



Bartłomiej PAWLIK*

*Politechnika Śląska

Arytmetycznym ułamkiem łańcuchowym nazywamy wyrażenie

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

w którym a_0 jest liczbą całkowitą, a pozostałe a_i są liczbami całkowitymi dodatnimi. Liczby $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ nazywamy *mianownikami częściowymi* ułamka łańcuchowego, a sam ułamek łańcuchowy często skrótowo zapisuje się jako $(a_0, a_1, a_2, \dots, a_n)$. Prosty algorytm – polegający na naprzemiennym odwracaniu i wyciąganiu części całkowitej – pozwala zapisać dowolną liczbę wymierną w postaci takiego ułamka. Zaprezentujemy to na przykładzie liczby $11/14$:

$$\frac{11}{14} = \frac{1}{\frac{14}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{3}{11}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{11}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{2}{3}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{3}{2}}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}}.$$

Zatem ciąg mianowników częściowych rozważanej liczby to $(0, 1, 3, 1, 2)$. W poniższej tabeli prezentujemy wszystkie właściwe ułamki nieskracalne z mianownikiem 14 wraz z ich ciągami mianowników częściowych:

1/14	3/14	5/14	9/14	11/14	13/14
(0, 14)	(0, 4, 1, 2)	(0, 2, 1, 4)	(0, 1, 1, 1, 4)	(0, 1, 3, 1, 2)	(0, 1, 13)

Zauważmy, że ciąg liczby $11/14$ wyróżnia się na tle pozostałych pięciu tym, że zawiera „najmniejsze” liczby – w tym sensie, że największy mianownik częściowy w jej ciągu (liczba 3) jest nie większy od największych mianowników częściowych w ciągach pozostałych liczb (którymi są odpowiednio: 14, 4, 4, 4, 13). Skupmy się na poruszonym wątku „najmniejszego z największych”, konkretyzując rozpatrywane zagadnienie w następującym problemie:

Dla danej liczby całkowitej $q > 1$ rozpatrujemy wszystkie nieskracalne ułamki właściwe postaci p/q i z takiego ułamka bierzemy największy z jego mianowników częściowych. Niech $m(q)$ będzie najmniejszą z tych wartości maksymalnych. Jakie wartości może przyjąć $m(q)$?

Już wiemy, że $m(14) = 3$. Są znane liczby o wartościach większych, przykładowo nietrudno sprawdzić, że $m(6) = 5$ i $m(20) = 4$. Co ciekawe, nie znamy żadnej liczby q , dla której $m(q) > 5$ i nie wiemy nawet, czy taka liczba w ogóle istnieje! W 1971 roku polski matematyk Stanisław Zaremba postawił hipotezę, że dla każdej liczby całkowitej $q > 1$ zachodzi $m(q) \leq 5$.

Heurystyczne przesłanki sugerują, że $m(q) > 5$ faktycznie może nie mieć rozwiązań. Jedyne znane wartości q , dla których $m(q) = 5$ są 6, 54 i 150. Znanych jest 35 liczb, dla których uzyskujemy wartość 4 (A141823) – największa z nich to 6234. Pozostałe sprawdzone liczby przyjmują wartości 2 lub 3. W 1976 roku Itshak Borosh zbadał wszystkie wartości $m(q)$ dla $q \leq 10000$, a kilka lat później informował, że Donald Knuth wykonał obliczenia aż do $3,2 \cdot 10^6$, nie znajdując żadnego mianownika z $m(q) > 3$. Na wszelki wypadek razem z Mariuszem Pleszczyńskim niezależnie sprawdziliśmy wszystkie mianowniki do 10^7 – także bez nowych wyjątków.

Data sformułowania hipotezy słusznie sugeruje, że jej autorem jest młodszy z Zarembów – Stanisław Krystyn, który był nie tylko matematykiem, ale i znanym górolazem. Jego działalność taternicza doczekała się nietypowego upamiętnienia w postaci wrocławskiego krasnala Zarembka – jednego z trzech Alpików, których można podziwiać na ulicy Strzegomskiej.

Pamiętasz, Czytelniku, jak w Kącie 14° (Δ_{26}^4) rozważaliśmy ciągi w OEIS, które – wbrew przyjętym normom i zwyczajom – mają mniej niż 4 elementy? Jednym z nich jest A195901, złożony z liczb 6, 54 i 150.

Hipoteza Zaremby ma również „słabą” wersję: *istnieje stała A taka, że dla każdej liczby całkowitej $q > 1$ zachodzi $m(q) \leq A$* . W 2014 roku Jean Bourgain i Alex Kontorovich udowodnili prawdziwość słabej wersji dla *prawie* wszystkich mianowników q (w tym sensie, że prawdopodobieństwo wylosowania „dobrego” mianownika ze zbioru wszystkich liczb naturalnych nie większych niż n dąży do 1 przy $n \rightarrow \infty$). W takim sformułowaniu autorom udało się uzyskać stałą $A = 50$, która rok później została poprawiona do $A = 5$ przez

ShinnYih Huanga. W maju 2026 roku Xin Zhang na arXiv zamieścił artykuł, w którym postuluje dowód słabej wersji hipotezy Zaremby. Do dziś jednak nie wiemy, czy istnieje choć jedna liczba, dla której $m(q) > 5$.

Strona arXiv.org to bezpłatne internetowe repozytorium preprintów naukowych, czyli prac udostępnianych publicznie zwykle przed formalną publikacją w czasopiśmie naukowym. Wyniki z arXiv należy traktować z pewną dozą ostrożności, choć często są poprawne.

Na koniec pozwolę sobie na postawienie innej zuchwałej hipotezy: liczba mianowników, dla których $m(q) > 2$ jest skończona.