że $f \leq g$, jeśli różnica $g - f$ jest ograniczona z dołu na liczbach naturalnych.

Żeby ta definicja poprawnie określała działania i porządek na liczbach rzeczywistych, należy jeszcze sprawdzić kilka własności (zad. 1, 2).

W tym miejscu warto odnotować, że nawet gdyby funkcje f i g były postaci $f_{a:b}$ i spełniały silniejszy warunek $d_f(n, m), d_g(n, m) \in \{0, 1\}$ dla wszystkich $n, m \in \mathbb{Z}$, to funkcje $f + g$ i $f \cdot g$ już tego warunku spełniać nie muszą. Okazuje się więc, że przyjęcie słabszego założenia w definicji 1 rozwiązuje problem. Tworzy jednak kolejny: o ile nierówność między stosunkami $a : b, c : d$ sprowadza się do nierówności $f_{a:b}(n) \geq f_{c:d}(n)$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$, to z funkcjami p.l. jest trudniej. Istotnie, jeśli funkcję p.l. f zaburzymy, w dowolny sposób zwiększając lub zmniejszając jej wartości o nie więcej niż (dajmy na to) tysiąc, to otrzymana funkcja nadal będzie p.l., co więcej, nadal będzie reprezentować tę samą liczbę rzeczywistą – stąd też konieczna jest ostatnia część definicji 2.

Powrót do współczesności. Wróćmy do roku 2026. Liczby rzeczywiste zostały już odkryte, więc chcielibyśmy przekonać się, że działają tak samo jak liczby skonstruowane powyżej. Nie jest to trudne. W tym celu każdej liczbie rzeczywistej $p \in \mathbb{R}$ przypisujemy stosunek liczb $p : 1$, który z kolei definiuje funkcję $f_{p:1}$. Nietrudno się przekonać, że dana jest ona wzorem $f_{p:1}(n) = \lfloor np \rfloor$, gdzie $\lfloor x \rfloor$ to zaokrąglenie x w dół do najbliższej liczby całkowitej.

Pozostaje sprawdzić, że każda funkcja p.l. f jest w relacji $f \sim f_{p:1}$ dla *dokładnie jednej* liczby $p \in \mathbb{R}$, oraz że działania na liczbach rzeczywistych odpowiadają tym na funkcjach p.l. Problem sam w sobie okazuje się pouczający, dlatego wrócimy do niego niebawem, w osobnym artykule. Do tego czasu polecam zmierzyć się z zadaniami:

Zadanie 1. Wykazać, że jeśli funkcje f, g są prawie liniowe, to funkcje $f + g$ oraz $f \cdot g$ również.

Zadanie 2. Udowodnić, że jeśli $f \sim f'$ i $g \sim g'$, to $f + g \sim f' + g'$ oraz $f \cdot g \sim f' \cdot g'$, ponadto $f \leq g$ jest równoważne $f' \leq g'$.

Zadanie 3. Sprawdzić, że funkcje $0(n) := 0$ i $1(n) := n$ spełniają role zera i jedynek: $f + 0 = 0 + f = f$, $f \cdot 1 = 1 \cdot f = f$, $0 \cdot f = 0$, $f \cdot 0 \sim 0$.

Szkice rozwiązań znajdują się na stronie 21.

Magnetohydrodynamika

Mariusz MRÓZEK*

*Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej, Uniwersytet Jagielloński

Magnetohydrodynamika (z greckiego: magneto – pole magnetyczne, hydro – woda/płyn, dynamika – ruch, w skrócie MHD) to dziedzina fizyki zajmująca się badaniem dynamiki płynów przewodzących prąd elektryczny, na które działa pole magnetyczne. Płynami takimi mogą być plazma, ciekłe metale (np. rtęć, ciekły sód, gal), a także elektrolity, takie jak słona woda.

Zarys historyczny

Choć jako odrębna gałąź nauki została zdefiniowana znacznie później, historia badań nad magnetohydrodynamiką sięga początków XIX wieku. W 1832 roku Michael Faraday przeprowadził pierwszy znany eksperyment z zakresu MHD (magnetohydrodynamiki). Zaintrygowany zjawiskiem indukcji elektromagnetycznej, opuścił dwie miedziane płyty z mostu Waterloo do Tamizy. Jego celem było zmierzenie napięcia wygenerowanego przez (lekko zasoloną) wodę w rzece, przecinającą linie ziemskiego pola magnetycznego. Ze względu na zjawiska polaryzacji elektrod oraz bardzo słabe pole magnetyczne Ziemi, eksperyment nie przyniósł jednoznacznych odczytów, jednak jego założenia teoretyczne były bezbłędne.

Fale Alfvéna to fale poprzeczne w zjonizowanej gazie (plazmie) znajdującym się w polu magnetycznym, które rozchodzą się wzdłuż tego pola. Nie powodują zmian ciśnienia ośrodka (które to zmiany są źródłem fal akustycznych), bo gęstość plazmy pozostaje stała w czasie.

Projekt U-25 był radziecką instalacją badawczą, w której wykorzystywano MHD do bezpośredniej zamiany energii cieplnej gazu na energię elektryczną.

Ojcem magnetohydrodynamiki jest szwedzki fizyk Hannes Alfvén. W 1942 roku opublikował on przełomową pracę, w której opisał istnienie fal elektromagnetyczno-hydrodynamicznych, znanych dziś jako fale Alfvéna. Dowiódł, że w doskonale przewodzącym płynie linie pola magnetycznego są „wmrożone” w materię i poruszają się razem z nią. Za swoje fundamentalne prace w tej dziedzinie Alfvén otrzymał w 1970 roku Nagrodę Nobla z fizyki.

W latach 60. i 70. XX wieku MHD zyskała ogromne zainteresowanie wojska i przemysłu. Intensywne badania nad generatorami energii elektrycznej wykorzystującymi zjawisko MHD prowadzono w Związku Radzieckim (projekt U-25) oraz w USA. Równolegle badano również ciche napędy magnetohydrodynamiczne dla okrętów podwodnych (Japonia), co później stało się inspiracją dla powieści Toma Clancy’ego „Polowanie na Czerwony Październik”.

Podstawy fizyczne

Zjawiska MHD opisuje się przez łączenie mechaniki płynów (poprzez równania Naviera–Stokesa) z klasycznym elektromagnetyzmem (równania Maxwella). Elementem sprzęgającym obie dziedziny fizyki jest siła Lorentza, która działa na ładunki poruszające się w polu magnetycznym. Gęstość objętościowa tej siły f (siła na jednostkę objętości) wynosi

$$f = J \times B,$$

gdzie J to gęstość prądu elektrycznego, a B to indukcja pola magnetycznego.

Dla płynu nieściśliwego o stałej gęstości ρ i lepkości dynamicznej μ , pełne równanie ruchu (zmodyfikowane równanie Naviera–Stokesa) przybiera postać

$$\rho \left(\frac{\partial \nu}{\partial t} + (\nu \cdot \nabla) \nu \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \nu + J \times B,$$

gdzie ν to wektor prędkości płynu, a p to ciśnienie hydrodynamiczne.

Lewa strona równania opisuje zmianę prędkości płynu w czasie i przestrzeni (odpowiednio $\frac{\partial \nu}{\partial t}$ i $(\nu \cdot \nabla) \nu$). Prawa strona składa się z członu zależnego od ciśnienia $-\nabla p$, lepkości $\mu \nabla^2 \nu$ i właśnie sprzężenia z siłą Lorentza $J \times B$. Innymi słowy, pole magnetyczne może przyspieszać lub hamować przepływ przewodzącego płynu tak samo jak jego lepkość i ciśnienie.

Równanie to nie wyczerpuje jednak opisu MHD. Sam ruch płynu również wpływa na pole magnetyczne. Tę zależność opisuje równanie indukcji magnetycznej, które otrzymuje się z połączenia prawa Ohma dla przewodzącego płynu z równaniami Maxwella.

Punktem wyjścia jest uogólnione prawo Ohma dla płynu w ruchu

$$J = \sigma (E + \nu \times B),$$

gdzie σ to przewodność elektryczna płynu, a E to natężenie pola elektrycznego. Człon $\nu \times B$ reprezentuje siłę elektromotoryczną indukowaną przez ruch płynu w polu magnetycznym (to ten człon odpowiada za działanie prądnic MHD).

Łącząc prawo Ohma z prawem Faradaya ($\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$) oraz prawem Ampère’a ($\nabla \times B = \mu_0 J$) otrzymujemy równanie indukcji magnetycznej

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nabla \times (\nu \times B) + \eta \nabla^2 B,$$

gdzie $\eta = \frac{1}{\mu_0 \sigma}$ nosi nazwę *dyfuzyjności magnetycznej*.

Równanie to pokazuje dwa rywalizujące ze sobą zjawiska. Pierwszy człon po prawej stronie opisuje „unoszenie” i zagęszczanie linii pola przez poruszający się płyn. Drugi człon opisuje dyfuzję (rozmywanie) pola magnetycznego na skutek oporu elektrycznego płynu.

Stosunek tych dwóch wielkości określa magnetyczna liczba Reynoldsa

$$\text{Re}_m = \frac{\nu L}{\eta} = \mu_0 \sigma \nu L,$$

gdzie L to wymiar charakterystyczny układu.

Jeśli $\text{Re}_m \gg 1$ (np. w plazmie słonecznej), pole magnetyczne jest *zamrożone* w płynie. Jeśli natomiast $\text{Re}_m \ll 1$ (np. w wodzie morskiej lub eksperymentach laboratoryjnych), pole magnetyczne swobodnie przenika przez płyn.

Generator MHD

Generator MHD przetwarza energię termiczną i kinetyczną płynu bezpośrednio w energię elektryczną, całkowicie eliminując turbiny mechaniczne i ruchome części wirnika. Gorący, zjonizowany gaz (plazma) przepływa z dużą prędkością przez dyszę do kanału, w którym panuje silne poprzeczne pole magnetyczne. Zgodnie ze wzorem na indukcję, w poprzek strumienia generowane jest pole elektryczne. Na ściankach kanału umieszcza się elektrody odbierające prąd. Moc generowana z jednostki objętości wyraża się w przybliżeniu wzorem

$$P = \rho \nu^2 B^2 K (1 - K),$$

gdzie $K = E/\nu B$ to współczynnik obciążenia. Maksymalną moc uzyskuje się dla $K = 0,5$.

Istnieją różne typy generatorów:

- Faradaya: z elektrodami ciągłymi lub segmentowanymi na przeciwległych ścianach generatora (rys. 1);

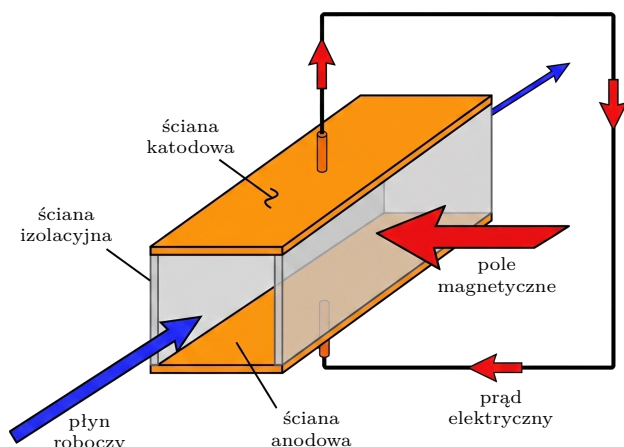
- Halla: wykorzystujące zjawisko Halla, gdzie prąd zbierany jest wzdłuż kierunku przepływu gazu;
- Dyskowe: promienisty przepływ płynu z osiowym polem magnetycznym, niezwykle wydajne w cyklach zamkniętych.

Główną zaletą generatorów MHD jest ich ogromna sprawność (powyżej 60% w układach skojarzonych z klasycznymi elektrowniami gazowymi/węglowymi) z uwagi na to, że proces produkcji energii elektrycznej zachodzi w znacznie wyższych temperaturach niż pozwalają na to tradycyjne generatory, których stalowe turbiny nie są w stanie pracować w takich warunkach. Natomiast głównym problemem generatorów MHD jest drastyczna erozja używanych w nich materiałów elektrodowych oraz niska przewodność gazów spalinowych. Przewodność poprawia się przez dodawanie jonizującej substancji, na przykład potasu, ale niestety komplikuje to i podraża pracę generatora.

Napędy MHD

Zasada działania napędu MHD jest odwrotnością prądnic. Przewodzący płyn znajduje się wewnątrz kanału. Silne pole magnetyczne przecina się prostopadle z prądem elektrycznym dostarczonym z zewnątrz i płynącym między elektrodami. Wynikowa siła Lorentza wyrzuca płyn z dyszy, generując ciąg (na mocy trzeciej zasady dynamiki Newtona).

Pierwszą realizacją tego pomysłu był napęd morski. Ponieważ woda morska ($\sigma \approx 5 \text{ S/m}$) jest bardzo słabym przewodnikiem w porównaniu z miedzią ($\sigma \approx 6 \times 10^7 \text{ S/m}$), to napęd wymaga zastosowania prądów o natężeniach rzędu dziesiątek tysięcy amperów oraz potężnych pól magnetycznych. W 1992 roku w Japonii zbudowano *Yamato 1* – pierwszy (i jedyny) statek o napędzie MHD. Ważył 280 ton i korzystał z nadprzewodzących cewek chłodzonych ciekłym helem. Mimo sukcesu dowodzącego poprawności koncepcji, statek osiągnął prędkość zaledwie 15 km/h, a jego sprawność całkowita była skrajnie niska z powodu dużych strat mocy na elektrolizę wody.



Rys. 1. Liniowy generator magnetohydrodynamiczny typu Faradaya, w którym energia kinetyczna przewodzącego płynu (np. plazmy) jest bezpośrednio zamieniana na energię elektryczną. Działanie opiera się na trzech prostopadłych do siebie wektorach: strumień płynu wpływa do izolowanego kanału (niebieska strzałka), gdzie przecina prostopadle, silne pole magnetyczne (czerwona strzałka), co wywołuje siłę Lorentza rozdzielającą swobodne ładunki w płynie. Dodatnie i ujemne jony są spychane w kierunku przeciwnych, przewodzących ścian (katodowej i anodowej), na których indukuje się napięcie, powodując przepływ prądu elektrycznego przez podłączony obwód zewnętrzny.



Rys. 2. Statek *Yamato 1* – jedyna znana realizacja napędu MHD. Fot. Geofrog. Źródło: Wikimedia Commons, licencja CC BY-SA 2.5.

Zastosowanie napędu MHD wydaje się niesamowicie istotne w przyszłych napędach kosmicznych: to tutaj MHD ma największy potencjał inżynierski. Napędy takie jak VASIMR (ang. *Variable Specific Impulse Magnetoplasma Rocket*) jonizują gaz napędowy (np. argon lub ksenon) do postaci plazmy. Następnie pole magnetyczne przyspiesza tę plazmę do prędkości rzędu dziesiątek kilometrów na sekundę. Generuje to ogromny impuls właściwy, co czyni je idealnymi kandydatami do załogowych misji na Marsa. Brak ruchomych części oznacza brak zużycia mechanicznego podczas wielomiesięcznej pracy w próżni. Obecnie technologia pozostaje w fazie badań laboratoryjnych.

Polowanie na Czerwony Październik

Zjawisko magnetohydrodynamiki trafiło do świadomości masowej za sprawą wspomnianej powieści „Polowanie na Czerwony Październik” oraz jej znakomitej ekranizacji. Tytułowy radziecki okręt podwodny typu Tajfun został wyposażony w ściśle tajny napęd nazywany przez załogę „napędem gąsienicowym” (ang. *caterpillar drive*). W rzeczywistości ten system to opisany wcześniej napęd magnetohydrodynamiczny, wykorzystujący wodę morską zamiast plazmy. Największą zaletą taktyczną tego napędu, kluczową dla fabuły, był całkowity brak obracających się śrub napędowych. Eliminowało to zjawiska kawitacji i wibracji mechanicznych, czyniąc „Czerwony Październik” praktycznie bezgłośnym i niewidzialnym dla wrogich sonarów akustycznych.

Podsumowanie

Magnetohydrodynamika to nauka pełna inżynierskich wyzwania i fascynującej matematyki. Chociaż ziemskie próby zbudowania cywilnych okrętów MHD czy komercyjnych generatorów w latach 90. potknęły się o bariery materiałowe, rozwój najnowszych technologii – w szczególności nadprzewodników wysokotemperaturowych – powoli usuwa dawne przeszkody. Daje to szansę na renesans układów MHD w nadchodzących dekadach, szczególnie w kontekście podboju kosmosu i energetyki fuzyjnej.