



SPIS TREŚCI

NUMERU 6(174)

Twierdzenie Wantzela <i>dr Krzysztof Ciesielski</i> <i>dr Zdzisław Pogoda</i>	str. 2
Korelacje biegunowe <i>dr hab. Marek Kordos</i>	str. 3
Twierdzenie ergodyczne <i>dr Grzegorz Świątek</i>	str. 4
Księżycowe niebo i figury Lissajous <i>Juliusz Domański</i>	str. 6
Patrz w niebo	str. 7
Zadania	str. 7
Mała Delta	str. 8
Niezależność twierdzenia Goodsteina <i>dr Adam Krawczyk</i>	str.10
Norma 2-adyczna <i>doc. dr Edmund Puczyłowski</i>	str.11
Martyngaly <i>dr Paweł Hitczenko</i>	str.12
Klub 44	str.14
Drobiazgi	str.16
Ułamki łańcuchowe <i>dr Jerzy Ryll</i>	str.17

W następnym numerze:
O grze w 20 pytań

Odbitki laserowe otrzymaliśmy
 w prezencie od Zakładu
 Informatyki i Automatyzacji Badań
 Domu Handlowego Nauki

„Delta”
 matematyczno-fizyczno-astronomiczny
 miesięcznik popularny
 Polskiego Towarzystwa
 Matematycznego, Polskiego
 Towarzystwa Fizycznego i Polskiego
 Towarzystwa Astronomicznego
 wydawany przy poparciu
 Ministerstwa Edukacji Narodowej

Komitet Redakcyjny
 dr Maciej Bryński
 dr Bogdan Cichocki
 dr Antoni L. Dawidowicz
 dr Alicja Derkowska
 doc.dr Jan A. Gaj
 doc.dr Bolesław Gleichgewicht
 doc.dr Tomasz Hofmokr – v-przewodniczący
 doc.dr Tadeusz Jarzębowski
 doc.dr Marcin Kubiak
 mgr Andrzej Mąkowski
 dr Zbigniew Plochocki
 dr Jan Rempała
 prof.dr Konrad Rudnicki
 prof.dr Grzegorz Sitarski
 prof.dr Józef I. Smak
 prof.dr Kazimierz Stepień
 prof.dr Mieczysław Subotowicz
 doc.dr Andrzej Szymacha
 doc.dr Aniela Wolska
 prof.dr Andrzej Żakowsky
 prof.dr Wojciech Żakowski –
 przewodniczący

WARUNKI PRENUMERATY

- Cena prenumeraty kwartalnej zł 210,- półrocznej zł 420,- rocznej zł 840,-
- dla osób prawnych – instytucji i zakładów pracy
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miastach wojewódzkich i pozostałych miastach, w których znajdują się siedziby oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch”, zamawiają prenumeratę w tych oddziałach.
 — instytucje i zakłady pracy zlokalizowane w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” i na terenach wiejskich opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli.
 - dla osób fizycznych – indywidualnych prenumeratorów:
 — osoby fizyczne zamieszkałe na wsi i w miejscowościach, gdzie nie ma oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę w urzędach pocztowych i u doręczycieli
 — osoby fizyczne zamieszkałe w miastach – siedzibach oddziałów RSW „Prasa-Książka-Ruch” opłacają prenumeratę wyłącznie w urzędach pocztowych nadawczo-oddawczych właściwych dla miejsca zamieszkania prenumeratora. Wpłaty dokonują używając „blankietu wpłaty” na rachunek bankowy miejscowego oddziału RSW „Prasa-Książka-Ruch”.
 - Prenumeratę ze zleceniem wysyłki za granicę przyjmuje RSW „Prasa-Książka-Ruch”, Centrala Kolportażu Prasy i Wydawnictw, ul. Towarowa 28, 00-958 Warszawa, konto NBP XV Oddział w Warszawie Nr 1153-201045-139-11. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę pocztą zwykłą jest droższa od prenumeraty krajowej o 50% dla zlecających indywidualnych i o 100% dla zlecających instytucji i zakładów pracy. Terminy przyjmowania prenumeraty na kraj i za granicę:
 — do dnia 10 listopada na I kwartał, I półrocze roku następnego oraz cały rok następny,
 — do dnia 1 każdego miesiąca poprzedzającego okres prenumeraty roku bieżącego.

Cena 1 egzemplarza zł 70,-

Redaguje kolegium w składzie:
 mgr inż. Krzysztof Biesaga
 mgr Krystyna Kordos – sekr. red.
 dr hab. Marek Kordos – red. naczn.
 dr Tomasz Kwast
 mgr inż. arch. Mariola Lotysz
 dr Andrzej Majhofer
 mgr Anna Rudnik
 dr Jerzy Ryll
 mgr Joanna Udalska

Adres Redakcji
 ul. Koszykowa 6a
 00-564 Warszawa
 tel. 21-19-85

Krajowe Wydawnictwo Czasopism
 RSW „Prasa-Książka-Ruch”
 ul. Noakowskiego 14
 00-666 Warszawa
 tel. centr. 25-72-91 do 93
 Biuro Reklam i Propagandy
 tel. 25-56-26
 Nakład 20 000 egz. Objętość 2 ark. wyd.;
 2,50 ark. druk;
 papier offsetowy V kl. 70 g.
 Wydrukowano w Prasowych Zakł. Graficznych RSW „Prasa-Książka-Ruch” w Łodzi,
 ul. Armii Czerwonej 28, Z. 1036/88, U-51
 Skład systemem TeX
 wykonała redakcja.

Jeżeli przez zadania będziemy rozumieli konkretne, postawione w języku matematyki pytania, na które nie znamy odpowiedzi (a nie tzw. zadania szkolne będące tylko testami sprawdzającymi opanowanie przez ucznia danej „partii materiału”), to pytanie, czy matematyka polega na rozwiązywaniu zadań, nie wyda nam się bezsensowne. Są w tej kwestii, oczywiście, przeciwstawne zapatrywania i zamiłowania. Wacław Sierpiński, na przykład, przez całe swoje życie wyłącznie rozwiązywał i stawiał zadania i to dało mu poczesne miejsce wśród największych matematyków. A trudno byłoby sprowadzić do rozwiązywania zadań nie mniej cenioną na całym świecie twórczość matematyczną Kazimierza Kuratowskiego – on tworzył teorie (np. domknięciowa definicja topologii).

Najklarowniejszą wypowiedź na temat roli rozwiązywania zadań dla matematyki dał David Hilbert w słynnym wykładzie na II Kongresie Matematyków w Paryżu w 1900 roku (dokładnie 8 sierpnia). Wykład ten jest znany pod nazwą Problemów Hilberta.

Hilbert stwierdził, że tylko rozwiązywanie zadań stanowi bodziec do rozwijania matematyki, do wzbogacania jej o nowe pojęcia i metody, do poszerzania jej języka. I na potwierdzenie tej tezy dał wiele przykładów. Zadanie o brachistochronie dało Bernoulliemu impuls do stworzenia rachunku wariacyjnego. Tzw. Wielkie Twierdzenie Fermata, choć nie udowodnione, naprowadziło Kummera i Kroneckera na drogę usamodzielnienia algebry abstrakcyjnej. Zagadnienie trzech ciał (też nie rozwiązane) stworzyło teorię równań różniczkowych. Problem najkrótszych linii na powierzchni to źródło geometrii różniczkowej. Pytanie o symetrie wielościanów to źródło teorii niezmienników. Itd. – wszystkie przykłady są wzięte z wykładu Hilberta.

Dlatego też Hilbert w dalszej części wykładu podał 23 zadania, których rozwiązywanie (jego zdaniem) powinno przynieść matematyce znaczący rozwój. I miał rację. Rzeczywiście, w związku z tymi zadaniami powstała znaczna część dorobku dwudziestowiecznej matematyki.

W tym numerze *Delty* pragniemy zwrócić uwagę na, niejako odwrotną, zależność. Chcemy po prostu przytoczyć kilka zadań – w wysłowieniu całkiem prostych – których rozwiązanie jest możliwe właśnie dzięki istnieniu bardzo rozbudowanych teorii.

Warto przy tym zwrócić uwagę na to, że z owych teorii można korzystać jak z narzędzi – nie wnikając w to, jak zostały skonstruowane. Podobnie, jak możemy korzystać z samochodu czy z komputera, choć nie wiemy, jak można by go zbudować.

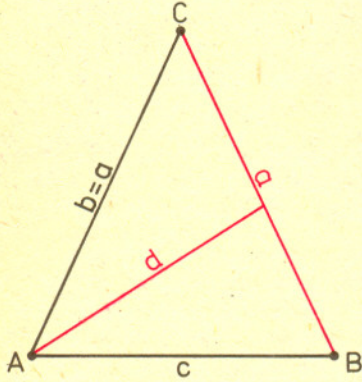
Z pewnością każdy, kto choć trochę obserwuje przyrodę, doszukuje się w niej rozmaitych prawidłowości, jakiejś harmonii. Taką próbą usystematyzowania świata była astrologia, przez niektórych uprawiana do dziś. Nie trzeba się więc dziwić, że skądinąd niezmiernie zasłużony dla astronomii Kepler jest twórcą „harmonii sfer” (patrz okładka), w której między sferami o rozmiarach orbit planet są umieszczone kolejno wielościany foremne. Jest ich pięć, planet w czasach Keplera znano sześć – układ taki był więc pięknie „zamknięty” i niemal szkoda, że odkryto następne planety. Wtedy okazało się, że rozmiary orbit planet można opisać prawem Titiusa-Bodego i znów powstała „harmonia”, o której do dziś nie wiadomo, czy jest dziełem przypadku, czy skutkiem praw przyrody. Samą zresztą eliptyczność orbit planet i pozostałe swoje prawa Kepler znalazł też przez dopasowanie do obserwacji, a dopiero dużo później okazało się, że tak musi być z przyczyn wyższych. Taką dziwną z początku prawidłowością, odkrytą całkiem niedawno, było prawo Hubble’a. Prawo to pchnęło na całkiem nowe tory kosmologię i dzięki temu wkrótce znalazło właściwą interpretację na jej gruncie.

Ale i dziś odkrywa się fakty, z którymi nie wiadomo co robić. Wspomnijmy np. niezwykle prawo wiążące masę i moment pędu słuszne dla dowolnych obiektów Wszechświata czy tajemnicze koincydencje wielkich liczb utworzonych ze stałych fizycznych. Czy są to jakieś prawa natury, czy podziela los modelu z naszej okładki – obecnie nie wiadomo.

Twierdzenie Wantzela

Problem, któremu chcemy poświęcić nieco uwagi, będzie ściśle związany z konstrukcjami, aczkolwiek nie przeprowadzimy tu żadnych konstrukcji. Zajmiemy się pewnym niebezpieczeństwem, czyhającym na każdego próbującego coś skonstruować – niebezpieczeństwem, którego bardzo często nie jesteśmy świadomi. Ryzyko, o którym mowa, najlepiej ukaże często cytowany przykład.

Postawmy zadanie: *skonstruować za pomocą cyrkla i linijki taki trójkąt równoramienny o ramieniu długości a , że długość odcinka dwusiecznej poprowadzonej z kąta przy podstawie do ramienia równa jest d* . Zakładamy przy tym, że liczby a i d są tak dobrane, by poszukiwany trójkąt istniał.



Zadanie wygląda na standardowe i wielu od razu podjęłoby próby konstrukcji. W pewnych sytuacjach nie doprowadziłyby one jednak do sukcesu. Dlaczego? Okazuje się mianowicie, że konstrukcja jest niewykonalna. Argument, że nikomu nie udało się jej przeprowadzić, nie jest dobrym uzasadnieniem. Niewykonalność konstrukcji należy precyzyjnie udowodnić. I to jest poważnym problemem. No bo jak to zrobić?

Z pomocą przychodzi zaawansowana algebra. Zadanie konstrukcyjne możemy rozwiązywać nie tylko geometrycznie (za pomocą pomysłów i sztuczek). Można to zrobić także metodami algebraicznymi, sprowadzając problem konkretnej konstrukcji do rozwiązania odpowiedniego równania. Jeśli pierwiastki tego równania dadzą się skonstruować (tzn. możemy zbudować za pomocą cyrkla i linijki odcinki o długościach równych pierwiastkom), to i z figurą sobie poradzimy. A o tym, które liczby można w opisany powyżej sposób otrzymać, dokładnie wiadomo, zatem po ewentualnym rozwiązaniu równania wynik jest natychmiastowy.

W przypadku naszego zadania wykorzystamy następujące kryterium:

Pierwiastki równania trzeciego stopnia o współczynnikach całkowitych są konstruowalne za pomocą cyrkla i linijki wtedy i tylko wtedy, gdy równanie to ma przynajmniej jeden pierwiastek wymierny.

Dowód tego kryterium jest trudny. Wymaga zastosowania matematyki niezwykle zaawansowanej. Mowa o teorii pierwiastnikowych rozszerzeń ciał, a konkretnie o tak zwanym twierdzeniu Wantzela.

Wypadałoby tu zapewne poświęcić tej teorii kilka zdań. Niestety, „wytoczona armata” jest na to zbyt wielka i ciężka.

Mając już do dyspozycji owo potężne narzędzie, przejdźmy do rozstrzygnięcia wyjściowego problemu. Zaznaczmy, że wykorzystywane twierdzenie zostało wypowiedziane całkowicie elementarnie.

Przedstawmy najpierw pewien wzór pozwalający wyrazić długość odcinka dwusiecznej za pomocą długości boków trójkąta

$$d^2 = bc \frac{(b+c)^2 - a^2}{(b+c)^2},$$

gdzie a, b, c , są długościami boków trójkąta, d długością odcinka dwusiecznej poprowadzonej do boku a . Wzór ten na ogół nie jest podawany w szkole, jest jednak prosty do wykazania.

Rozważmy nasz problem przy konkretnie ustalonych liczbach: $a = d = 1$, trójkąt jest równoramienny, więc $a = b$, c jest długością podstawy. Czytelnik zechce sprawdzić, że przy tych założeniach szukany trójkąt istnieje. Nasz wzór przyjmuje postać

$1 = c \frac{(c+1)^2 - 1}{(c+1)^2}$. Po elementarnych przekształceniach dostajemy równanie

$c^3 + c^2 - 2c - 1 = 0$. Znane jest proste twierdzenie mówiące o tym, że gdy liczba wymierna $\frac{m}{n}$ (przedstawiona w postaci ułamka nieskracalnego) jest pierwiastkiem wielomianu o współczynnikach całkowitych, to m musi być dzielnikiem wyrazu wolnego, a n dzielnikiem współczynnika przy najwyższej potędze. W naszym zatem przypadku ewentualnymi wymiernymi pierwiastkami równania mogłyby być tylko 1 lub -1 . Żadne z nich równania jednak nie spełnia. Oznacza to, że konstrukcja, od której wystartowaliśmy, jest niewykonalna.

Owoce potężnej i zawiłej teorii dopomogły nam w rozwiązaniu problemu, wydawałoby się, zupełnie elementarnego. Naszą radość mąci jednak pytanie: czy musieliśmy z tej pomocy korzystać?

Brzmi to może nieprawdopodobnie, ale zastosowana metoda jest jedyną obecnie znaną.



dr Krzysztof CIESIELSKI,
dr Zdzisław POGODA

Korelacje biegunowe

Zadanie: Posługując się jedynie linijką skonstruować styczną przez dany punkt do danego okręgu.

Rozwiązanie: Przez punkt P prowadzimy (jakąś) prostą 1 przecinającą okrąg w punktach 2 i 3. Powtarzamy tę czynność: przez P prowadzimy (inną) prostą 4 przecinającą okrąg w punktach 5 i 6. Prosta 7 przechodząca przez 2 i 5 przecina prostą 8 przechodzącą przez 3 i 6 w punkcie 9. Podobnie prosta 10 przez 2 i 6 przecina prostą 11 przez 3 i 5 w punkcie 12. Punkty 14 i 15 otrzymujemy w przecięciu prostej 13 poprowadzonej przez punkty 9 i 12 z okręgiem. Proste $P14$ i $P15$ są styczne do okręgu. Ale dlaczego?

Bardzo dowolny sposób obrania prostych 1 i 4 utrudnia zastosowanie zwykłych metod geometrycznych. Poprawność konstrukcji można za to dość prosto uzasadnić, gdy zna się geometrię rzutową.

Pomysł geometrii rzutowej polega na tym, by poza zwykłymi punktami geometrii euklidesowej posługiwać się również punktami „w nieskończoności” – punktami wspólnymi prostych równoległych. Łatwo wpaść na taki pomysł obserwując pobocznie ginącej na horyzoncie drogi – są równoległe, ale na horyzoncie się zbiegają.

W ten sposób płaszczyzna została wzbogacona nowymi (licznymi) punktami i jedną (z nich złożoną) prostą – horyzontem.

Pierwsze spostrzeżenie, jakiego dokonano, to stwierdzenie równoprawności punktów i prostych na płaszczyźnie rzutowej. Dowolne dwa punkty mają „swoją” prostą, dowolne dwie proste mają „swoją” punkt. Okazało się, że każde twierdzenie o punktach i prostych płaszczyzny rzutowej pozostaje prawdziwe, gdy napiszemy je zamieniając miejscami nazwy punktów z nazwami prostych. Zastanowiono się też nad tym, jakie własności może mieć funkcja realizująca tę zamianę. Funkcję taką (zamieniającą punkty na proste i proste na punkty tak, by wszystkie własności geometryczne były zachowane) nazwano korelacją.

Spśród różnych korelacji wyróżniają się te, które mają następującą własność:

$$\phi(A) = k \leftrightarrow \phi(k) = A,$$

czyli jeśli punkt przechodzi na jakąś prostą, to równocześnie ta prosta przechodzi na ten punkt. Korelacje te nazwano biegunowymi, a odpowiadające sobie punkt i prosta – biegunem i biegunową. Von Staudt udowodnił, że zbiór punktów leżących na swojej biegunowej (w danej korelacji) – o ile jest niepusty – jest stożkową (hiperbolą, parabolą, elipsą; w szczególności może być okręgiem). Zbiór zaś owych biegunowych składa się ze wszystkich stycznych do tej stożkowej i to w odpowiadających im punktach.

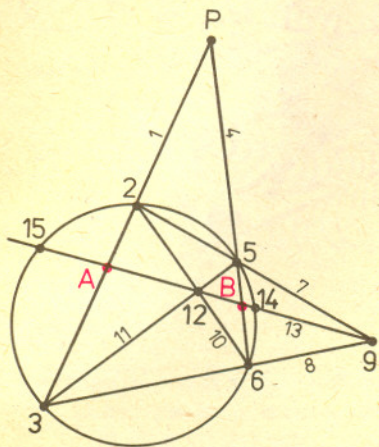
W naszym zadaniu prosta 13 okaże się biegunową P . Aby się o tym przekonać, musimy wspomnieć o jeszcze jednym pojęciu i jeszcze jednym twierdzeniu. Jeżeli dla czterech punktów A, B, C, D , leżących na prostej, istnieje czworokąt $PQRS$ taki, że proste PS i QR przechodzą przez A , PQ i RS przez B , QS – przez C i PR – przez D , to czwórkę (A, B, C, D) nazywamy harmoniczną. Dla dowolnych trzech współliniowych i różnych punktów A, B, C istnieje dokładnie jeden punkt D , taki, że (A, B, C, D) jest harmoniczna.

Seydewitz wykazał, że jeśli prosta l przecina stożkową w punktach K i L , to biegunowa dowolnego punktu M z prostej l przecina prostą l w takim punkcie N , że (K, L, M, N) jest harmoniczna. Spójrzmy na rysunek 1. Czworokąt $9, 6, 12, 5$ pokazuje, że $(2, 3, P, A)$ jest harmoniczna, a ponieważ ostatni z tych punktów jest wyznaczony jednoznacznie, więc A (punkt przecięcia 13 i 1) leży na biegunowej punktu P . Podobnie obserwując czworokąt $12, 2, 9, 3$ i prostą 4 stwierdzamy, że B (punkt przecięcia 13 i 4) leży na biegunowej punktu P . Tą biegunową musi więc być prosta 13.

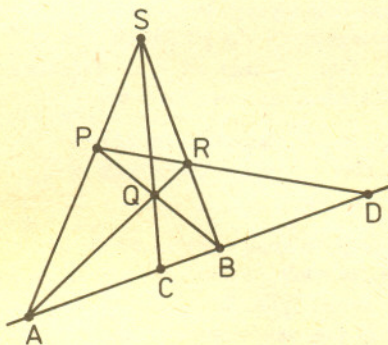
A jak stąd wynika, że proste $P14$ i $P15$ są styczne? Już bardzo prosto.

Oznaczmy przez ϕ korelację biegunową odpowiadającą naszemu okręgowi. Zatem 14 i 15 leżą na $\phi(P)$. Ponieważ ϕ jest korelacją biegunową (patrz określenie korelacji i korelacji biegunowej), więc $\phi(14)$ i $\phi(15)$ przechodzą przez P . Ale z twierdzenia von Staudta wynika, że $\phi(14)$ i $\phi(15)$ są styczne do okręgu w punktach 14 i 15. Koniec uzasadnienia konstrukcji.

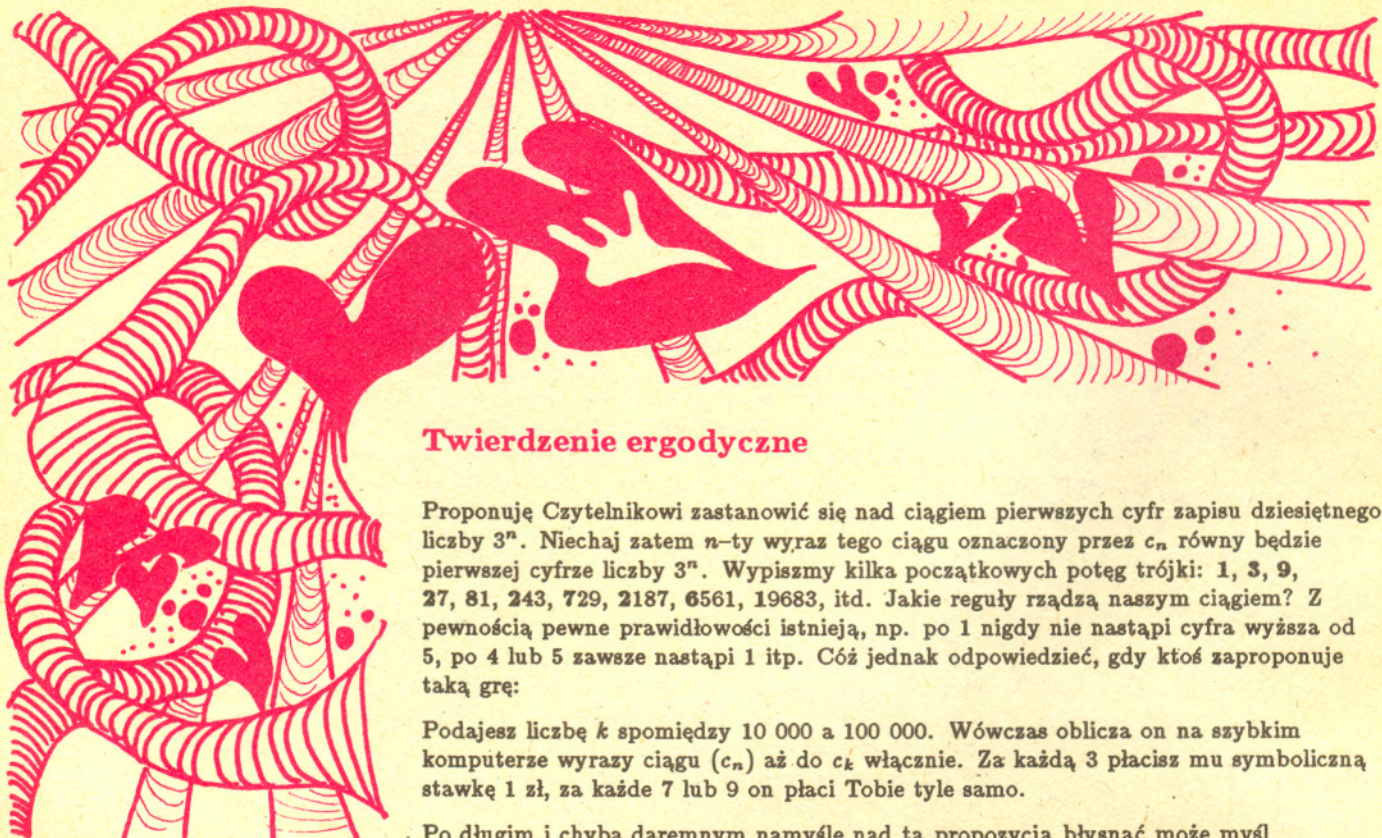
Przy okazji okazało się, że podany tu sposób konstrukcji samą linijką stycznych do okręgu jest dobry także dla rysowania stycznych do hiperboli, paraboli i elipsy (gdzie z cyrkla i tak pożytek byłby mały).



Rys. 1



Rys. 2



Twierdzenie ergodyczne

Proponuję Czytelnikowi zastanowić się nad ciągiem pierwszych cyfr zapisu dziesiętnego liczby 3^n . Niechaj zatem n -ty wyraz tego ciągu oznaczony przez c_n równy będzie pierwszej cyfrze liczby 3^n . Wypiszmy kilka początkowych potęg trójki: 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, 19683, itd. Jakie reguły rządzą naszym ciągiem? Z pewnością pewne prawidłowości istnieją, np. po 1 nigdy nie nastąpi cyfra wyższa od 5, po 4 lub 5 zawsze nastąpi 1 itp. Cóż jednak odpowiedzieć, gdy ktoś zaproponuje taką grę:

Podajesz liczbę k pomiędzy 10 000 a 100 000. Wówczas oblicza on na szybkim komputerze wyrazy ciągu (c_n) aż do c_k włącznie. Za każdą 3 płacisz mu symboliczną stawkę 1 zł, za każde 7 lub 9 on płaci Tobie tyle samo.

Po długim i chyba daremnym namyśle nad tą propozycją błysnąć może myśl następująca: może wartości ciągu (c_n) występują tak mniej więcej losowo, na chybił trafił? W końcu dziesiątka, będąca podstawą systemu pisania liczb, nie ma wiele wspólnego z trójką, której potęgi bierzemy pod uwagę. Przy dużej liczbie takich prób losowych, a 100 tysięcy wygląda na takową, średnia częstość występowania każdej z cyfr powinna dążyć do prawdopodobieństwa jej wylosowania, tj. do $\frac{1}{9}$. Zatem 7, 9 i 3 powinny wszystkie występować z tą samą częstością, zatem oplaca się grać. Zresztą, nasza próbka dla paru pierwszych wyrazów ciągu potwierdza tę prawidłowość.

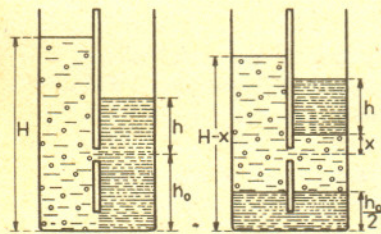
Oczywiście nie podejmuję się obrony tego rozumowania przed Czytelnikiem choć trochę zaznajomionym z rachunkiem prawdopodobieństwa, postaram się jednak w dalszym ciągu wykazać, że jakieś jądro racjonalne w nim jest.

Zanim jednak zabierzemy się do rozwiązywania naszego problemu, postaramy się go nieco przeformułować. Rozpatrzmy ciąg o wyrazach $a_n = n \log_{10} 3$ wraz z ciągiem (u_n) części ułamkowych liczb a_n . Zauważmy, że znajomość samej tylko liczby u_n pozwala wyznaczyć c_n . Istotnie, $3^n = 10^{a_n - u_n} \cdot 10^{u_n}$, przy czym pierwszy czynnik, będący naturalną potęgą dziesiątki, nie ma wpływu na cyfry rozwinięcia 3^n . Wnioskujemy stąd, że c_n jest równe pewnemu l pomiędzy 1 a 9 wtedy i tylko wtedy, gdy u_n zawiera się w przedziale $[\log_{10} l, \log_{10}(l+1))$. Wyobraźmy sobie dalej okrąg S o obwodzie 1 z ustalonym punktem p_0 . Punkt p_n wybieramy tak, aby dodatnio zorientowany łuk (p_0, p_n) miał długość u_n . Zauważmy, że p_i powstaje z p_{i-1} przez obrót o kąt skierowany $2\pi \log_{10} 3$. Ponieważ położenie p_n na okręgu S wyznacza u_n , wyznacza też c_n . Zdarzeniu polegającemu na tym, że pewien c_n jest równy l , odpowiada łuk na S o długości $\log_{10}(l+1)$.

Nie przypadkiem użyłem w poprzednim zdaniu słowa zdarzenie. Spróbujmy spojrzeć na S jako na przestrzeń zdarzeń elementarnych. Różni się ona pod jednym istotnym względem od przestrzeni rozpatrywanych w elementarnym kursie rachunku prawdopodobieństwa – jest nieskończona. W takich sytuacjach zwykle nie ma sensu zadawanie rozkładu prawdopodobieństwa przez podanie prawdopodobieństw wszystkich zdarzeń elementarnych, gdyż te z reguły są równe 0. My rozpatrzmy na S rozkład prawdopodobieństwa intuicyjnie określany jako jednostajny, który można przy tym scharakteryzować przez warunek, że prawdopodobieństwo tego, że punkt należy do łuku jest równe długości tego łuku. Hipotezę, którą całkiem mgliście postawiłem na początku artykułu, chciałoby się teraz sformułować tak: dla dowolnego punktu należącego do S częstość wpadania jego obrazów przy obrocie o kąt $2\pi \log_{10} 3$ do zbioru (zdarzenia) A dąży do prawdopodobieństwa A , gdy liczba rozpatrywanych obrazów dąży do nieskończoności.



Rozwiązanie zadania F 246. Ciecz będzie wyciekać przez otwór z lewej części powodując „rozerwanie” słupa cieczy w drugiej części.



Ta część cieczy, która była nad otworem, podniesie się, a ciecz pod otworem przesunie się w dół. Z warunku równości ciśnień w lewej i prawej części wynika, że poniżej otworu ciecz będzie rozłożona jednakowo w obu dolnych częściach. W lewej i prawej części znajdzie się słup drugiej cieczy o wysokości $h_0/2$. W ten sposób poziom cieczy w prawej części zmieni się o wielkość x równą zmianie poziomu w lewej części. Oznaczmy przez h wysokość poziomu cieczy do momentu rozpoczęcia przeciekania w prawej części powyżej otworu, a przez H wysokość poziomu w lewej części. Z warunku równości ciśnień na dole $(h+h_0)\rho_2 = H\rho_1$ i z warunku równości ciśnień na poziomie otworu po zakończeniu przeciekania: $h\rho_2 + x\rho_1 = (H-h_0-x)\rho_1$ wynika, że $x = \frac{h_0}{2} \left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1 \right)$.

Redaguje dr hab. Andrzej HENNEL

ZMARŁ KLAUS FUCHS

Nazwisko Klause Fuchsa wiąże się z historią fizyki jądrowej i budową bomby atomowej w Los Alamos (USA) w czasie drugiej wojny światowej. Fuchs był synem niemieckiego pastora luterńskiego, członkiem Komunistycznej Partii Niemiec i jednym z najzdolniejszych uczniów Maxa Borna. Idąc śladami swojego mistrza, który opuścił hitlerowskie Niemcy, Fuchs zbiegł w 1933 roku do Anglii. Pracował tam z Nevill Mottem w Bristolu, następnie z Maxem Bornem w Edynburgu i w końcu w 1941 roku trafił do zespołu kierowanego w Birmingham przez kolejnego uciekiniera Rudolfa Peierlsa z Berlina. Zespół ten zajmował się problemami rozszczepienia jądra atomowego i w 1941 roku prowadził obliczenia dotyczące ilości uranu 235 potrzebnego do wywołania eksplozji atomowej, współpracując początkowo nieformalnie, a później już ściśle z uczonymi znajdującymi się w Stanach Zjednoczonych. Od końca 1943 roku Fuchs przebywał już w USA, a w okresie od sierpnia 1944 roku do czerwca 1945 roku w samym centrum amerykańskich badań atomowych - Los Alamos, pracując nad bombą plutonową, zrzuconą później na Nagasaki. Po wojnie objął on kierownictwo oddziału fizyki teoretycznej w Harwell (Anglia). Po kilku latach Amerykanie odszyfrowali depeszę, wysłaną w 1944 roku z Nowego Jorku do Moskwy, dotyczącą badań jądrowych i jednoznacznie wskazującą Fuchsa jako źródło informacji. W międzyczasie sam Fuchs w rozmowach z agentem kontrwywiadu brytyjskiego opowiedział, iż od początków 1942 roku do wiosny 1949 roku przekazywał do ZSRR wszystkie dostępne mu tajernice atomowe. Ostatecznie 27 stycznia 1950 roku został on aresztowany i następnie skazany na 14 lat więzienia. W 1959 roku został zwolniony za dobre sprawowanie i wyjechał do NRD. Był tam inicjatorem programu wykorzystania energii jądrowej, szefem ośrodka badań atomowych w pobliżu Drezna i członkiem KC NSPJ. W 1979 roku przeszedł na emeryturę, zmarł w styczniu 1988 roku w wieku 76 lat. Zdaniem P. Grudzińskiego, historyka zajmującego się dziejami bomby atomowej: "... dla odkrycia zasadniczego sekretu, czyli faktu, że Stany Zjednoczone podjęły szeroko zakrojone prace nad bombą atomową, nie potrzeba było informacji Fuchsa." (Uczni i barbarzyńcy, Polityka nuklearna Stanów Zjednoczonych 1939-1945, PWN Warszawa 1987, s. 124). Grudziński powołuje się przy tym na I. Golowina (biografia "ojca radzieckiej bomby atomowej" I. W. Kurczatowa) twierdzącego, że "w tym czasie" (tj. około połowy roku 1942) rząd radziecki dysponował informacjami o projekcie amerykańskim. Natomiast ostatnio akademik Andriej Sacharow potwierdził na łamach pisma "Moskowskie Nowosti", iż Fuchs rzeczywiście przekazał do ZSRR założenia teoretyczne amerykańskiej bomby atomowej, a co najważniejsze - podał w 1942 r., że stworzenie takiej bomby jest w ogóle możliwe, i że nad tym się pracuje. Z kolei jeden z twórców pokazywanego niedawno przez polską telewizję filmu "Ryzyko" - Barszczewskij oświadczył, że obecnie przygotowuje film o życiu i działalności Fuchsa. Ponadto w 1987 roku ukazały się dwie książki: N. Moss "Klaus Fuchs: The Man Who Stole The Atom Bomb" w Anglii oraz R. C. Williams "Klaus Fuchs, Atom Spy" w USA, które zawierają tekst zeznań Fuchsa. Tak więc, ten niezwykle interesujący aspekt historii XX wieku jest coraz bliższy pełnego wyjaśnienia

Od dawna wiadomo, że tak postawiona hipoteza jest fałszywa. Niezwykle łatwo jest bowiem podać kontrprzykład. Niech punkt x będzie dowolnie wybrany na S i niech A będzie zbiorem składającym się z ciągu, którego wyrazami są obrazy punktu x przy iteracjach obrotu. Jest jasne, że dla punktu x częstość wpadania jego obrazów w A jest równa 1, ale dla wielu innych punktów, np. leżących w wymiernej odległości od x , częstość jest równa 0. Dlatego też żądamy zwykle, aby prawdopodobieństwo tego, że punkt x wpadnie kiedyś do zbioru A , było równe 1, jeśli tylko prawdopodobieństwo $P(A)$ zdarzenia A jest dodatnie. Mówimy wtedy, że obrót jest **ergodyczny** względem prawdopodobieństwa P .

Twierdzenie

Obrót na okręgu o kąt α jest ergodyczny względem jednostajnego rozkładu prawdopodobieństwa wtedy i tylko wtedy, gdy α jest niewspółmierne z π , tj. gdy α/π nie jest liczbą wymierną.

Twierdzenie to niemal od razu pozwoli nam podjąć słuszną decyzję w sprawie przystąpienia do ewentualnej gry. Udowodnimy mianowicie następujący

Wniosek

Dla dowolnego punktu x , należącego do S oraz łuku A , częstość wpadania obrazów x pod działaniem obrotu o $2\pi \log_{10} 3$ dąży do długości A .

Dowód

Sprawdźmy, że obrót ten jest ergodyczny. Wobec Twierdzenia wystarczy w tym celu wykazać jedynie, że liczba $\log_{10} 3$ jest niewymierna. Gdyby tak nie było, zachodziłaby równość $\log_{10} 3 = \frac{p}{q}$ z pewnymi naturalnymi p i q . Stąd wnosilibyśmy, że $3 = 10^{\frac{p}{q}}$, a zatem $3^q = 10^p$, co przecież zdarzyć się nie może, bo lewa strona dzieli się przez 3, a prawa nie. Z ergodyczności wynika nasz wniosek dla zbioru wartości x miary 1.

Oznaczmy przez $f_n(x, A)$ częstość wizyt punktu x w zbiorze A przy n obrotach, tzn. liczbę $\frac{k}{n}$, gdzie k oznacza liczbę tych nieujemnych liczb całkowitych $i < n$, dla których i -ty obraz punktu x należy do A . Chcemy wykazać, że ciąg $f_n(x, A)$, przy n dążącym do nieskończoności, przy dowolnym x i A będącym łukiem, jest zbieżny do długości łuku A (oznaczanej przez $dl(A)$). W tym celu wystarczy wykazać, że dla dowolnego ϵ istnieje takie M , że dla dowolnego $n > M$ mamy

$$|f_n(x, A) - dl(A)| < \epsilon.$$

Wybermy łuki: B zawarty w A oraz C zawierający A tak, by ich końce leżały w odległości $\frac{\epsilon}{3}$ od końców A . Wybierzmy dalej punkty y oraz z w odległości

od x mniejszej od $\frac{\epsilon}{3}$ tak, aby ciągi $f_n(y, B)$ i $f_n(z, C)$ były zbieżne odpowiednio

do długości łuków B i C . Zwróćmy uwagę, że gdyby np. taki punkt y nie istniał, to zdarzenie, polegające na tym, że ciąg $f_n(t, B)$ nie jest zbieżny do długości B , miałoby prawdopodobieństwo nie większe od $1 - \frac{2\epsilon}{3}$, wbrew ergodyczności obrotu. Dalej

zauważmy, że jeśli i -ty obraz y wpada w B , to i -ty obraz x wpada w A , jeśli zaś i -ty obraz x wpada w A , to i -ty obraz z wpada w C . Stąd otrzymujemy nierówność

$$f_n(y, B) \leq f_n(x, A) \leq f_n(z, C).$$

Istnieje zatem takie M , że jeśli $n > M$, to

$$f_n(y, B) > dl(B) - \frac{\epsilon}{3} = dl(A) - \frac{3\epsilon}{3} = dl(A) - \epsilon$$

$$f_n(y, C) < dl(C) + \frac{\epsilon}{3} = dl(A) + \frac{3\epsilon}{3} = dl(A) + \epsilon.$$

Wobec tego

$$dl(A) - \epsilon < f_n(y, B) \leq f_n(x, A) \leq f_n(z, C) < dl(A) + \epsilon.$$

Zatem

$$|f_n(x, A) - dl(A)| < \epsilon.$$

c.n.d.

W ten sposób mamy już odpowiedź na pytanie postawione na wstępie. Częstość występowania cyfry 3 w ciągu (c_n) dąży do $\log_{10}(1 + \frac{1}{3})$, częstość występowania 7 i 9 do $\log_{10}(\frac{8}{7}) + \log_{10}(\frac{10}{9}) = \log_{10}(\frac{80}{63})$. Ponieważ $\frac{4}{3}$ jest większe od $\frac{80}{63}$, wbrew wszelkim pozorom proponowana gra na 7 i 9 przyniosłaby nam straty.

dr Grzegorz ŚWIĄTEK

Księżycowe niebo i figury Lissajous

Co wspólnego mogą mieć figury Lissajous z księżycowym niebem? Okazuje się, że nie mniej niż np. piernik z wiatrakiem.

W 1967 roku ukazał się w ZSRR, w serii *kosmiczeskaja fantastika*, znaczek pocztowy o nominale 6 kop. Na znaczku widzimy dwóch kosmonautów wędrujących po powierzchni Księżyca, a spod horyzontu, na tle rozgwieżdzonego nieba, wylania się Ziemia. Podpis pod rysunkiem brzmi: *Na Lunię*. Dalej mamy nadrukowany czarny prostokąt, dość szczęśliwie łączący się z czarnym cieniem w załomie skalnym w dolnym, prawym rogu rysunku (rys.1). Jeżeli znaczek oświetlimy silnie od spodu, z łatwością odczytamy dalszy ciąg tekstu: *Woschodit' Ziemia*. Podobno część znaczków trafiła do obiegu bez nadruku. Mamy więc rarytas filatelistyczny (filateliści bardzo cenią znaczki z różnego rodzaju usterkami, błędami, dodrukami itp).

Rys. 1

Ale czy rzeczywiście poprawka była konieczna? Czy naprawdę z powierzchni Srebrnego Globu nie można podziwiać wschodów i zachodów Ziemi? Na pierwszy rzut oka wydaje się, że rzeczywiście nie można. Jeśli bowiem patrząc z Ziemi widzimy stale tę samą stronę naszego satelity, to będąc na Księżycu powinniśmy widzieć Ziemię stale w tym samym punkcie księżycowego nieba.

Zajrzyjmy teraz do *Astronomii Współczesnej* L. Oстера na stronę 31. Zobaczymy tam piękne zdjęcie zatytułowane *Wschodząca Ziemia obserwowana z pokładu Apollo 8 krążącego po orbicie okołoksiężycowej*. Ziemia znajduje się około 5° nad horyzontem księżycowym. Apollo 8 okrążył Księżyc na niewielkiej w porównaniu z jego promieniem wysokości ($h_p = 111$ km, $h_a = 315$ km). Stąd też niebo oglądane z pokładu statku niewiele się różniło od nieba widzianego z powierzchni globu.

Rozpatrzmy problem nieco dokładniej – na początku z punktu widzenia obserwatora znajdującego się na powierzchni Ziemi. Jakkolwiek rzeczywiście okres obrotu Księżyca wokół własnej osi jest dokładnie równy okresowi obiegu wokół Ziemi, to należy jeszcze zwrócić uwagę, że wokółziemska orbita Księżyca jest elipsą. Stąd ruch Księżyca wokół Ziemi nie jest jednostajny, jest on najszybszy w perygeum, najwolniejszy w apogeum. Popatrzmy na rysunek 2 przedstawiający ten fakt w dużej przesadzie. Zaznaczono na nim cztery pozycje Księżyca na orbicie w odstępach jednotygodniowych. Strzałki wskazują orientację wybranego obiektu na środku tarczy Księżyca. Kolejne strzałki mają kierunki zmienione o 90° . Kąt ten odpowiada $1/4$ okresu obrotu. Ze względu na niejednostajny ruch po orbicie eliptycznej kolejne pozycje Księżyca rozmieszczone są w nierównych odstępach. Kolor biały odpowiada widocznej z Ziemi w danej chwili części powierzchni Księżyca. Dla obserwatora patrzącego z Ziemi Księżyc nieco się „kołysze” i widzimy w ciągu miesiąca ponad 50% jego powierzchni. Jest to dobrze znane zjawisko libracji Księżyca w długości. Dla obserwatora znajdującego się na Księżycu (zmieniamy teraz układ odniesienia) wynikiem tej libracji będzie ruch Ziemi na księżycowym niebie ze wschodu na zachód i z powrotem. Ruch ten odbywa się z amplitudą $15^\circ 48'$ i okresem równym miesiącowi anomalistycznemu ($27^d 13^h 18^m 33^s$), tj. okresowi między kolejnymi przejściami Księżyca przez perygeum.

Zauważmy też, że oś obrotu Księżyca nie jest prostopadła do płaszczyzny jego orbity. Wynika stąd natychmiast zjawisko libracji w szerokości. Ilustruje to w wystarczający sposób rysunek 3. Dla obserwatora na Księżycu w wyniku tej libracji Ziemia odchyła się na przemian na północ i na południe od płaszczyzny równika (oczywiście księżycowego). Okres tego ruchu jest równy miesiącowi smoczemu ($27^d 5^h 5^m 36^s$), tj. okresowi między kolejnymi przejściami Księżyca przez węzeł wstępujący, amplituda natomiast wynosi $13^\circ 40'$. Mamy więc i figurę Lissajous. Ponieważ okresy obu ruchów niewiele się różnią, będzie to krzywa „trudnodomknięta” (rys.4).

Jeśli nasi kosmonauci (ci ze znaczka) znajdowali się w długości selenograficznej bliskiej 90° (lub 270°), mogli z powodzeniem obserwować wschód Ziemi. Szerokość pasa, z którego jest to możliwe, jest dość znaczna i wynosi około 480 km (na równiku) i około 410 km w pobliżu biegunów. Powierzchnia tego pasa stanowi około $1/5$ powierzchni Srebrnego Globu.

Ruch Ziemi na księżycowym niebie można pięknie modelować, jeśli posiadamy oscyloskop katodowy i przestrajalny generator akustyczny. Na płytki odchyłania poziomego podajemy napięcie sieci (50 Hz), na płytki odchyłania pionowego napięcie z generatora nastrojonego na częstotliwość nieco niższą:

$$\frac{\text{miesiąc smoczy}}{\text{miesiąc anomalistyczny}} = \frac{49,38 \text{ Hz}}{50 \text{ Hz}}$$

Stosunek amplitud powinien wynosić

$$\frac{13^\circ 40'}{15^\circ 48'} = \frac{1}{1,2}$$

Modelowanie będzie bliższe rzeczywistości, jeżeli zaopatrzymy się w dwa generatory bardzo niskiej częstotliwości (0,5 – 1 Hz) lub jeszcze mniejszej i rozogniskujemy nieco plamkę na ekranie oscyloskopu.

Juliusz DOMAŃSKI

Obrót Księżyca wokół osi jest, wskutek jego dużej bezwładności, jednostajny, ruch zaś po okołozemskiej orbicie eliptycznej – niejednostajny. Dlatego można oglądać fragmenty odwrotnej strony globu Księżyca. Zjawisko to nazywa się libracją w długości. Można dzięki niemu ujrzeć obszary położone o około 8° długości selenograficznej poza wschodnim i zachodnim brzegiem tarczy Księżyca. Występowanie zjawiska libracji w szerokości wywołane jest nachyleniem płaszczyzny równika księżycowego do płaszczyzny jego wokółziemskiej orbity. Płaszczyzny te tworzą kąt $\approx 6;5$, a więc o tyleż poza bieguny księżycowe może zajrzeć ziemski obserwator.

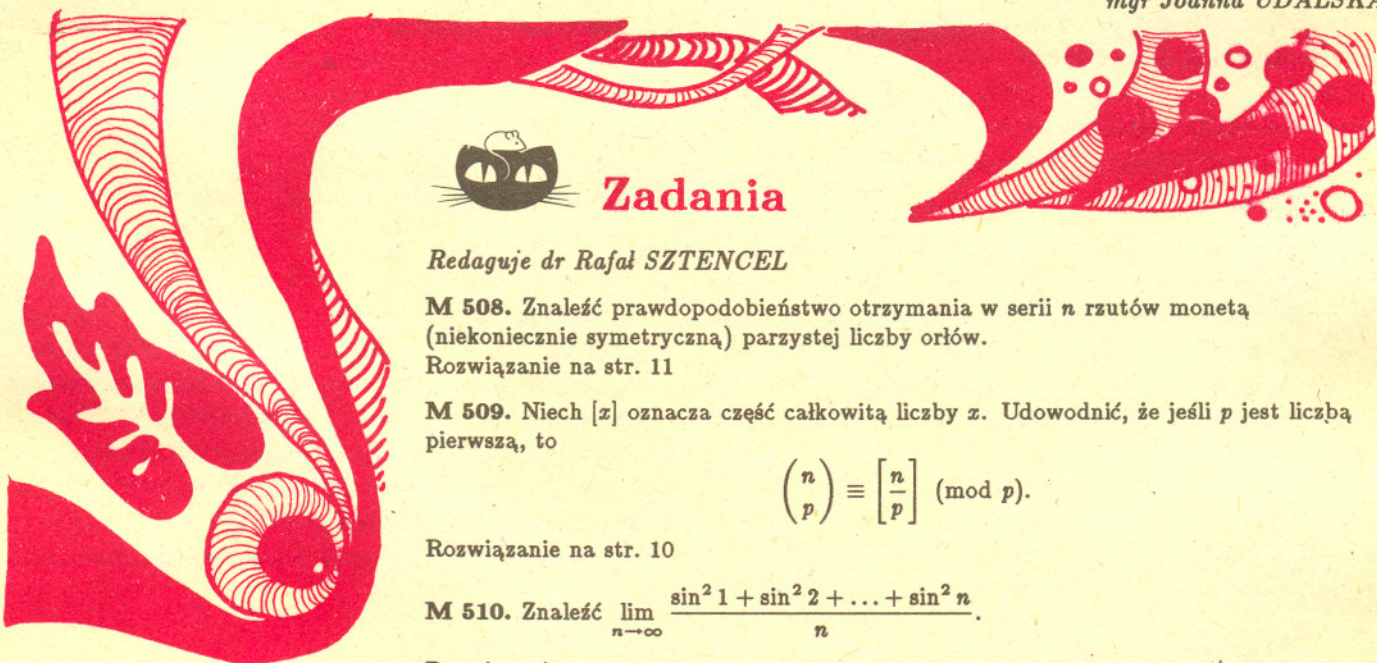
Znacznie mniejszy efekt wywołuje istnienie libracji paralaktycznej. Nie jest ona, jak poprzednie, związana z ruchem samego Księżyca, ale ze zmianą pozycji ziemskiego obserwatora wywołaną przez obrót naszej planety. Wskutek zjawiska paralaksy stają się dostępne obserwacjom dalsze fragmenty wschodniej półkuli Księżyca obserwowanego na niebie zachodnim (oczywiście analogicznie jest dla półkuli zachodniej, północnej i południowej). Libracja paralaktyczna osiąga największą wartość ($\approx 1^\circ$) na równiku ziemskim.

Wszystkie trzy typy libracji wywołują łączne przemieszczanie się środka dysku księżycowego „na tle” obszaru o promieniu kątowym równym w przybliżeniu 10° (tzn. kąt ten ma wierzchołek w centrum Księżyca).

Znacznie rozszerza to możliwości obserwowania powierzchni Księżyca z Ziemi – zamiast 50% powierzchni tarczy, jakie widzielibyśmy w przypadku braku libracji, mamy szansę zobaczyć aż 60% jego powierzchni (rzecz jasna, nie jednocześnie). W dokładnych badaniach złożonego zjawiska libracji wybiera się jakiś dobrze widoczny szczegół w centrum dysku księżycowego i każdego dnia dokonuje się dokładnych pomiarów odległości od czterech punktów krawędzi.

Obserwacje libracji Księżyca mogą stanowić pouczające zadanie dla miłośników astronomii. Oczywiście, znaczne ułatwienie stanowi użycie lornetki, choć nawet gołym okiem można dostrzec okresowe przesuwanie się większych obszarów charakterystycznych na tarczy naszego satelity. Porównywania wyglądu tarczy księżycowej można dokonywać na podstawie fotografii lub nawet rysunków wykonanych przez obserwatora. W czasie lipcowej pierwszej kwadry libracja w długości osiągnie największą wartość (24 lipca) tak, że Morze Przesilerii ukaże się przesunięte najbardziej ku brzegowi tarczy. Po upływie połowy okresu tej libracji (6 sierpnia) oddali się ono na maksymalną odległość od brzegu. Niestety, nie będzie wtedy dla nas widoczne, gdyż akurat znajdzie się na nieoświetlonej części tarczy Księżyca w ostatniej kwadrze. Aby zaobserwować Morze Przesilerii w maksymalnej odległości od krawędzi, trzeba będzie zaczekać aż do 23 grudnia.

mgr Joanna UDALSKA



Zadania

Redaguje dr Rafał SZTENCEL

M 508. Znaleźć prawdopodobieństwo otrzymania w serii n rzutów monetą (niekoniecznie symetryczną) parzystej liczby orłów.

Rozwiązanie na str. 11

M 509. Niech $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x . Udowodnić, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to

$$\binom{n}{p} \equiv \left[\frac{n}{p} \right] \pmod{p}.$$

Rozwiązanie na str. 10

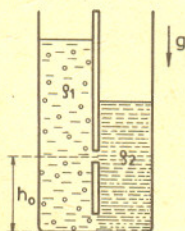
M 510. Znaleźć $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \dots + \sin^2 n}{n}$.

Rozwiązanie na str. 11

Redaguje dr Rafał STAROŃSKI

F 246. W naczyniach połączonych mających kształt litery U ze stykającymi się wewnętrznymi ściankami (rys.) znajdują się w równowadze cieczy o gęstościach ρ_1 i ρ_2 ($\rho_1 < \rho_2$). Granica rozdziału cieczy znajduje się nad środkiem dna zbiornika. Na wysokości h_0 od dna zrobiono niewielki otwór w wewnętrznej ściance, przez który ciecz zaczęła przeciekać. Jak na skutek tego będzie się zmieniał poziom w części, gdzie znajdowała się ciecz o gęstości ρ_2 ? Przyjmujemy, że rurka jest cienka, a ruch cieczy możliwy jest tylko w okolicy otworu.

Rozwiązanie na str.4



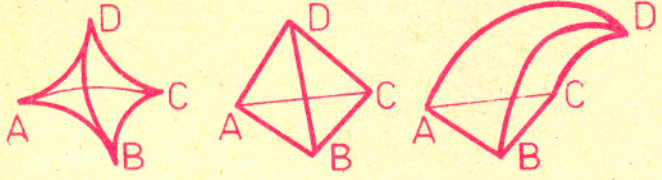
F 247. Szklanka wypełniona jest do wysokości h kawałkami lodu, które zajmują 60% objętości. Początkowo w szczelinach między nimi znajduje się powietrze. Lód zaczyna topnieć, przy czym stosunek objętości lodu do objętości szczelin pozostaje nie zmieniony. Znaleźć wysokość poziomu wody w szklance, w momencie kiedy roztopiło się 70% lodu. Stosunek gęstości lodu do gęstości wody wynosi $k = 0,9$.

Rozwiązanie na str.11

delta mała delta

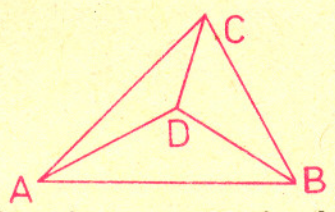
Co da się naprawdę narysować?

Zapewne każdy z Was starał się kiedyś narysować na kartce papieru jakąś bryłę, np. domek, konia, koleżankę lub po prostu – czworościan:

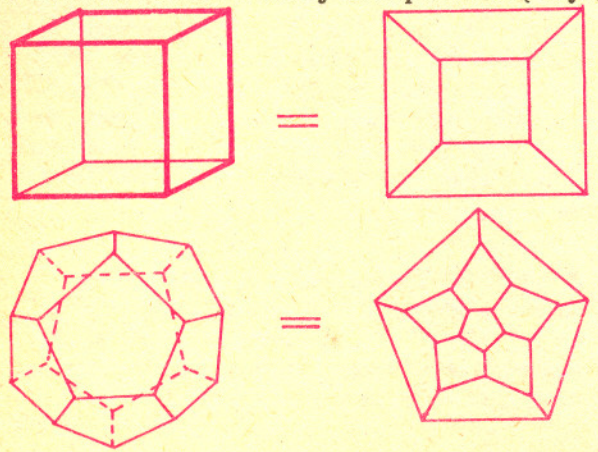


Niezależnie od tego, co chcemy narysować, zwykle ograniczamy się do zaznaczenia na papierze konturów naszej bryły. Obrazek składa się więc ze skończonego układu punktów i łączących je łuków – matematycy zwykli nazywać taki obiekt geometryczny grafem.

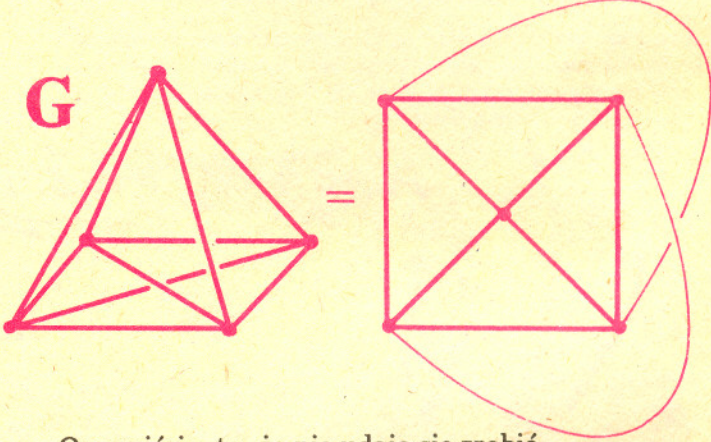
Wszystkim narysowanym wyżej obrazkom można zarzucić, że nie są „prawdziwe”: krawędzie AC i BD przecinają się na papierze, choć w rzeczywistości leżą daleko od siebie. A przecież piramidę można narysować „naprawdę”. Wystarczy ustawić oko nad jej wierzchołkiem i narysować, co widać w dole:



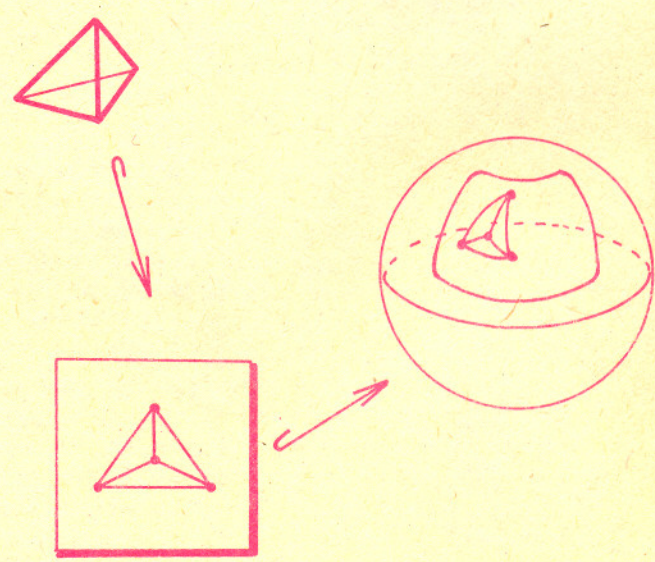
Podobnie możemy narysować pudełko (sześcian), a nawet znacznie bardziej skomplikowaną bryłę:



Jednakże nie każdy graf leżący w przestrzeni można narysować „naprawdę”, to jest tak, by krawędzie nie przecinające się w rzeczywistości nie przecinały się też na obrazku. Nie uda się to np. z narysowanym niżej grafem G (spróbujcie!).

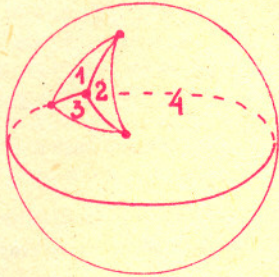


Oczywiście, to, że nie udaje się zrobić „prawdziwego” rysunku, nie jest dostatecznym argumentem za tym, iż wykonanie takiego obrazka jest w ogóle niemożliwe. Potrzebujemy dowodu matematycznego, który wygląda tak. Załóżmy, że graf G da się jakimś cudem „naprawdę” narysować na płaszczyźnie. Wtedy możemy go też „naprawdę” narysować na sferze (powierzchni kuli).

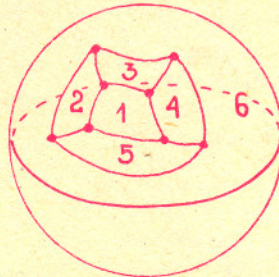


Obraz naszego grafu rozetnie sferę na kilka obszarów (państw). Niech W oznacza liczbę wierzchołków grafu (grube kropki), K – liczbę krawędzi (łuki łączące kropki), a P – liczbę państw. Można udowodnić, że dla każdego grafu narysowanego na sferze zachodzi wzór (pochodzący od Eulera)

(*) $W - K + P = 2.$



$W=4, K=6, P=4,$



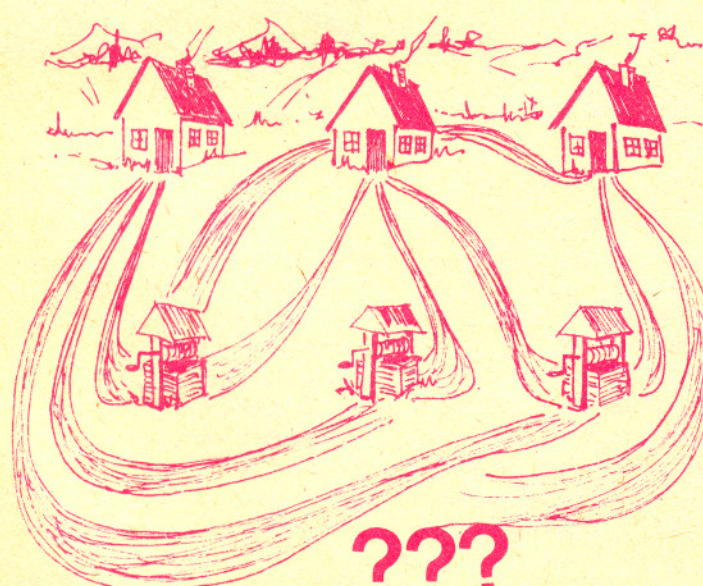
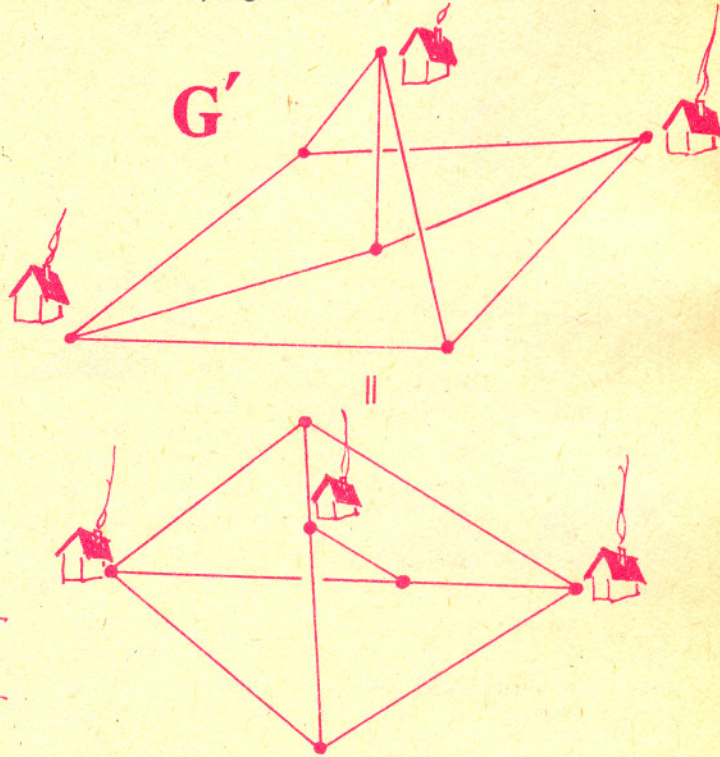
$W=8, K=12, P=6,$

Sprawdź sam na swoich przykładach!

Wróćmy do naszego grafu G , o którym przypuściliśmy, że da się narysować na sferze. Z obrazka G widzimy, że $W = 5$ i $K = 10$. A ile jest państw? To obliczymy łatwo ze wzoru (*): $5 - 10 + P = 2$, stąd $P = 7$. Zauważmy, że dodanie liczby boków wszystkich państw da nam podwojoną liczbę krawędzi (każdą liczyliśmy dwukrotnie). Ponieważ każde państwo jest co najmniej trójkątem, to powyższa suma jest równa co najmniej $7 \cdot 3 = 21$. Tak więc, z założenia, że G da się narysować „naprawdę”, wyprowadziliśmy wniosek, iż $21 \leq 20$. Zatem „prawdziwy” rysunek dla G nie istnieje.

Wielu z Was zetknęło się zapewne z następującą łamigłówką o trzech zwaśnionych gospodarzach i o trzech studniach. Każdy z gospodarzy chciał mieć ścieżkę od swojego domu do każdej ze studni, poprowadzoną tak, by po drodze nie spotykać żadnego z sąsiadów. Czy taki układ ścieżek istnieje?

Naprawdę pytamy tu o to, czy następujący graf G' da się narysować „naprawdę”. Spróbujcie to rozstrzygnąć sami. Postępując z grafem G' tak, jak zrobiliśmy to z grafem G nie uzyskamy odpowiedzi. Potrzebny będzie jeszcze inny, oprócz wzoru Eulera, argument.



???

Grafy G i G' są specjalne. Polski topolog, Kazimierz Kuratowski udowodnił w 1930 roku, że G i G' są jedynymi minimalnymi grafami, które nie dadzą się narysować „naprawdę”. Graf nazwiemy minimalnym, jeśli nie ma zbędnych wierzchołków (postaci $\text{---}\bullet\text{---}$) oraz jeśli usunięcie z niego dowolnej krawędzi pozwala go już narysować „naprawdę”.

Małą Deltę przygotował Zbigniew MARCINIAK

Niezależność twierdzenia Goodsteina

Redakcja zażądała ode mnie, abym opisał twierdzenie, które łatwo sformułować, ale które „nie ma elementarnego dowodu”. Mówiąc „nie ma elementarnego dowodu” mamy przeważnie na myśli, że wszystkie znane dowody są trudne i zrozumienie któregośkolwiek z nich wymaga znajomości jakiejś zaawansowanej teorii. Oczywiście nie wyklucza to, że w przyszłości ktoś mądry odkryje dowód krótki i operujący jedynie pojęciami znanymi ze szkoły podstawowej.

Chciałbym potraktować żądanie redakcji dosłownie i przedstawić twierdzenie Goodsteina, o którym można udowodnić, że nie ma dowodu elementarnego. W tym celu skonstruujemy najpierw, przez indukcję, liczby naturalne G_n^k dla $k, n = 1, 2, \dots$

Niech $G_1^k = k$. Jeśli $G_n^k = 0$, to $G_{n+1}^k = 0$. Załóżmy, że mamy $G_n^k > 0$. Wykonujemy następujące operacje: rozwijamy $G_n^k - 1$, przy podstawie $n + 1$, w taki sposób, aby w rozwinięciu tym występowały wyłącznie liczby nie większe od $n + 1$. Potem zamieniamy wszystkie $n + 1$ na $n + 2$. Tak utworzona liczba jest szukanym G_{n+1}^k .

Brzmi to nieco zawile, ale przykłady wyjaśnią, mam nadzieję, wszystko.

$G_1^{16} = 16$. Teraz obliczamy G_2^{16} . Najpierw rozwijamy $G_1^{16} - 1$, przy podstawie 2. Mamy: $G_1^{16} - 1 = 15 = 2^3 + 2^2 + 2 + 1 = 2^{2+1} + 2^2 + 2 + 1$. A teraz zamieniamy dwójki na trójki: $G_2^{16} = 3^{3+1} + 3^3 + 3 + 1 = 112$. Obliczamy dalej: $G_2^{16} - 1 = 111 = 3^{3+1} + 3^3 + 3$, $G_3^{16} = 4^{4+1} + 4^4 + 4 = 1284$, $G_3^{16} - 1 = 1283 = 4^{4+1} + 4^4 + 3$, $G_4^{16} = 5^{5+1} + 5^5 + 3 = 18753$, itd.

Łatwo obliczyć, że $G_{16}^{16} = 17^{17+1} + 7 \cdot 17^7 + 7 \cdot 17^6 + 7 \cdot 17^5 + 7 \cdot 17^4 + 7 \cdot 17^3 + 7 \cdot 17^2 + 6 \cdot 17 + 15$.

Inny przykład: ponieważ $G_1^{1041} - 1 = 2^{10} + 2^4 = 2^{2^{2+1}+2} + 2^{2^2}$, to $G_2^{1041} = 3^{3^{3+1}+3} + 3^{3^3}$.

Widać, jak sądzę, że ciąg $(G_n^k)_{n=1}^\infty$ rośnie bardzo szybko. Naprawdę jednak ciąg ten zachowuje się jak kozak Makar w anegdocie Franca Fiszera: skacze bardzo wysoko, a potem b a r d z o w o l n o opada.

Goodstein udowodnił, że dla każdego k istnieje takie n , że $G_n^k = 0$.

Jedyny znany mi dowód tego twierdzenia nie jest bardzo trudny i do zrozumienia go wystarczy znajomość arytmetyki liczb porządkowych. Zauważmy jednak, że twierdzenie Goodsteina mówi o liczbach naturalnych, zatem rozsądnym wyjściem jest nazwać elementarnym dowód, w którym używamy jedynie prostych własności dodawania, mnożenia i porządku liczb naturalnych oraz zasady indukcji.

Teoria aksjomatyzująca te pojęcia nazywa się arytmetyką Peano. Otóż udowodniono następujące twierdzenie: jeśli arytmetyka Peano jest niesprzeczna, to nie można w niej udowodnić twierdzenia Goodsteina. I to jest właśnie ściśle sformułowanie braku „elementarnego dowodu”.

Powyższy fakt wydaje mi się znacznie ciekawszy niż samo twierdzenie Goodsteina. Znane dowody tego faktu nie są łatwe i wymagają stosowania teorii modeli lub teorii dowodu, ale to już zupełnie inna historia.

dr Adam KRAWCZYK



Rozwiązanie zadania M 509.
Liczby $n, n - 1, n - 2, \dots, n - p + 1$ dają przy dzieleniu przez p reszty $0, 1, \dots, p - 1$. Jedna z tych liczb, m , dzieli się przez p . Zatem $\lfloor \frac{n}{p} \rfloor = \frac{m}{p}$. Mamy teraz

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{m} \equiv (p-1)! \pmod{p},$$

skąd po pomnożeniu obu stron przez $\frac{m}{p}$ dostajemy

$$\frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p} \equiv \frac{(p-1)!m}{p} \pmod{p},$$

i po podzieleniu przez liczbę $(p-1)!$, względnie pierwszą z p , otrzymujemy

$$\frac{n!}{p(n-p)!} \equiv \frac{m}{p} \pmod{p},$$

co kończy dowód.

Mamy daną tablicę świetlną zbudowaną z lampek, z których każda może znajdować się w jednym z dwóch stanów: być zapalona lub zgaszona. Mamy też układ przełączników, z których każdy działa na pewną ustaloną część lampek w ten sposób, że po jego przełączeniu lampki palące się (w obszarze działania przełącznika) gasną, a zgaszone zapalają się. Wykazać, że liczba układów, które możemy na tej tablicy wyświetlić, jest potęgą dwójki.

Niech \mathcal{G} będzie zbiorem wszystkich podzbiorów (łącznie ze zbiorem pustym) zbioru lampek. Moc \mathcal{G} jest równa 2^s , gdzie s jest liczbą lampek. Działanie przyporządkowujące każdemu dwóm zbiorom $A, B \in \mathcal{G}$ ich różnicę symetryczną $A \div B = A \cup B \setminus A \cap B$ spełnia warunki:

$$A \div B = B \div A, \quad (A \div B) \div C = A \div (B \div C), \quad A \div \emptyset = A, \quad A \div A = \emptyset.$$

Zbiór \mathcal{G} z działaniem \div jest więc grupą przemianową.

Zauważmy teraz, że jeśli D_w oznacza zbiór, na który działa wyłącznik w , to startując z wygaszonej tablicy i przełączając wyłączniki w_1, \dots, w_n zapalimy lampki dokładnie ze zbioru $D_{w_1} \div D_{w_2} \div \dots \div D_{w_n}$. Oznacza to, że startując z wygaszonej tablicy możemy wyświetlić dokładnie tyle układów, ile jest elementów w najmniejszej podgrupie \mathcal{P} grupy \mathcal{G} , której elementami są wszystkie zbiory D_w . Jeżeli startujemy w sytuacji, gdy na tablicy zapalone są lampki ze zbioru A , to liczba układów, które możemy wyświetlić, jest równa mocy warstwy grupy \mathcal{G} względem podgrupy \mathcal{P} wyznaczonej przez A (czyli mocy zbioru $\{A \div B : B \in \mathcal{P}\}$, która jest, oczywiście, równa mocy podgrupy \mathcal{P}). Z twierdzenia Lagrange'a (rząd podgrupy dzieli rząd grupy) wynika więc, że ta liczba jest dzielnikiem rzędu grupy \mathcal{G} , a więc jest to potęga dwójki.

doc. dr Edmund PUCZYŁOWSKI



Rozwiązanie zadania M 508.

Niech p będzie prawdopodobieństwem otrzymania orla w pojedynczym rzucie, $q = 1 - p$; niech u_n oznacza szukane prawdopodobieństwo. Mamy $u_n = qu_{n-1} + p(1 - u_{n-1})$. Istotnie, jeśli w pierwszym rzucie wypadł orzeł, w pozostałych ma wypaść nieparzysta liczba orłów. Jeśli reszka — parzysta. Zauważmy, że $u_n - \frac{1}{2} = (q-p)(u_{n-1} - \frac{1}{2})$. Ponieważ $u_0 = 1$, mamy $u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(q-p)^n$, czyli $u_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(q-p)^n$.



Rozwiązanie zadania M 510.

Ponieważ $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin^2 1 + \sin^2 2 + \dots + \sin^2 n}{n} = \frac{1}{2} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos 2 + \cos 4 + \dots + \cos 2n}{2n}$$

Ostatnia granica jest równa zeru, gdyż ciąg

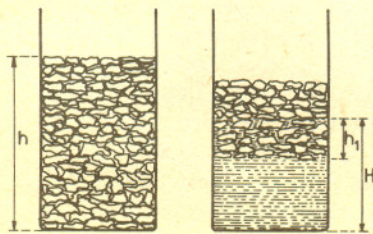
$$\begin{aligned} \cos 2 + \cos 4 + \dots + \cos 2n &= \operatorname{Re}(e^{2i} + e^{4i} + \dots + e^{2ni}) = \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{2i} \frac{1 - e^{2ni}}{1 - e^{2i}}\right) \end{aligned}$$

jest ograniczony. Szukana granica jest więc równa $\frac{1}{2}$.



Rozwiązanie zadania F 247.

Oznaczmy przez α stosunek objętości lodu do objętości zajmowanej przez lód porowaty, przez β — część lodu, która uległa stopieniu.



Objętość wody, która powstała przy topnieniu lodu, jest równa

$$V_w = \alpha \cdot \beta \cdot h \cdot k \cdot S,$$

gdzie S jest polem powierzchni przekroju szklanki. Pozostała masa lodu wynosi (ρ — gęstość lodu)

$$m_L = (1 - \beta)\alpha \cdot h \cdot \rho \cdot S.$$

Korzystając z prawa Archimidesa otrzymujemy objętość zanurzonej części lodu

$$V_1 = (1 - \beta)\alpha \cdot h \cdot k \cdot S,$$

a stąd wysokość poziomu wody

$$H = \frac{V_w + V_1}{S} = \alpha \cdot h \cdot k = 0,54 h.$$

Od momentu, gdy lód zaczyna pływać w wodzie, dalsze topnienie nie ma wpływu na poziom wody w szklance.

Kwadrat nie może być podzielony na nieparzystą liczbę trójkątów o równych polach.

Nim przystąpimy do dowodu tego twierdzenia, przedstawimy dwa ogólne rezultaty, na których będziemy się opierać. Dowód pierwszego z nich wymaga zaawansowanych rozważań algebraicznych, których przedstawienie przekracza możliwości tego artykułu.

1. W zbiorze liczb rzeczywistych można wprowadzić tzw. normę 2-adyczną, tzn. określić funkcję, przyporządkowującą dowolnej liczbie rzeczywistej x liczbę rzeczywistą nieujemną $\|x\|$, spełniającą warunki:

a) $\|x\| = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $x = 0$,

b) $\|\frac{1}{2}\| = 2$.

Dla dowolnych liczb x, y

c) $\|x \cdot y\| = \|x\| \cdot \|y\|$,

d) $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|)$.

Z c) wynika, że $\|1\| = \|1\| \cdot \|1\|$, a więc $\|1\| = 1$. Podobnie, $\|-1\| \cdot \|-1\| = 1$, czyli $\|-1\| = 1$. W konsekwencji, dla dowolnego x mamy $\|-x\| = \|x\|$.

Norma 2-adyczna ma również własność:

e) jeśli $\|x\| > \|y\|$, to $\|x + y\| = \|x\|$.

Istotnie, na podstawie d) mamy $\|x + y\| \leq \max(\|x\|, \|y\|) = \|x\|$. Z drugiej strony, $\|x\| = \|x + y + (-y)\| \leq \max(\|x + y\|, \|y\|)$. Stąd i z faktu, że $\|y\| < \|x\|$ wynika, że $\|x\| \leq \|x + y\|$. W konsekwencji $\|x\| = \|x + y\|$.

Nietrudno teraz zauważyć, że jeśli niezerową liczbę wymierną w przedstawimy w postaci $w = 2^k \cdot \frac{p}{q}$, gdzie k jest liczbą całkowitą, zaś p, q — liczbami całkowitymi nieparzystymi, to $\|w\| = 2^{-k}$.

2. Załóżmy, że pewien czworokąt na płaszczyźnie podzielono na trójkąty i każdy z wierzchołków trójkątów podziału pomalowano na jeden z trzech kolorów: zielony, niebieski, czerwony w ten sposób, że na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów oraz że dwa sąsiednie wierzchołki czworokąta są pomalowane jednym kolorem, a dwa pozostałe — pozostałymi. Wówczas pewien trójkąt podziału ma wierzchołki różnokolorowe.

Załóżmy, że jednokolorowe wierzchołki czworokąta są niebieskie. Boki trójkątów podziału są podzielone przez wierzchołki różnych trójkątów na odcinki. Zauważmy że na obwodzie trójkąta, którego wierzchołki nie są różnokolorowe, leży parzysta liczba odcinków, których jeden koniec jest niebieski, a drugi czerwony. Jeśli więc żaden trójkąt podziału nie ma różnokolorowych wierzchołków, to sumując liczby takich odcinków na obwodach tych trójkątów, otrzymamy liczbę parzystą. Zauważmy, że przy tym sumowaniu każdy odcinek, który nie leży na obwodzie czworokąta, był liczony dwukrotnie, a każdy odcinek z obwodu — jednokrotnie. Wynika stąd, że liczba tego typu odcinków, leżących na obwodzie czworokąta, jest parzysta. Jest to jednak niemożliwe, bo na boku czworokąta o końcach niebieskich leży parzysta ich liczba, a na pozostałych nieparzysta.

Przejdziemy teraz do dowodu sformułowanego na początku twierdzenia. Ponieważ norma 2-adyczna jest funkcją przyjmującą wartości rzeczywiste nieujemne, więc możemy podzielić płaszczyznę na trzy rozłączne zbiory:

$$\begin{aligned} Z &= \{(x, y) : \|x\| < 1, \|y\| < 1\}, & N &= \{(x, y) : \|x\| \geq 1, \|x\| \geq \|y\|\}, \\ C &= \{(x, y) : \|x\| < \|y\|, \|y\| \geq 1\}. \end{aligned}$$

Pomalujmy punkty pierwszego z tych zbiorów na zielono, drugiego na niebiesko i trzeciego na czerwono. Zauważmy, że

I. Jeśli (x_1, y_1) jest punktem zielonym, a (x_2, y_2) — niebieskim (czerwonym), to $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ jest punktem niebieskim (czerwonym).

Istotnie, gdy (x_2, y_2) jest punktem niebieskim, to z własności normy 2-adycznej otrzymamy, że $\|x_2 - x_1\| = \|x_2\| \geq 1$. Ponieważ $\|x_2\| \geq \|y_2\|$ oraz $\|y_1\| < 1$, więc $\|x_2 - x_1\| \geq \max(\|y_2\|, \|y_1\|) \geq \|y_2 - y_1\|$. Punkt $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ jest więc też niebieski. Dowód dla punktu czerwonego jest podobny.

II. Na żadnej prostej nie leżą punkty wszystkich trzech kolorów.

Założmy, że jest inaczej. Przesuwając prostą, na której leżą punkty wszystkich trzech kolorów, równolegle w ten sposób, by punkt zielony przeszedł na $(0,0)$ i korzystając z I. możemy założyć, że punkt czerwony (x_1, y_1) i niebieski (x_2, y_2) leżą na prostej przechodzącej przez $(0,0)$. Istnieje więc liczba λ taka, że $x_1 = \lambda x_2$, $y_1 = \lambda y_2$. Zatem $\|x_1\| = \|\lambda\| \|x_2\|$, $\|y_1\| = \|\lambda\| \|y_2\|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\lambda \neq 0$, więc $\|x_2\| < \|y_2\|$, co jest niemożliwe.

Założmy, że kwadrat o wierzchołkach $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$ podzielono na n trójkątów o równych polach. Wierzchołek $(0,0)$ jest zielony, $(0,1)$ – czerwony, a dwa pozostałe – niebieskie. W myśl 2, któryś z trójkątów podziału ma różnokolorowe wierzchołki. Przesuńmy ten trójkąt równolegle tak, by wierzchołek zielony przeszedł na $(0,0)$. Z I. wynika, że pozostałe wierzchołki nie zmieniają kolorów. Załóżmy, że po przesunięciu wierzchołkiem czerwonym jest (x_1, y_1) , a niebieskim – (x_2, y_2) . Pole trójkąta o wierzchołkach $(0,0)$, (x_1, y_1) , (x_2, y_2) jest równe $\frac{1}{n} = \frac{1}{2} |x_1 y_2 - x_2 y_1|$. Ponieważ $\|x_1\| < \|y_1\|$ i $\|x_2\| \geq \|y_2\|$, więc $\|x_1 y_2\| < \|x_2 y_1\|$. Zatem $\|\frac{1}{n}\| = \frac{1}{2} \|x_1 y_2 - x_2 y_1\| \geq \frac{1}{2} (\|x_2 y_1\| - \|x_1 y_2\|) \geq \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$. Wynika stąd, że n jest liczbą parzystą, gdyż jak zauważyliśmy, dla nieparzystego n mamy $\|\frac{1}{n}\| = \frac{1}{n}$.

doc.dr Edmund PUCZYŁOWSKI

Martyngały

Jak dobrze wiadomo Czytelnikom *Delty*, przy wielokrotnym rzucie symetryczną monetą do uzyskania orła potrzebne są średnio dwa rzuty (zadanie M 469 *Delta* 5/1987). Jasne jest, że taka sama jest średnia liczba rzutów potrzebna do otrzymania reszki. A co się dzieje przy oczekiwaniach na serię długości dwa? Wówczas sytuacja zmienia się radykalnie. Jak nietrudno sprawdzić, średnia liczba rzutów potrzebna do uzyskania dwóch orłów pod rząd jest 6, natomiast dla uzyskania serii (O,R) potrzeba średnio tylko 4 rzuty. Różnice te są jeszcze bardziej widoczne przy oczekiwaniach na dłuższe serie; i tak na przykład do uzyskania serii (O,O,R,R,O,O) potrzeba średnio 70 rzutów, dla serii (O,O,O,O,O,O) aż 126, podczas gdy dla serii (O,O,O,O,O,R) wystarczają średnio 64 rzuty, czyli prawie dwukrotnie mniej! Obliczenie czasów oczekiwania w tym przypadku wymaga dość żmudnych rachunków. Okazuje się jednak, że przy użyciu podstawowych faktów z teorii martyngałów można łatwo wyliczać średnie czasy oczekiwania na serię dowolnej (skończonej) długości przy wielokrotnym powtarzaniu doświadczenia nawet bardziej skomplikowanego niż rzut monetą.

Sprecyzujmy dokładnie problem. Załóżmy, że powtarzamy wielokrotnie doświadczenie losowe Z , w pojedynczej próbie możemy otrzymać co najwyżej przeliczalną liczbę wyników (każdy z dodatnim prawdopodobieństwem). Oznaczmy zbiór tych wyników przez W . Niech $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ będzie dowolnym ciągiem, którego wyrazami są elementy zbioru W i oznaczmy przez T_A pierwszy moment pojawienia się serii A w ciągu powtórzeń doświadczenia Z . Pytamy się, ile razy trzeba średnio powtórzyć doświadczenie Z , by uzyskać serię A .

Probabilistyczny model jest następujący: dana jest dyskretna zmienna losowa Z o zbiorze wartości W oraz ciąg (Z_1, Z_2, \dots) niezależnych zmiennych losowych określonych na przestrzeni probabilistycznej (Ω, P) o rozkładach prawdopodobieństwa takich samych jak rozkład Z . Wtedy T_A jest zmienną losową przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, określoną następująco

$$T_A(\omega) = \min \{k : Z_k(\omega) = a_m, Z_{k-1}(\omega) = a_{m-1}, \dots, Z_{k-m+1}(\omega) = a_1\}.$$



Intuicyjny sens pojęcia martyngału jest następujący: wyobraźmy sobie hazardzistę grającego w pewną grę i niech X_n oznacza jego łączną wygraną w chwili n . Liczbę

$$\frac{1}{P(A)} \int X_{n+1} dP$$

interpretuje się w rachunku prawdopodobieństwa jako średnią wartość przyjmowaną przez X_{n+1} , jeśli wiadomo, że zaszło zdarzenie A . Równość w definicji martyngału mówi więc, że niezależnie od przebiegu gry do chwili n średnia wygrana w chwili $n+1$ będzie taka sama jak średnia wygrana w chwili n . Można więc powiedzieć, że martyngał to matematyczny model „gry sprawiedliwej”. Jednym z najprostszych przykładów martyngału jest ciąg (X_n) zdefiniowany przez: $X_0 \equiv 0$, $X_k = r_1 + \dots + r_k$, gdzie (r_k) jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o wspólnym rozkładzie $P(r_k = 1) = P(r_k = -1) = 1/2$. Jest to model gry w „orla i reszkę” – rzucamy wielokrotnie monetą, jeśli wypadnie orzeł, to wygrywamy 1, a jeśli reszka, to przegrywamy 1.

Jak łatwo sprawdzić, moment pierwszego pojawienia się $+1$ w ciągu (r_k) (tzn. zmienna $T(\omega) = \inf\{n : r_n(\omega) = +1\}$) jest momentem zatrzymania, natomiast moment ostatniego pojawienia się $+1$ nie jest (jeśli np. w chwili 3 pojawiło się $+1$, to obserwując zmienne r_1, r_2, r_3 możemy stwierdzić, czy jest to pierwszy taki moment, a do stwierdzenia, czy jest on ostatni, potrzebna jest znajomość r_4, r_5, \dots).



Na podstawie artykułu Shuo-Yen Robert Li, *A martingale approach to the study of occurrence of sequence patterns in repeated experiments*, *Annals of Probability* 8(1980), 1171-1176.

Natomiast średni czas oczekiwania na serię A to po prostu wartość oczekiwana zmiennej losowej T_A . Aby podać wzór na tę wartość, wprowadzimy jeszcze jedno oznaczenie. Dla dwóch (być może różnej długości) ciągów $A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ i $B = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ o wyrazach z W określamy

$$d_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{P(Z=a_j)}, & \text{jeśli } a_j = b_i, \\ 0, & \text{w przeciwnym przypadku,} \end{cases}$$

gdzie $i = 1, 2, \dots, n$, $j = 1, 2, \dots, m$ oraz

$$B * A = d_{1,1} \cdot d_{2,2} \cdot \dots \cdot d_{n,n} + d_{2,1} \cdot d_{3,2} \cdot \dots \cdot d_{n,n-1} + \dots + d_{n-1,1} \cdot d_{n,2} + d_{n,1}.$$

Prawdziwe jest następujące twierdzenie

$$(*) \quad ET_A = A * A.$$

Fakt ten można łatwo udowodnić korzystając z teorii martyngałów.

Cóż to takiego jest martyngał? Dla naszych rozważań wystarczy ograniczyć się do przypadku dyskretnych zmiennych losowych. Ciąg (X_0, X_1, \dots) takich zmiennych jest martyngałem, jeśli dla dowolnego $n \geq 1$ średnia wartość zmiennej losowej X_{n+1} na zbiorze, gdzie zmienne X_0, X_1, \dots, X_n przyjmują ustalone wartości, jest taka sama jak wartość zmiennej X_n na tym zbiorze, tzn. dla dowolnego ciągu (z_0, z_1, \dots, z_n) spełniona jest równość

$$\int_C X_{n+1} = \int_C X_n = z_n \cdot P(X_0(\omega) = z_0, \dots, X_n(\omega) = z_n),$$

gdzie $C = \{\omega : X_0(\omega) = z_0, \dots, X_n(\omega) = z_n\}$.

Wynika stąd w szczególności, że

$$EX_{n+1} = EX_n = \dots = EX_0.$$

Przez moment zatrzymania względem martyngału (X_n) będziemy rozumieć taką zmienną losową T przyjmującą wartości w zbiorze liczb naturalnych, że dla dowolnego $n \geq 1$ zbiór $\{\omega : T(\omega) = n\}$ należy do rozbicia Ω wyznaczonego przez zmienne (X_0, X_1, \dots, X_n) (rozbiciem Ω wyznaczonym przez zmienne (X_0, X_1, \dots, X_n) nazywamy rodzinę zbiorów postaci $\{\omega : X_0(\omega) = z_0, \dots, X_n(\omega) = z_n\}$, gdzie z_i przebiega wszystkie możliwe wartości zmiennej losowej X_i dla $i = 0, 1, \dots, n$). Innymi słowy moment zatrzymania to taka zmienna losowa, o której możemy stwierdzić czy przyjęła wartość n obserwując zmienne losowe X_0, X_1, \dots, X_n .

Następujące twierdzenie ma podstawowe znaczenie w teorii martyngałów:

Twierdzenie (Doob). Jeśli (X_n) jest martyngałem, a T takim momentem zatrzymania, że $\int |X_{T(\omega)}(\omega)| dP(\omega) < \infty$, oraz $\sup_{n \geq 1} \int_{\{\omega : T(\omega) > n\}} |X_k| dP = 0$, to ciąg (X_0, X_T) jest martyngałem. W szczególności $EX_0 = EX_T$.

Wróćmy do wzoru (*). Aby go udowodnić, zdefiniujmy ciąg (X_n)

$$X_0 \equiv 0, \quad X_k(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_k(\omega)) * A - k.$$

Pominiemy tu sprawdzenie, że ciąg (X_n) jest martyngałem, a T_A momentem zatrzymania spełniającym założenia twierdzenia Dooba. Zauważmy, że

$$X_{T_A(\omega)}(\omega) = (Z_1(\omega), \dots, Z_{T_A(\omega)}(\omega)) * A - T_A(\omega).$$

Ale ostatnie m wyrazów ciągu $(Z_1(\omega), \dots, Z_{T_A(\omega)}(\omega))$ jest takie jak wyrazy serii A i $T_A(\omega)$ jest pierwszym takim momentem zatrzymania. W związku z tym

$$(Z_1(\omega), \dots, Z_{T_A(\omega)}(\omega)) * A = A * A.$$

Stosując teraz twierdzenie Dooba otrzymujemy

$$0 = EX_0 = EX_{T_A} = A * A - ET_A,$$

co dowodzi wzoru (*).

Wróćmy wreszcie do rzutu monetą. Tutaj Z jest zmienną losową przyjmującą wartość O lub R , każdą z prawdopodobieństwem $1/2$, Z_i oznacza i -ty rzut monetą, a $d_{i,j}$ jest równe 0 bądź 2 . Dla dowolnej serii A o długości m pierwszy składnik sumy $A * A$ jest różny od zera i jest równy 2^m . Jeśli wszystkie wyrazy serii A są równe, to również następne składniki $A * A$ są różne od zera (i są odpowiednio równe $2^{m-1}, 2^{m-2}, \dots, 2$). Średni czas oczekiwania na taką serię jest więc równy $2^m + 2^{m-1} + \dots + 2 = 2^{m+1} - 2$. Natomiast, jeśli ostatni wyraz serii A jest różny od wszystkich poprzednich, to wszystkie składniki $A * A$ poza pierwszym są zerami i średni czas oczekiwania jest równy 2^m .

Opracował dr Paweł HITCZENKO

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przesyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N - liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) - i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo - to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 1/1988.

Redaguje dr Marcin E. KUCZMA

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 2/1988

Przypominamy treść zadań:

165. Funkcja różniczkowalna $f: (0; \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ spełnia warunek: $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$. Czy stąd wynika, że $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$?

166. Niech K będzie sześcianem jednostkowym o wierzchołkach w punktach kratowych przestrzeni \mathbb{R}^3 i niech będzie dany punkt kratowy P . Udowodnić, że spośród ośmiu odległości punktu P od wierzchołków K co najmniej cztery są liczbami niewymiernymi.

165. Odpowiedź jest twierdząca. Aby to wykazać, przypuśćmy, że jest inaczej. Mamy wtedy dwie możliwości: 1^o granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ przy $x \rightarrow \infty$ istnieje (skończona lub nieskończona), ale jest różna od zera; 2^o granica ta nie istnieje. W przypadku 1^o istnieje także granica $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \neq 0$ i w zależności od jej znaku mamy $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \pm \infty$ i odpowiednio $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = \pm \infty$, wbrew założeniu. W przypadku 2^o możemy znaleźć liczby u i v oraz ciągi $(x_n), (y_n)$ takie, że $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < x_3 < y_3 < \dots$, $\lim x_n = \infty = \lim y_n$, $f(x_n) \leq u < v \leq f(y_n)$. Niech s_n będzie punktem, w którym f osiąga maksimum na przedziale $(x_n; x_{n+1})$, a t_n - punktem, w którym f osiąga minimum na przedziale $(y_n; y_{n+1})$. Wówczas $f'(s_n) = f'(t_n) = 0$, $f(s_n) \geq v$, $f(t_n) \leq u$, co i tym razem prowadzi do sprzeczności z założeniem, że $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) + f'(x)) = 0$.

[Inna metoda dowodu (mniej elementarna): zastosować regułę de l'Hospitala do pary funkcji $\varphi(x) = e^x f(x)$, $\psi(x) = e^x$.]

166. Przypuśćmy, że P leży w odległości wymiernej od pięciu wierzchołków K . Pięć wierzchołków sześcianu można wybrać na trzy sposoby (z dokładnością do izometrii), jak to pokazuje rysunek 1. We wszystkich przypadkach powtarza się konfiguracja czterech wierzchołków przedstawiona na rysunku 2. Można przyjąć, że wierzchołkami sześcianu K są punkty o współrzędnych zero-jedynkowych, a cztery wierzchołki z rysunku 2 - to punkty $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$. Niech a, b, c, d będą odległościami punktu $P = (x, y, z)$ od tych czterech wierzchołków. Otrzymujemy układ równości

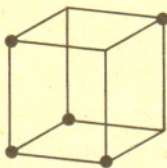
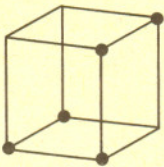
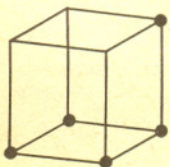
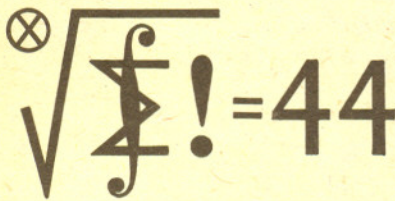
$$\begin{aligned} (1) \quad & x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ (2) \quad & (x-1)^2 + y^2 + z^2 = b^2 \\ (3) \quad & x^2 + (y-1)^2 + z^2 = c^2 \\ (4) \quad & (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = d^2 \end{aligned}$$

gdzie a, b, c, d są liczbami wymiernymi - a więc i całkowitymi (skoro ich kwadraty są całkowite).

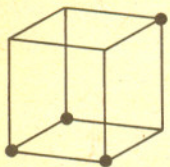
Odejmując stronami (2) od (3) dostajemy $2(x-y) = (c-b)(c+b)$; zatem liczby $c \pm b$, a w konsekwencji także $x-y$, są parzyste. Parzysta jest więc i liczba $x^2 + y^2$, równa na mocy (1) iloczynowi $(a-z)(a+z)$, a to znaczy, że liczby $a \pm z$ są parzyste, tak, że $x^2 + y^2$ dzieli się przez 4. Stąd iloczyn $xy = \frac{1}{2}((x+y)^2 - (x^2 + y^2))$ jest liczbą parzystą, więc x i y są parzyste.

Z (4) wynika, że $(d - (z-1))(d + (z-1)) = x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2$.

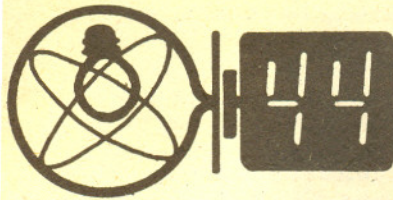
Lewa strona tej równości jest albo liczbą nieparzystą, albo liczbą podzielną przez 4. Natomiast prawa strona, wobec parzystości x i y , dzieli się przez 2, ale nie przez 4. Otrzymana sprzeczność kończy dowód.



Rys. 1



Rys. 2

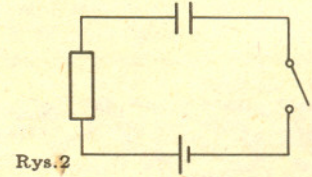
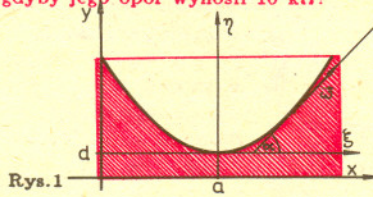


Przypominamy treść zadań:

63. Na poziomym stole spoczywa kielich o masie M . Jego wewnętrzna powierzchnia jest paraboloidą obrotową, której przekrój płaszczyzną przechodzącą przez oś paraboloidy jest (w układzie związanym z kielichem – rys.1) określony równaniem $\eta = k\xi^2$ ($-a \leq \xi \leq a$). Na brzegu paraboloidalnej powierzchni umieszczono mały klocek o masie m i puszczono go. Określić charakter ruchu, jaki będzie wykonywany przez ten klocek przy zaniedbywalnym tarciu klocka o kielich oraz kielicha o stół i znaleźć równanie toru klocka (traktowanego punktowo) w układzie związanym ze stołem.

64. Zestawiono obwód jak na rysunku 2, złożony ze źródła napięcia o sile elektromotorycznej $\epsilon = 18 \text{ V}$ i oporze wewnętrznym $r = 3 \Omega$, kondensatora o pojemności $C = 40 \text{ mF}$ oraz opornika (o nominalnej mocy $0,5 \text{ W}$) o oporze $R = 10 \Omega$, wiszącego na przewodach między baterią a kondensatorem.

O ile wzrośnie temperatura opornika po zamknięciu obwodu, jeśli jego masa wynosi $m = 0,7 \text{ g}$, a ciepło właściwe, przy traktowaniu opornika jako ciała termicznie jednorodnego, $c = 0,7 \text{ J/gK}$? Czy wzrost temperatury opornika byłby taki sam, mniejszy czy też większy, gdyby jego opór wynosił $10 \text{ k}\Omega$?



63. Klocek będzie się ześlizgiwał po wewnętrznej powierzchni kielicha, nabywając energię kinetyczną, a następnie – kosztem tej energii – wślizgiwał się po przeciwległej stronie tej powierzchni w górę aż do zatrzymania, po którym nastąpi ponowne ześlizgiwanie się w dół. Ruch ten będzie miał charakter oscylacji nietłumionych ze względu na brak tarcia. Odpowiednie drgania będzie też wykonywał kielich przesuwając się po stole.

Wprowadzimy układ współrzędnych x, y związany ze stołem, jak na rysunku 1 (oś x leży w płaszczyźnie stołu, pionowa oś y przechodzi przez początkowe położenie klocka). Współrzędne klocka w obu układach są powiązane zależnościami $x = X + \xi$, $y = d + \eta$, gdzie X jest odciętą wierzchołka paraboloidy. Początkowe położenia klocka oraz kielicha określone są następująco:

$$(1) \quad x_0 = 0, \quad y_0 = ka^2 + d, \quad X_0 = a.$$

Oznaczając prędkość klocka w układzie kielicha przez $w = [w_x, w_y]$ i w układzie stołu przez $v = [v_x, v_y]$, a prędkość kielicha w układzie stołu przez $V = [V, 0]$, mamy

$$(2) \quad v_x = V + w_x, \quad v_y = w_y.$$

Współrzędne prędkości w możemy wyrazić przez funkcje kąta α nachylenia stycznej do paraboloidy:

$$(3) \quad w_x = w \cos \alpha, \quad w_y = w \sin \alpha,$$

przy czym

$$(4) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = 2k\xi = 2k(x - X).$$

Z prawa zachowania pędu

$$(5) \quad mv_x + MV = 0$$

wynika $V = -\mu v_x$, gdzie $\mu = m/M$. Stąd otrzymujemy

$$(6) \quad X = a - \mu x.$$

Na podstawie równań (2), (3), (5) mamy

$$(7) \quad v_x = \frac{w \cos \alpha}{1 + \mu},$$

a z zależności (4) i (6)

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha = -2k(a - (1 + \mu)x).$$

Równanie toru klocka wyznaczamy z prostego równania różniczkowego:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x},$$

które po uwzględnieniu związków (3), (7) i (8) przyjmuje postać $\frac{dy}{dx} = -2k(a - (1 + \mu)x)(1 + \mu)$. W wyniku całkowania tego równania z uwzględnieniem warunków początkowych (1) otrzymujemy dla $0 \leq x \leq 2a/(1 + \mu)$ równanie toru

$$y = k((1 + \mu)x - a)^2 + d.$$

Jak widać, tor klocka jest parabolą ściśniętą w stosunku do paraboli kielicha o czynnik $(1 + \mu)$.

64. Po zamknięciu obwodu nastąpi ładowanie kondensatora do napięcia ϵ . Jeśli początkowo kondensator był nie naładowany, to w obwodzie przepłynie ładunek $Q = C\epsilon$. Przyrost energii kondensatora wyniesie $\Delta E_c = Q\epsilon/2 = C\epsilon^2/2$. Energia źródła, z którego pobrano ładunek Q , zmaleje o $\Delta E_z = Q\epsilon = C\epsilon^2$. Różnica energii $\Delta E_z - \Delta E_c$ ulegnie wydzielению w postaci ciepła Joule'a na oporze R opornika oraz na oporze wewnętrznym r źródła w proporcji odpowiadającej stosunkowi tych oporów. Wobec tego na oporniku wydzielili się energia

$$E_R = \frac{1}{2} \frac{R}{R + r} C\epsilon^2 = 5 \text{ J}.$$

Cały ten proces zajdzie praktycznie w czasie kilku stałych czasowych tego obwodu $\tau = (R + r)C$, a więc w czasie rzędu sekundy. Wymiana ciepła między opornikiem a otoczeniem w tak krótkim czasie będzie na tyle mała, że można ją zaniedbać. Wobec tego cała energia E_R spowoduje przyrost temperatury opornika o ΔT , określony równaniem $E_R = cm\Delta T$. Stąd otrzymujemy

$$\Delta T = \frac{RC\epsilon^2}{2cm(R + r)} = 10 \text{ K}.$$

Dla $R = 10 \text{ k}\Omega$ stała czasowa wynosiłaby $\tau = 500 \text{ s}$. Wymiana ciepła z otoczeniem w takiej sytuacji odgrywałaby już istotną rolę, zatem przyrost temperatury opornika byłby mniejszy (maksymalna moc wydzielana w tym przypadku w oporniku po zamknięciu obwodu wynosi zaledwie około $0,03 \text{ W}$).

DROBIAZGI

W XIX w. nikt już nie wierzył w realność „sfery gwiazd stałych”, a formalny dowód jej nieistnienia powinien polegać po prostu na pomiarze odległości konkretnych gwiazd. Dowodów tych w postaci paralaktycznych przesunięć gwiazd bliskich na tle dalszych (wynikających z rocznego ruchu Ziemi) poszukiwano od dawna, a powodzenie osiągnięto w 1837 r. Wtedy bowiem pojawiły się techniczne możliwości mierzenia kątów poniżej 1" – takie paralaksy mają najbliższe gwiazdy. Niemal jednocześnie Bessel wyznaczył wtedy paralaksę gwiazdy 61 Cyg (0,"35), Struve – Wegi (0,"25) i Henderson α Cen (1"). Pomiary te zostały zresztą z czasem poprawione odpowiednio na 0,"29, 0,"12, 0,"76. Nic dziwnego, że Kopernik, choć przeczuwał występowanie zjawiska paralaksy, nie mógł tak małych kątów zmierzyć.

W 1866 roku ukazała się praca Jamesa Clerka Maxwella dotycząca kinetycznej teorii budowy materii. W przeprowadzonych obliczeniach Maxwell zastosował pomysłową metodę. Zauważył mianowicie, że wiele obliczeń ogromnie się upraszcza, jeżeli założyć, że cząsteczki odpychają się z siłą proporcjonalną do $1/r^5$ (r – odległość cząsteczek). Po otrzymaniu wyniku można natomiast udowodnić, że założenie szczególnej formy oddziaływania nie jest istotne.

Śledzenie ruchu kontynentów polega głównie na mierzeniu różnicy długości geograficznych dwóch wybranych punktów obserwacyjnych. Ruch kontynentów odbywa się dość powoli, z prędkością rzędu centymetrów na rok. Z kolei pomiary długości geograficznej sprowadzają się do wyznaczania lokalnego czasu, zatem by wykryć i zmierzyć tak powolny ruch, trzeba dysponować fantastycznie dokładnymi zegarami. Współczesne zegary atomowe „trzymają” czas z dokładnością rzędu 10^{-12} i dzięki temu ruch kontynentów już dawno przestał być hipotezą i jest zjawiskiem doskonale mierzalnym.

Wyznaczanie kolejnych cyfr po przecinku stałych przyrody nie jest głównym zadaniem fizyki. Jednak akurat bardzo ważne było (i zresztą jest nadal) sprawdzenie, czy masa „bezwładna” (ta występująca w drugiej zasadzie dynamiki Newtona) jest równa masie „ciężkiej” (występującej w prawie grawitacji). Cała fizyka z astronomią przyjmując, że tak jest, jednak wypada upewnić się o tym doświadczalnie. Szereg przemyślnych eksperymentów dowodzi, że masy te są równe przynajmniej z dokładnością do 10^{-11} .

W Holandii aż do 1918 r. od kandydatów na studia uniwersyteckie wymagano znajomości greki i łaciny niezależnie od kierunku studiów. Johannes Van der Waals i Jacobus Van't Hoff nie spełniający tego warunku otrzymali specjalne imienne pozwolenia na podjęcie studiów.

Gdyby nieskończony Wszechświat był średnio równomiernie wypełniony gwiazdami, to w każdym kierunku trafiłoby się na gwiazdę, wobec czego całe niebo powinno świecić z jasnością powierzchniową jak u przeciętnej gwiazdy – tymczasem jest czarne. Tak brzmi fotometryczny paradoks Olbersa pochodzący z 1826 r. Przez lata spędzał sen z powiek liczny astronomom. Próbowano ratować sytuację za pomocą doraźnych dodatkowych założeń, np. o hierarchicznej budowie Wszechświata. Paradoks zniknął po opracowaniu ogólnej teorii względności i poznaniu na jej gruncie własności ekspandującego Wszechświata bez potrzeby wprowadzania dodatkowych założeń.

Zaproponowany przez Nielsa Bohra i rozwinięty przez Arnolda Sommerfelda planetarny model budowy atomu wodoru wyjaśniał istnienie skwantowanych stanów energetycznych atomu. Obliczane energie dość dobrze zgadzały się z wynikami pomiarów. Przejście do opisu atomów wieloelektronowych wymagało dodania do teorii jeszcze jednego założenia dotyczącego sposobu obsadzania stanów przez elektrony. Sformułował je Wolfgang Pauli w pracy z 1925 r. (tzw. zakaz Pauliego): w atomie nie ma nigdy dwu lub więcej elektronów w tym samym stanie, tj. stanie opisanym tymi samymi liczbami kwantowymi.

Nieco wcześniej, bo już w 1911 r., Władysław Natanson jako pierwszy zauważył, że wyprowadzenie wzoru Plancka (wzoru opisującego rozkład energii w widmie promieniowania ciała doskonale czarnego) wymaga założenia całkowitej nierozróżnialności kwantów promieniowania (fotonów).

Oba te fakty, niezrozumiałe w ramach fizyki klasycznej, zostały „wyjaśnione” po sformułowaniu mechaniki kwantowej. Odpowiednią regułą brzmi: Funkcja falowa układu identycznych cząstek o spinie równym nieparzystej wielokrotności $\hbar/2$ (tzw. fermionów – elektrony, protony, neutrony ...) jest zawsze całkowicie antysymetryczna, natomiast funkcja falowa układu identycznych cząstek o spinie całkowitym (fotony ...) jest zawsze całkowicie symetryczna. Czy jest to jednak wyjaśnienie zadowalające?

Według newtonowskiej teorii grawitacji każda planeta poruszałaby się po niezmiennej elipsie, gdyby podlegała oddziaływaniu tylko ze strony Słońca. Perturbacje ze strony innych planet powodują powolne zmiany elementów orbity, co najłatwiej przesledzić na przykładzie Merkurego, ponieważ porusza się on najszybciej ze wszystkich planet. Już U. Leverrier (1811 – 1877) stwierdził, że np. perihelium orbity Merkurego porusza się w tempie $573''/\text{wiek}$, podczas gdy z uwzględnieniem wszystkich perturbacji tempo to powinno wynosić $530''/\text{wiek}$. Brak $43''$ wytłumaczyła dopiero ogólna teoria względności opracowana przez A. Einsteina w 1917 r.

Jedną z konsekwencji zakazu Pauliego jest istnienie ferromagnetyzmu. W sieci krystalicznej dla jednakowych sąsiednich atomów, mających niezapełnioną powłokę elektronową, jest energetycznie korzystne równoległe ustawienie ich spinów, a więc i momentów magnetycznych. Mechanizm ten prowadzi do powstawania obszarów (domen) o jednakowo zorientowanych momentach magnetycznych. Wynikające z zakazu Pauliego oddziaływanie momentów magnetycznych elektronów jest znacznie większe od ich „klasycznego” oddziaływania magnetostrykcyjnego.



Najprostsze rozwinięcie w ułamek łańcuchowy ma liczba $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

Oznaczmy $p_0 = a_0, q_0 = 1, p_1 = a_0 a_1 + 1, q_1 = a_1$ oraz $p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}, q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$ dla $n = 2, 3, \dots$. Wtedy $R_n = \frac{p_n}{q_n}$, przy czym ułamek ten jest nieskracalny.



Uważny Czytelnik spostrzeżł zapewne, iż ciąg liczb w nawiasie, poza pierwszą i ostatnią, jest symetryczny, a ostatnia to podwojona pierwsza – tak jest zawsze, gdy d jest liczbą wymierną większą od 1, która nie jest kwadratem liczby wymiernej.

Jako *curiosum* powiemy jeszcze, że, wychodząc z rozwinięcia liczby $\sqrt{991}$, można by zapomocą niezbyt długich rachunków obliczyć, iż najmniejszym rozwiązaniem w liczbach naturalnych równania

$$u^2 - 991v^2 = 1$$

jest

$$u = 379516400906811930638014896080, \quad v = 12055735790331359447442538767.$$

Mamy tu pouczający przykład, jak może mylić indukcja, oparta jedynie na doświadczeniu. Podstawiając za v wartości kolejne 1, 2, 3, ..., aż do 10^{28} , nie otrzymujemy rozwiązania równania $u^2 - 991v^2 = 1$, a jednak wnioskowanie stąd, że równanie to nie jest rozwiązalne w liczbach naturalnych byłoby błędne. Powyższy cytat pochodzi z książki Wacława Sierpińskiego „Teoria liczb” (Warszawa 1925). Opowiemy dalej, o jakim rozwinięciu liczby $\sqrt{991}$ mówi profesor Sierpiński. Chodzi tu o ułamki łańcuchowe.

Każdą liczbę niewymierną x można zapisać jako ułamek łańcuchowy

$$x = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$$

gdzie a_0 jest liczbą całkowitą i a_1, a_2, \dots są liczbami naturalnymi. Zapis powyższy oznacza, że x jest granicą ciągu tzw. reduktów R_n , gdzie

$$R_n = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_n}}}$$

(Liczby wymierne dają się zapisać jako skończone ułamki łańcuchowe.) W dalszym ciągu będziemy dla oszczędności miejsca zapisywać równości podobne do powyższych jako

$$x = (a_0; a_1, \dots), \quad R_n = (a_0; a_1, \dots, a_n).$$

Łatwo podać wzór rekurencyjny na ciąg (a_n) . Oznaczmy $x_0 = x, a_0 = [x_0]$ ([t] część całkowita liczby t), wtedy

$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n - a_n}, \quad a_{n+1} = [x_{n+1}].$$

W przypadku gdy x jest pierwiastkiem (niewymiernym) równania kwadratowego o współczynnikach całkowitych, ciąg (a_n) jest (poczynając od pewnego miejsca) okresowy. Zapisujemy to jako $x = (a_0; a_1, \dots, a_p, \overline{a_{p+1}, \dots, a_{p+s}})$ (gdy liczby a_{p+1}, \dots, a_{p+s} powtarzają się). Gdy niewymierna liczba $x > 1$ jest pierwiastkiem x liczby wymiernej, zapis staje się jeszcze prostszy $x = (a_0; \overline{a_1, \dots, a_s})$.

Okazuje się, że znajomość rozwinięcia w ułamek łańcuchowy liczby \sqrt{d} (d – liczba naturalna nie będąca kwadratem) pozwala znaleźć rozwiązania naturalne równania $u^2 - dv^2 = 1$. Jeśli $\sqrt{d} = (a_0; \overline{a_1, \dots, a_s})$, to dla s parzystego wystarczy zapisać redukty $R_{s-1}, R_{2s-1}, R_{3s-1}, \dots$ jako ułamki nieskracalne $\frac{u_1}{v_1}, \frac{u_2}{v_2}, \frac{u_3}{v_3}, \dots$. Pary (u_i, v_i) są szukanymi rozwiązaniami. Dla s nieparzystego rozwiązaniami są liczniki i mianowniki reduktów $R_{2s-1}, R_{4s-1}, R_{6s-1}, \dots$.

A teraz przepis na znalezienie ciągu (a_n) (dla liczby \sqrt{d}). Określamy

$$h = [\sqrt{d}], \quad e_0 = 1, \quad f_0 = 0$$

i następnie

$$a_{n-1} = \left[\frac{f_{n-1} + h}{e_{n-1}} \right], \quad f_n = a_{n-1}e_{n-1} - f_{n-1}, \quad e_n = \frac{d - f_n^2}{e_{n-1}}.$$

Układ ciągów (e_n, f_n) jest okresowy, a więc ciąg (a_n) też jest okresowy. Wystarczy znaleźć takie s , że $e_{s+1} = e_1, f_{s+1} = f_1$. Wtedy $\sqrt{d} = (a_0; \overline{a_1, \dots, a_s})$.

Gdy za d weźmiemy liczbę 991, to „zapomocą niezbyt długich rachunków” otrzymujemy

$$\sqrt{991} = (31; \overline{2, 12, 10, 2, 2, 2, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 1, 3, 1, 8, 4, 1, 2, 1, 2, 3, 1, 4, 1, 20, 6, 4, 31, 4, 6, 20, 1, 4, 1, 3, 2, 1, 2, 1, 4, 8, 1, 3, 1, 1, 1, 1, 6, 2, 1, 1, 2, 2, 2, 10, 12, 2, 62}).$$

Opracował dr Jerzy RYLL