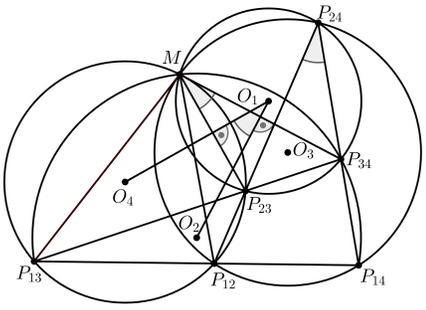
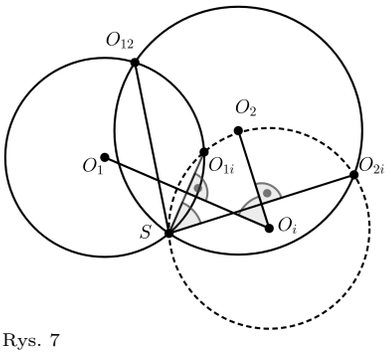


Rys. 6



Rys. 7

Ponieważ odcinek O_1O_2 jest prostopadły do odcinka MP_{14}, zaś odcinek O_1O_4 do odcinka MP_{23}, otrzymujemy

$$\sphericalangle O_4O_1O_2 = \sphericalangle P_{23}MP_{34} = P_{23}P_{24}P_{34} = \sphericalangle \ell_2\ell_4.$$

Analogicznie uzasadniamy, że $\sphericalangle O_4O_3O_2 = \sphericalangle \ell_2\ell_4$, co dowodzi, że punkty O_1, O_2, O_3 i O_4 leżą na jednym okręgu. Jednocześnie dowiedliśmy, że kąt wpisany w ten okrąg, oparty na łuku O_2O_4, jest kątem między prostymi ℓ_2 i ℓ_1; prawdziwości wzmocnionej tezy dla pozostałych łuków O_iO_j dowodzimy tak samo.

Niech teraz $n \geqslant 5$. Oznaczmy przez S drugi obok O_{12} punkt wspólny okręgów o_1 i o_2. Wiemy, że

- o_1 przechodzi przez O_{12}, O_{1i}, S,
- o_2 przechodzi przez O_{12}, O_{2i}, S.

Teraz z założenia indukcyjnego o równości kątów wiemy, że

$$\sphericalangle O_{1i}SO_{12} = \sphericalangle \ell_2\ell_i \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle O_{12}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_i\ell_1,$$

zatem $\sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1$. Wynika stąd, że S leży na o_i. Na koniec wystarczy zauważyć, że ze względu na prostopadłość par odcinków O_1O_i i SO_{1i} oraz O_2O_i i SO_{2i} mamy

$$\sphericalangle O_1O_iO_2 = \sphericalangle O_{1i}SO_{2i} = \sphericalangle \ell_2\ell_1,$$

czyli wszystkie O_i leżą na okręgu, a przy okazji sprawdziliśmy warunek kątowy dla łuku O_1O_2. Pozostałe kąty sprawdzamy analogicznie – kończąc w ten sposób dowód naszego „łańcuchowego” twierdzenia, jak również cały artykuł.

Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

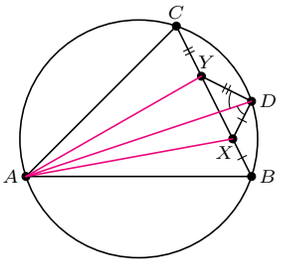
F 1155. Pierścienie Saturna zostały odkryte i opisane w 1658 roku przez Christiaana Huygensa. Do czasu wysłania sond kosmicznych w XX wieku teleskopy nie pozwalały ustalić obserwacyjnie, czy pierścienie są litymi skałami, czy zbiorem skalnych „okruchów”. Jednak jeszcze w XIX wieku zagadnienie to zostało rozstrzygnięte. Jak tego dokonano?
Wskazówka: W XIX wieku w badaniach astronomicznych zaczęto wykorzystywać fotografię i spektroskopię.

Rozwiązania na str. 24

F 1156. Podczas „spaceru” poza stacją kosmiczną astronauta „zgubił” kartkę białego papieru. Jaka temperatura T kartki ustali się po osiągnięciu stanu równowagi? Promień orbity Ziemi (i stacji, a później także kartki) $R_{ZS} \approx 1{,}50 \cdot 10^{11}$ m, promień Słońca $R_S \approx 6{,}96 \cdot 10^8$ m, temperatura Słońca $T_S \approx 5{,}77 \cdot 10^3$ K, a albedo kartki (współczynnik odbicia i rozpraszania padającego na nią światła) $a = 0{,}8$. Powierzchnia kartki jest prostopadła do kierunku w stronę Słońca.

Przygotował Dominik BUREK

M 1870. Czy można ponumerować wierzchołki i krawędzie ośmiościanu foremnego liczbami $1, 2, 3, \ldots, 18$, tak żeby numer każdego wierzchołka był równy sumie numerów wychodzących z niego krawędzi?



M 1871. Dany jest trójkąt ostrokątny ABC. Na okręgu opisanym na tym trójkącie zaznaczono punkt D antypodalny do punktu A (rysunek obok). Punkty X i Y leżą na boku BC i spełniają

$$BX = XD, \qquad CY = YD,$$

przy czym punkt X leży na odcinku BY. Udowodnić, że prosta DA jest dwusieczną kąta XDY.

M 1872. Niech $f, g\colon \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ będą funkcjami takimi, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzą równości

$$f(f(n)) = 2f(n), \qquad g(g(n)) = 2g(n), \qquad f(n) + g(n) = 4n + 1.$$

Udowodnić, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$|f(n) - g(n)| = 1.$$

Rozwiązania zadań ze strony 10

Rozwiązanie zadania M 1870.
Odpowiedź: Nie.

Przypuśćmy, że takie rozmieszczenie istnieje. Rozważmy dwa przeciwległe wierzchołki ośmiościanu. Suma liczb stojących w tych wierzchołkach jest równa sumie liczb stojących w środkach ośmiu krawędzi wychodzących z tych dwóch wierzchołków.

Ponieważ wszystkie liczby są różne, suma tych ośmiu liczb jest równa co najmniej

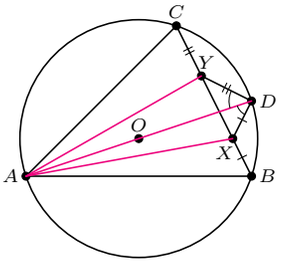
$$1 + 2 + \ldots + 8 = 36.$$

Z drugiej strony w dwóch wierzchołkach stoją dwie różne liczby nie większe niż 18, więc ich suma jest równa co najwyżej

$$17 + 18 = 35.$$

Otrzymana sprzeczność kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1871.



Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC. Wtedy punkty A, O, D leżą na jednej prostej. Rozważmy trójkąty BOX i DOX. Mamy

$$OB = OD,\ BX = DX,\ OX = OX,$$

więc trójkąty te są przystające. Zatem

$$\sphericalangle ODX = \sphericalangle OBX.$$

Analogicznie trójkąty COY i DOY są przystające, więc

$$\sphericalangle ODY = \sphericalangle OCY.$$

Trójkąt OBC jest równoramienny, bo $OB = OC$, zatem

$$\sphericalangle OBX = \sphericalangle OBC = \sphericalangle OCB = \sphericalangle OCY.$$

Wobec tego

$$\sphericalangle ODX = \sphericalangle ODY,$$

co kończy dowód.

Rozwiązanie zadania M 1872.
Udowodnimy przez indukcję zupełną, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi

$$\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}.$$

Wtedy teza będzie oczywista.

Rozważmy bazę indukcji, czyli przypadek $n = 1$. Ponieważ

$$f(1) + g(1) = 5,$$

wystarczy pokazać, że ani $f(1)$, ani $g(1)$ nie jest równe 1. Gdyby $f(1) = 1$, to z warunku $f(f(1)) = 2f(1)$ dostalibyśmy $1 = 2$, sprzeczność. Analogicznie $g(1) \neq 1$. Zatem

$$\{f(1), g(1)\} = \{2, 3\}.$$

Załóżmy teraz, że teza indukcyjna jest prawdziwa dla wszystkich liczb $1 \leqslant k < n$. Niech

$$k = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Wtedy $n \in \{2k, 2k+1\}$, a z założenia indukcyjnego

$$\{f(k), g(k)\} = \{2k, 2k+1\}.$$

Zatem $n = f(k)$ albo $n = g(k)$.

Jeśli $n = f(k)$, to

$$f(n) = f(f(k)) = 2f(k) = 2n.$$

Jeśli zaś $n = g(k)$, to korzystając z równości $f(x) + g(x) = 4x + 1$ oraz $g(g(k)) = 2g(k)$, dostajemy

$$\begin{aligned} f(n) &= f(g(k)) = 4g(k) + 1 - g(g(k)) \\ &= 2g(k) + 1 = 2n + 1. \end{aligned}$$

W obu przypadkach $f(n) \in \{2n, 2n+1\}$. Ponieważ

$$f(n) + g(n) = 4n + 1,$$

otrzymujemy

$$\{f(n), g(n)\} = \{2n, 2n+1\}.$$

Indukcja jest zakończona, a więc $|f(n) - g(n)| = 1$ dla każdego $n \in \mathbb{Z}_{>0}$.

Rozwiązanie zadania F 1155.
Zagadnienie struktury pierścieni Saturna rozstrzygnięto, korzystając ze zjawiska Dopplera. Zjawisko to pozwalało mierzyć różnicę prędkości wewnętrznego (bliższego planecie) i zewnętrznego brzegu pierścienia. Gdyby był on sztywną, litą strukturą, to jego zewnętrzny brzeg poruszałby się szybciej niż wewnętrzny: prędkość ruchu orbitalnego byłaby proporcjonalna do promienia R orbity badanego fragmentu: $v(R) = \omega R$, ze stałą wartością prędkości kątowej ω dla całego pierścienia (tzn. niezależną od R). Dla struktury złożonej z wielu niewielkich okruchów skalnych jej zewnętrzne części poruszają się wolniej od wewnętrznych. Mamy bowiem (G jest stałą grawitacji, a M masą Saturna)

$$v(R) = \sqrt{\frac{GM}{R}}.$$

Stwierdzono, że pierścienie Saturna są gęstym zbiorem – w ogromnej większości – drobnych okruchów skalnych.

Rozwiązanie zadania F 1156.
Przyjmijmy, że kartka ma powierzchnię A. Moc promieniowania przez Słońce (σ oznacza stałą Stefana–Boltzmanna) wynosi $W = 4\pi R_S^2 \sigma T_S^4$. Na powierzchnię kartki pada część tej mocy równa $W \cdot A/(4\pi R_{ZS}^2)$. Część a tej mocy jest odbijania, a tylko część $1 - a$ absorbowana. Obie strony kartki o temperaturze T emitują promieniowanie termiczne, a więc emitowana moc wynosi $2A\sigma T^4$. Po osiągnięciu równowagi (ustaleniu końcowej temperatury T) moc promieniowana przez kartkę równa jest mocy absorbowanej. Mamy zatem:

$$(1-a)\frac{4\pi\sigma R_S^2 T^4}{4\pi R_{ZS}^2} = 2A\sigma T^4.$$

Po skróceniu czynników występujących po obu stronach równania otrzymujemy

$$T^4 = T_S^4 \frac{R_S^2(1-a)}{2R_{ZS}^2},$$

czyli

$$T = T_S \left(\frac{R_S\sqrt{1-a}}{R_{ZS}\sqrt{2}} \right)^{1/2}.$$

Liczbowo, dla danych w treści zadania, $T \approx 221$ K $\approx -52{,}1$°C.