



Słynne c-fasolki

Bartłomiej BZDEGA*

*Uniwersytet im. A. Mickiewicza w Poznaniu

Oto ostatni z cyklu kącików poświęconych teorii gier. Rozważymy tu jedno – ale za to jakie! – zadanie dwunaste z zawodów I stopnia LXI Olimpiady Matematycznej. Jego autorem jest Jakub Onufry Wojtaszczyk. Na potrzeby kącika nieznacznie zmodyfikowałem i ograniczyłem treść do „trudniejszej połowy”, choć „łatwiejsza połowa”, obejmująca przypadek $c \geq 2$, wcale do łatwych nie należy. Zadanie rozwiązało tylko trzech uczestników spośród 1517 startujących z całej Polski.

Zadanie. Ustalmy liczbę dodatnią $c < 2$. Gracze K i F grają w c -fasolki, a reguły gry są następujące. Mamy $n \geq 2$ kubków, na początku wszystkie są puste. W każdej rundzie gracz K wskazuje dwa rozłączne, niepuste zbiory kubków, a gracz F wybiera jeden ze wskazanych zbiorów i dokłada po jednej fasolce do każdego z kubków w tym zbiorze. Celem gracza K jest doprowadzenie w co najwyżej $\lfloor cn \rfloor$ rundach do tego, by w każdym kubku była inna liczba fasolek. Udowodnić, że dla wystarczająco dużych n gracz F ma strategię wygrywającą.

Rozważmy najpierw dowolną grę i niech σ będzie funkcją, która każdej pozycji przypisuje pewną liczbę. Taką funkcję nazywamy *funkcją oceny pozycji*, a jej wartości – *ocenami*. Strategię gracza (I lub II) nazwiemy *minimalizującą funkcję* σ , jeśli zawsze nakazuje wykonać ruch do takiej pozycji, której ocena jest najniższa. Metoda, którą zastosujemy, polega na znalezieniu odpowiedniej funkcji, a następnie uzasadnieniu, że minimalizująca ją strategia jest wygrywająca. Przykład takiego rozumowania jest w poprzednim kąciku – stosowaliśmy strategię minimalizującą potencjał.

Przewodnik po rozwiązaniu zadania.

Krok 1 – strategia. Kubkowi, w którym jest k fasolek, przypiszemy nieujemną wagę $w(k)$, która rośnie wraz z k . Jako ocenę $\sigma(T)$ pozycji T przyjmijmy sumę wag wszystkich kubków. Celem gracza F jest utrzymanie, jak długo się da, nierówności

$$\sigma(T) < w(n-1),$$

bo jeśli ona zachodzi, to w każdym kubku jest co najwyżej $n-1$ ziaren fasoli, co oznacza, że pewne dwa kubki mają ich tyle samo. Dalej zakładamy, że gracz F stosuje strategię minimalizującą funkcję σ .

Krok 2 – kontrola oceny pozycji. Załóżmy, że w pewnej pozycji T gracz K wskazał zbiory Z_1 i Z_2 , a ich wybór przez gracza F prowadzi do pozycji, odpowiednio, T_1 i T_2 . Niech T^+ będzie pozycją powstałą z pozycji T przez dodanie po jednej fasolce do każdego kubka. Zbiory Z_1 i Z_2 są rozłączne, więc

$$(\sigma(T_1) - \sigma(T)) + (\sigma(T_2) - \sigma(T)) \leq \sigma(T^+) - \sigma(T),$$

równoważnie $\sigma(T_1) + \sigma(T_2) \leq \sigma(T) + \sigma(T^+)$. W takim razie po rundzie ocena pozycji nie przekroczy $\frac{\sigma(T) + \sigma(T^+)}{2}$, niezależnie od Z_1 i Z_2 .

W tym miejscu wypadałoby spróbować dwóch podejść – w pierwszym o ile, a w drugim ile razy zwiększy się ocena pozycji po rundzie? Pozostawiam Czytelnikowi samodzielne przekonanie się, że pierwsze z nich nie prowadzi do żadnego ciekawego wniosku. Zajmiemy się zatem drugim.

Krok 3 – funkcja oceny. Wiemy już, że jeśli T' jest pozycją po jednej rundzie od pozycji T , to

$$\sigma(T') \leq \sigma(T) \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\sigma(T^+)}{\sigma(T)} \right).$$

Wygodnie by było, gdyby czynnik z prawej był niezależny od T . W tym celu można wziąć $w(k) = a^k$ dla pewnego $a > 1$. Wtedy $\sigma(T^+) = a\sigma(T)$ oraz $\sigma(T') \leq \sigma(T) \cdot \frac{a+1}{2}$. Ocena pozycji początkowej jest równa n , więc po t rundach nie przekroczy ona $n \left(\frac{a+1}{2} \right)^t$.

Wykażemy, że funkcja σ z wagami jak wyżej i odpowiednim a jest tym, czego nam trzeba. Chcemy, żeby po $\lfloor cn \rfloor$ rundach ocena pozycji była mniejsza niż $w(n-1)$, do czego wystarczy, by zachodziła nierówność

$$(1) \quad n \left(\frac{a+1}{2} \right)^{cn} < a^{n-1}.$$

Wykażemy, że jest ona prawdziwa dla wszystkich dostatecznie dużych n .

Krok 4 – technikalnia. Po przekształceniach i podstawieniu $a = 1 + 2\varepsilon$ nierówność (1) przybiera postać

$$(2) \quad \sqrt[2]{an}(1+\varepsilon)^c < 1 + 2\varepsilon.$$

Zauważmy, że

$$(1+\varepsilon)^c < 1 + 2\varepsilon \iff \frac{(1+\varepsilon)^c - 1}{\varepsilon} < 2.$$

W granicy $\varepsilon \rightarrow 0$ lewa strona drugiej nierówności jest pochodną funkcji $x \mapsto x^c$ w punkcie $x = 1$, która jest równa c , a pamiętamy, że $c < 2$. Wobec tego można tak dobrać stałe $\varepsilon, \delta > 0$, by zachodziła równość

$$(1+\delta)(1+\varepsilon)^c = (1+2\varepsilon).$$

Po podstawieniu tego do nierówności (2) otrzymamy

$$\sqrt[2]{an} < 1 + \delta.$$

Prawa strona jest niezależna od n , a lewa ma granicę 1 przy $n \rightarrow \infty$, a więc ta nierówność – a tym samym nierówność (1) – jest prawdziwa przy odpowiednio ustalonym a dla wszystkich wystarczająco dużych n .

Udowodniliśmy zatem, że dla dużych n strategia minimalizująca funkcję σ , z odpowiednio dobraną stałą a , pozwala graczowi F przetrwać co najmniej $\lfloor cn \rfloor$ rund.