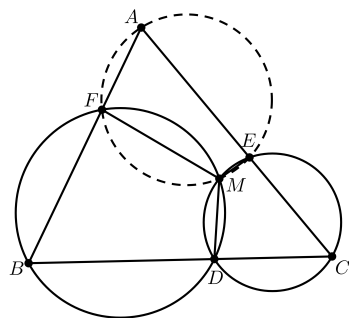




Rys. 1

Okręgów nigdy dość!

Stanisław MAJCHRZAK*

W artykule tym przedstawimy, jak zaskakująco dalekie konsekwencje może mieć bardzo proste twierdzenie Miquela o następującej wypowiedzi:

Dany jest trójkąt ABC oraz punkty D, E, F leżące, odpowiednio, na prostych BC, CA, AB. Wówczas okręgi opisane na trójkątach AEF, BDF, CDE mają punkt wspólny.

Dowód jest bardzo prosty. Załóżmy, że punkty D, E i F leżą na bokach trójkąta ABC (a nie ich przedłużeniach), jak na rysunku 1. Jeśli M jest drugim punktem wspólnym okręgów opisanych na trójkątach BDF i CDE, to

$$\begin{aligned}\sphericalangle EMF &= 360^\circ - \sphericalangle DME - \sphericalangle FMD \\ &= 360^\circ - (180^\circ - \sphericalangle ACB) - (180^\circ - \sphericalangle CBA) \\ &= \sphericalangle ACB + \sphericalangle CBA = 180^\circ - \sphericalangle BAC,\end{aligned}$$

czyli M leży też na okręgu opisanym na trójkącie AEF. Dowód w pozostałych konfiguracjach jest analogiczny.

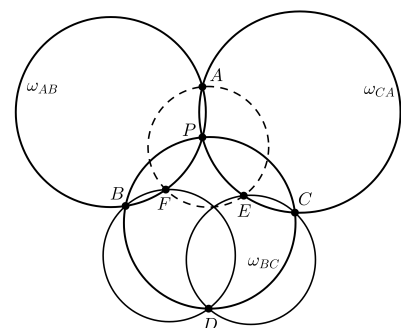
Twierdzenie to można uogólnić, rozważając inwersję o środku w dowolnie wybranym punkcie P. Przybiera ono wtedy następującą postać:

Twierdzenie A. *Jeśli okręgi ω_{AB} , ω_{BC} , ω_{CA} mają punkt wspólny P, punkty A, B, C to pozostałe punkty przecięcia par, odpowiednio, ω_{AB} i ω_{CA} , ω_{AB} i ω_{BC} , ω_{BC} i ω_{CA} oraz punkty D, E, F leżą odpowiednio na ω_{BC} , ω_{CA} , ω_{AB} , to okręgi opisane na trójkątach AEF, BDF, CDE mają punkt wspólny.*

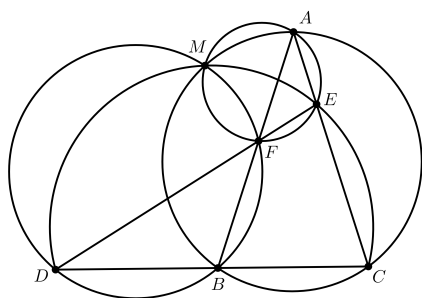
Lub równoważnie:

Twierdzenie B. *Jeśli istnieje okrąg przechodzący przez punkt wspólny okręgów c_1 i c_2 , punkt wspólny okręgów c_2 i c_3 , punkt wspólny okręgów c_3 i c_4 oraz punkt wspólny okręgów c_4 i c_1 , to istnieje okrąg przechodzący przez ich pozostałe przecięcia.*

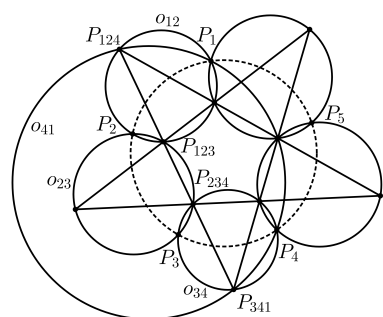
O ile fakt, że inwersja przeprowadza twierdzenie Miquela na twierdzenie A, widać natychmiastowo, to równoważność twierdzeń A i B wcale nie jest oczywista na pierwszy rzut oka. Jednak po dokładniejszym przyjrzeniu się rysunkowi 2 rozpoznajemy, że w twierdzeniu A rolę okręgów c_1 , c_2 , c_3 , c_4 grają kolejno ω_{AB} , ω_{CA} oraz te opisane na CDE i BDF.

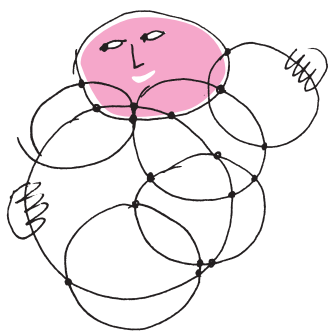


Rys. 2



Rys. 3





przyporządkowujemy okrąg opisany na trójkącie przez nie wyznaczonym, dwóm prostym przyporządkowujemy ich punkt przecięcia, a jednej prostej tę właśnie prostą (czyli okrąg zdegenerowany).

Niech teraz danych będzie n prostych $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$. Dzięki powyższym założeniom możemy przyjąć, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n \leq 4$. Przechodzimy zatem do kroku indukcyjnego. Rozważmy dwa przypadki w zależności od parzystości n .

Jeśli n jest parzyste, to oznaczmy przez o_i okrąg skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i , przez P_{ij} punkt skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, j itd. Zauważmy, że punkt P_{12} leży na wszystkich okręgach przyporządkowanych do prostych o indeksach różnych od 1, 2 i jeszcze pewnego trzeciego. Z kolei okrąg o_{124} przechodzi przez wszystkie punkty przyporządkowane prostym o indeksach różnych od 1, 2, 4 i jeszcze pewnego czwartego. Podobnie dla pozostałych punktów i okręgów. Wiemy stąd, że:

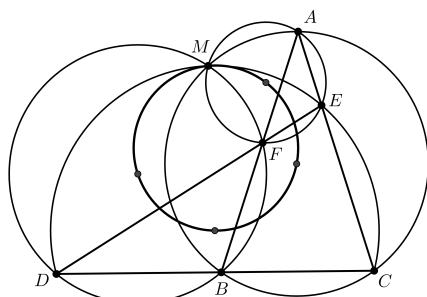
- okrąg o_{124} zawiera punkty $P_{12}, P_{14}, P_{24}, P_{1234}$;
- okrąg o_{234} zawiera punkty $P_{23}, P_{34}, P_{24}, P_{1234}$;
- okrąg o_{134} zawiera punkty $P_{13}, P_{14}, P_{34}, P_{1234}$.

Po zastosowaniu twierdzenia A dla okręgów $o_{124}, o_{234}, o_{134}$ przechodzących przez P_{1234} dostajemy, że okręgi: o_1 opisany na $P_{12}P_{13}P_{14}$, o_2 opisany na $P_{12}P_{23}P_{24}$ oraz o_3 opisany na $P_{13}P_{23}P_{34}$ mają punkt wspólny. Wynika stąd, że wszystkie okręgi o_i przechodzą przez jeden punkt.

Jeśli n jest nieparzyste, to oznaczmy przez P_i punkt skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i , przez o_{ij} okrąg skonstruowany dla prostych o indeksach różnych od i, j itd. Tak samo jak poprzednio, wnioskujemy, że:

- okręgi o_{12} i o_{23} przecinają się w P_2 i P_{123} ;
- okręgi o_{23} i o_{34} przecinają się w P_3 i P_{234} ;
- okręgi o_{34} i o_{41} przecinają się w P_4 i P_{341} ;
- okręgi o_{41} i o_{12} przecinają się w P_1 i P_{124} .

Ponadto punkty $P_{123}, P_{234}, P_{341}, P_{124}$ leżą na okręgu o_{1234} . Zatem z twierdzenia B punkty P_1, P_2, P_3, P_4 leżą na jednym okręgu. Stąd wszystkie punkty P_i są współokręgowe.



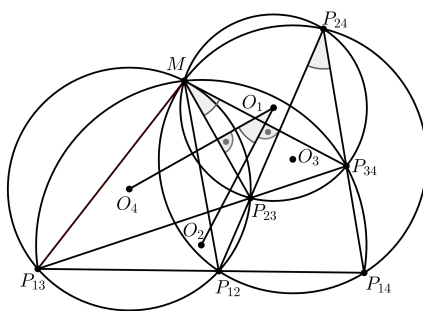
Rys. 5. Okrąg przechodzący przez środki okręgów opisanych zawiera również punkt Miquela tych prostych.

W konfiguracji twierdzenia Miquela można dopatrzeć się jeszcze jednej ciekawej własności. Okazuje się, że środki okręgów opisanych na czterech trójkątach wyznaczanych przez cztery proste leżą na jednym okręgu (rys. 5). Rezultat ten stanowi punkt wyjścia do kolejnego łańcuchowego twierdzenia. Mianowicie: mając pięć prostych, jeśli dla każdych czterech z nich narysujemy wspomniany przed chwilą okrąg, to okręgi te będą przechodzić przez jeden punkt, a ich środki będą leżeć na jednym okręgu, który przyporządkujemy tym pięciu prostym. Dalej, startując z szóstką prostych, jeśli narysujemy okręgi przyporządkowane tak jak poprzednio każdej piątce, to okręgi te będą również przechodzić przez jeden punkt, a ich środki będą leżeć na jednym okręgu itd. Twierdzenie to, tak samo jak poprzednie, udowodnimy indukcyjnie.

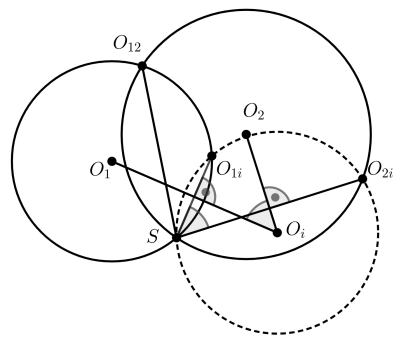
Przyjmujemy następujące oznaczenia: $\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_n$ są danymi prostymi, o_i jest okręgiem przyporządkowanym prostym o indeksach różnych od i , O_i jego środkiem, a O_{ij} środkiem okręgu przyporządkowanego prostym o indeksach różnych od i i j . Wzmocnimy też tezę indukcyjną o stwierdzenie, że kąt wpisany w uzyskiwany w tezie okrąg i oparty na łuku O_iO_j jest równy kątowi między prostymi ℓ_j oraz ℓ_i . Aby nadać następującym rozważaniom pełną ogólność, najlepiej byłoby traktować wymienione dalej kąty jako *kąty skierowane między prostymi* (patrz margines). Można jednak śmiało kontynuować lekturę bez znajomości tego pojęcia.

Przyjrzyjmy się bazie indukcji, czyli przypadkowi czterech prostych. Oznaczmy przez P_{ij} przecięcie prostych o indeksach i i j oraz niech M będzie punktem Miquela prostych $\ell_1, \ell_2, \ell_3, \ell_4$.

Kąt skierowany między prostymi k i l (oznaczany jako $\sphericalangle kl$) to kąt z przedziału $[0, \pi)$, o jaki trzeba obrócić przeciwnie do ruchu wskazówek zegara prostą k , aby otrzymać prostą równoległą do prostej l . Często w tym duchu zapis $\sphericalangle XYZ$ interpretuje się jako kąt skierowany między prostymi YX oraz YZ . To bardzo wygodna konwencja; pozwala na przykład stwierdzić, że punkty X, Y, Z, W leżą na jednym okręgu wtedy i tylko wtedy, gdy $\sphericalangle XYZ = \sphericalangle XWZ$.



Rys. 6



Rys. 7

Ponieważ odcinek O_1O_2 jest prostopadły do odcinka MP_{14} , zaś odcinek O_1O_4 do odcinka MP_{23} , otrzymujemy

$$\sphericalangle O_4O_1O_2 = \sphericalangle P_{23}MP_{34} = \sphericalangle P_{23}P_{24}P_{34} = \sphericalangle \ell_2\ell_4.$$

Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle O_4O_3O_2 = \sphericalangle \ell_2\ell_4$, co dowodzi, że punkty O_1, O_2, O_3 i O_4 leżą na jednym okręgu. Jednocześnie dowiedliśmy, że kąt wpisany w ten okrąg, oparty na łuku O_2O_4 , jest kątem między prostymi ℓ_2 i ℓ_1 ; prawdziwości wzmocnionej tezy dla pozostałych łuków O_iO_j dowodzimy tak samo.

Niech teraz $n \geq 5$. Oznaczmy przez S drugi obok O_{12} punkt wspólny okręgów o_1 i o_2 . Wiemy, że

- o_1 przechodzi przez O_{12}, O_{1i}, S ,
- o_2 przechodzi przez O_{12}, O_{2i}, S .

Teraz z założenia indukcyjnego o równości kątów wiemy, że

$$\sphericalangle O_{1i}SO_{12} = \sphericalangle \ell_2\ell_i \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle O_{12}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_i\ell_1,$$

zatem $\sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1$. Wynika stąd, że S leży na o_i . Na koniec wystarczy zauważyć, że ze względu na prostopadłość par odcinków O_1O_i i SO_{1i} oraz O_2O_i i SO_{2i} mamy

$$\sphericalangle O_1O_iO_2 = \sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1,$$

czyli wszystkie O_i leżą na okręgu, a przy okazji sprawdziliśmy warunek kątowy dla łuku O_1O_2 . Pozostałe kąty sprawdzamy analogicznie – kończąc w ten sposób dowód naszego „łańcuchowego” twierdzenia, jak również cały artykuł.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 1155. Pierścienie Saturna zostały odkryte i opisane w 1658 roku przez Christiaana Huygensa. Do czasu wysłania sond kosmicznych w XX wieku teleskopy nie pozwalały ustalić obserwacyjnie, czy pierścienie są litymi skałami, czy zbiorem skalnych „okruchów”. Jednak jeszcze w XIX wieku zagadnienie to zostało rozstrzygnięte. Jak tego dokonano?

Wskazówka: W XIX wieku w badaniach astronomicznych zaczęto wykorzystywać fotografię i spektroskopię.

F 1156. Podczas „spaceru” poza stacją kosmiczną astronauta „zgubił” kartkę białego papieru. Jaka temperatura T kartki ustali się po osiągnięciu stanu równowagi? Promień orbity Ziemi (i stacji, a później także kartki) $R_{ZS} \approx 1,50 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca $R_S \approx 6,96 \cdot 10^8$ m, temperatura Słońca $T_S \approx 5,77 \cdot 10^3$ K, a albedo kartki (współczynnik odbicia i rozpraszania padającego na nią światła) $a = 0,8$. Powierzchnia kartki jest prostopadła do kierunku w stronę Słońca.

Przygotował Dominik BUREK

M 1870. Czy można ponumerować wierzchołki i krawędzie ośmiościanu foremnego liczbami $1, 2, 3, \dots, 18$, tak żeby numer każdego wierzchołka był równy sumie numerów wychodzących z niego krawędzi?

M 1871. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC . Na okręgu opisanym na tym trójkącie zaznaczono punkt D antypodalny do punktu A (rysunek obok). Punkty X i Y leżą na boku BC i spełniają

$$BX = XD, \quad CY = YD,$$

przy czym punkt X leży na odcinku BY . Udowodnić, że prosta DA jest dwusieczną kąta XDY .

M 1872. Niech $f, g: \mathbb{Z}_{>0} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ będą funkcjami takimi, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą równości

$$f(f(n)) = 2f(n), \quad g(g(n)) = 2g(n), \quad f(n) + g(n) = 4n + 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$|f(n) - g(n)| = 1.$$

