

Nagrodę Dziekanów







dla Autora najlepszego artykułu w *Delcie*
w roku akademickim 2009/2010
uzyskali

Aleksander M. Kubica i Wiktor A. Pilewski

za artykuł

Jak skupiać światło przy użyciu drukarki i folii i co z tego wyniknąć może
zamieszczony w numerze 5(432)/2010

SPIS TREŚCI NUMERU 3 (442)

Nanotechnologia <i>Jacek Szczytko</i>	str. 1
Interfejs mózg-komputer – zrób to sam (II) <i>Magdalena Michalska, Joanna Jędrzejewska-Szmek</i>	str. 4
Kwadraty <i>Jakub Radoszewski</i>	str. 6
Jak obliczać sumy potęg za pomocą rachunku różnicowego? <i>Hubert Wójtowicz</i>	str. 8
Kącik przestrzenny (7): Zejdźmy na ziemię <i>Michał Kieza</i>	str. 9
Skojarzenia w grafach kubicznych <i>Marcin Pilipczuk</i>	str.11
 O rozgrywkach ligowych <i>Michał Kieza</i>	str.12
Kosmiczny pył <i>Kamil Złoczewski</i>	str.14
 Zadania	str.15
 Ciecze o małych lepkościach <i>Stanisław Bednarek</i>	str.16
 Co się kryje w morzach? <i>Magdalena Fikus</i>	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (39): Wieże <i>Tomasz Kulczyński</i>	str.19
Aktualności	str.20
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.21
Klub 44	str.22
Patrz na niebo: Najmłodsza planeta	str.24
Marzec	str.24
 Twierdzenie Menelaosa <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

W następnym numerze przedstawiamy...

... metodę symetryzacji Steinera i problem drzewa Steinera. Oba te zagadnienia są natury geometrycznej, a drugie z nich doczekało się dyskretnej sformułowania w języku teorii grafów i ciekawych rozwiązań algorytmicznych.

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jan A. Gaj – przewodniczący, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

FIRMY DYSTRYBUUJĄCE *Deltę*

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466.

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600,

warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesyłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):

<http://www.deltami.edu.pl/>

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

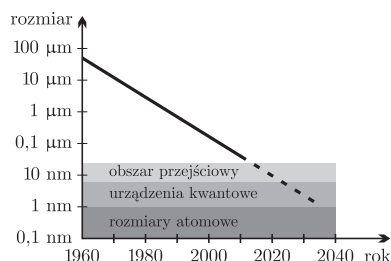
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Postęp w technice nie może odbywać się bez nowych technologii. Wielkie epoki w historii cywilizacji nazwane zostały od materiałów, które ludzie nauczyli się obrabiać i wykorzystywać (co często wiązało się z wynalezieniem nowych technik produkcji) – epoka kamienia, brązu, żelaza, pary. Nie wiemy jeszcze, pod jaką nazwą w historii znajdzie się przełomowy wiek XX – czy będzie to wiek krzemu, elektroniki czy informatyki. Równie pojemnym pojęciem jest „nanotechnologia” – słowo to na początku XXI wieku jest używane do określenia najbardziej zaawansowanych technicznie możliwości projektowania, tworzenia, manipulowania i wykorzystania materii – dzięki precyzyjnym możliwościom kontroli w niezwykle małej skali „nano”.

Przedrostek „nano” oznacza po prostu 10^{-9} (jedną miliardową część). W nanotechnologii chodzi o rozmiary rzędu 0,000 000 001 m – niezależnie od tego, jakich struktur to dotyczy – biologicznych, wytwarzanych metodami fizyki czy chemii. Dlatego też przedrostek „nano” jest dalej wykorzystywany do tworzenia kolejnych neologizmów – nanocząstek, nanorurek, nanodysków, nanonauki itp. (autor słyszał nawet dość kuriozalne słowo nanonaukowiec). Nanometr to dość mało: stosunek wielkości typowej nanocząstki do rozmiarów piłki futbolowej jest taki jak stosunek wielkości piłki do rozmiarów Księżycy!

Drugim składnikiem słowa nanotechnologia jest „technologia”, które z języka angielskiego powinno być raczej tłumaczone jako „technika”, chodzi tu więc raczej o projektowanie, kontrolę, badania, charakteryzację, a nie tylko o samą technologię wytwarzania. Zdobyte nanotechnologii wykorzystujemy na co dzień, nie zastanawiając się nad wirtuozerią techniczną niezbędną do konstrukcji procesorów, które obecnie montowane są nie tylko w komputerach i telefonach, ale i w urządzeniach AGD, samochodach, kartach płatniczych, a nawet na metkach sklepowych (w tzw. technologii radiowej identyfikacji RFID). Rozmiar najmniejszych elementów procesorów – tranzystorów – wynosi około kilkudziesięciu nanometrów. Na przykład, współczesne procesory firm Intel i AMD tworzone są w tzw. technologii 32 nm, co oznacza, że bramka w tranzystorze ma właśnie szerokość 32 nm. To mniej niż rozmiary najmniejszych wirusów. Na jednej naszej krwince czerwonej moglibyśmy nadrukować ponad 400 tranzystorów, na czubku włosa – kilka tysięcy (a to już by pozwoliło na pracę kalkulatora).

Właśnie postęp w elektronice sprawił, że na początku XXI w. zaczęto zajmować się nanotechnologią zupełnie poważnie. Wiąże się to z empirycznym prawem rozwoju technologii krzemowej sformułowanym w 1965 r. przez Gordona Moore’a, jednego z założycieli firmy Intel. Prawo to stwierdzało, że co 2 lata (obecnie co 18 miesięcy) liczba komponentów w układach cyfrowych (tranzystorów, połączeń itp.) podwaja się. Obecnie mamy do dyspozycji około 10^9 tranzystorów w nowoczesnych procesorach, zaś sam koszt pojedynczego tranzystora jest teraz mniejszy od 10 nano-dolarów – mniej niż wydrukowanie pojedynczej litery dowolną techniką (długopisem, ksero, czy za pomocą maszyny drukarskiej). Skoro zaś same układy scalone się nie powiększają (typowy procesor jest rozmiaru paznokcia), oznacza to, że mamy równocześnie do czynienia z równie szybką miniaturyzacją. Co więcej, jak kiedyś dało się przewidzieć nadejście nanotechnologii, tak teraz możemy przewidzieć, że dekada 2020–2030 powinna być dekadą urządzeń, których działanie w pełni będzie oparte o prawa mechaniki kwantowej. W tej chwili procesy kwantowe, np. tunelowanie, stanowią raczej przeszkodę niż pomoc w działaniu tranzystorów.



Ewolucja rozmiarów układów scalonych, wg International Technology Roadmap for Semiconductors, SEMATECH.

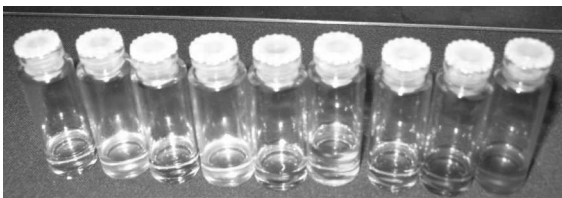
*Wydział Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego, opiekun makrokierunku „Inżynieria nanostruktur” oraz kierownik projektu *Nowe wyzwania – nowe kierunki. Rozwój kierunków interdyscyplinarnych dla potrzeb gospodarki opartej na wiedzy*, finansowanego przez Europejski Fundusz Społeczny w ramach Programu Operacyjnego Kapitał Ludzki.

Współczesna technologia krzemowa jest podstawą całych gałęzi gospodarki – to nie tylko komputery, telefony i aparaty cyfrowe, ale także rozrywka (filmy animowane, efekty specjalne, gry), wydajne operacje numeryczne (symulacje, bilingi, transakcje), nowe usługi bankowe i telekomunikacyjne itp. Typowy czas potrzebny na napisanie np. nowej gry to od 3 do 5 lat. Zatem jak cały projekt się zaczyna, to na rynku nie ma jeszcze takich komputerów (procesorów, kart graficznych), na których ta gra mogłaby zostać uruchomiona (to samo dotyczy systemów operacyjnych – opóźnienie w premierze znanego systemu operacyjnego wiązało się z opóźnieniem we wprowadzaniu dwuprocesorowych komputerów, na których system działałby w miarę płynnie). Przemysł (tak komputerowy, jak i AGD czy rozrywkowy) potrzebuje planowania. Dlatego prawo Moore’a – mimo

że nie jest prawem przyrody, a jedynie samospełniającą się przepowiednią – jest pilnie śledzone przez wiele branż. Istnieją specjalne organizacje (np. SEMATECH – międzynarodowe konsorcjum producentów półprzewodników), które śledzą rozwój, publikują raporty, a przede wszystkim starają się odpowiednio wcześniej wypatrzeć przeszkody pojawiające się na kolejnych etapach miniaturyzacji. Gęstsze upakowanie komponentów rodzi trudności nie tylko ze stworzeniem odpowiednich układów. Na przykład, w fotolitografii będącej podstawowym narzędziem służącym do nanoszenia wzorów układów scalonych na powierzchnię krzemu, rozmiar 32 nm oznacza, że musimy używać światła tzw. dalekiego ultrafioletu, które jest intensywnie pochłaniane przez większość materiałów. To sprawia, że proces musi odbywać się w próżni, obrazowanie musi być robione przy użyciu lusterek (bo każda maska lub soczewka pochłania światło UV). Problemem jest jakość podłoża (np. atomowa precyzja oszlifowania kryształu krzemu o średnicy 30 cm), długość dyfuzji domieszek w zminiaturyzowanych układach, a także odprowadzanie ciepła z układów pracujących z częstotliwością rzędu gigaherców. To wszystko sprawia, że gdy tylko przemysł półprzewodnikowy natrafia na przeszkody, uruchamiane są we wszystkich wysoko rozwiniętych krajach ogromne pieniądze na badania (do 2005 r. przemysł półprzewodnikowy przeznaczył około biliona dolarów na badania naukowe). Zatem gdy tylko w latach 90. XX wieku pojawiły się problemy związane z miniaturyzacją do nanoskali, pojawiły się też środki na badania.

Drugim powodem, dla którego nanotechnologia rozkwitła na początku XXI w., jest zaawansowanie metod badawczych – przede wszystkim mikroskopowych. Zwykle mikroskopy elektronowe pokazują obiekty wielkości mikronów. Takie, które umożliwiłyby wgląd w materię z dokładności atomową, były do niedawna niezwykle drogie. Jednak technologia się z czasem upowszechniła i coraz więcej laboratoriów stać na takie urządzenia. Podobnie z różnego rodzaju mikroskopami skaningowymi: tunelowym, sił atomowych i ich licznych obecnie odmian. Chociaż te urządzenia są także bardzo drogie, ich ceny wyraźnie spadają. Pozwoliło to np. Uniwersytetowi Warszawskiemu na zakup mikroskopu tunelowego dla pracowni studenckiej Wydziału Fizyki.

Ważnym elementem rozwoju nanotechnologii były doświadczenia naukowców – fizyków i chemików, którzy od lat 70. badali struktury niskowymiarowe, jeszcze zanim słowo „nanotechnologia” stało się takie modne. Najpierw były to studnie kwantowe (obiekty dwuwymiarowe), potem druty (jednowymiarowe) i kropki kwantowe (zlokalizowane). Dzięki temu wiadomo było, jakich zjawisk w skali nano można poszukiwać i jakie są własności optyczne lub elektryczne nanoobjektów.



Próbki rozpuszczalnika organicznego oświetlone ultrafioletem mają kolor od przezroczystego (po lewej) poprzez żółty (w środku) do czerwonego (po prawej). Za tę zmienność odpowiedzialne są nanocząstki CdSe o różnej wielkości zawieszona w rozpuszczalniku. Im nanocząstka większa, tym jej luminescencja ma bardziej czerwony kolor. Wynika to z zasady nieoznaczoności Heisenberga – im lepiej lokalizujemy elektron w małej kropce, tym bardziej nieoznaczony musi mieć on pęd, a więc tym większą ma energię kinetyczną (i emituje foton o większej „niebieskiej” energii). Rzeczywiste kolory można zobaczyć, odwiedzając Piknik Naukowy.

Na to wszystko nałożył się ogromny postęp w syntezie chemicznej. Chemicy potrafią obecnie precyzyjnie syntetyzować nanoobjekty określonej wielkości lub kształtu, modyfikować ich powierzchnię poprzez dołączanie innych molekuł o określonych właściwościach chemicznych lub biologicznych (proces ten nazywamy funkcjonalizacją). Kropki kwantowe – „zerowymiarowe” struktury początkowo tworzone na powierzchni półprzewodnika – można także utworzyć w stanie „swobodnym”, niezwiązany z żadnym podłożem. Chemiczna synteza takich nanoobjektów jest dużo łatwiejsza i tańsza niż pracochłonne procesy litograficzne albo tworzenie kropek na powierzchni kryształu w procesie samoorganizacji. A potem takie swobodne kropki można nanieść na inną powierzchnię, dzięki czemu możemy zmodyfikować własności materiału – w zależności od pokrycia może on się stać hydrofobowy lub hydrofilowy, może zyskać zdolności katalizowania reakcji chemicznych itp. Okazało się, że czasem wystarczy sama nanostrukturyzacja powierzchni (prawda, jak wygodny jest przedrostek „nano”?), żeby dana powierzchnia zaczęła kleić się do wszystkiego jak stopy gekona.

Nanotechnologia znalazła swoje zastosowanie w naukach biologicznych i medycznych. Bardzo dobrym przykładem jest obrazowanie struktur komórkowych za pomocą nanocząstek. Większość obiektów biologicznych jest przezroczysta dla światła, można więc użyć specjalnych barwników do zaznaczenia miejsc z jakiegoś powodu interesujących badacza – fragmentów preparatu lub całych komórek. Nanocząstki zwykle są trwalsze od molekuł chemicznych i można je sfunkcjonalizować tak, by trafiały w żądane miejsca. Może to zostać wykorzystane w diagnostyce i terapii medycznej.

Przykładem nietypowej terapii za pomocą nanocząstek jest wykorzystanie nanomagnesów do lokalnego niszczenia komórek nowotworowych. Poprzez wprowadzenie nanocząstek w odpowiednie miejsce (dzięki funkcjonalizacji chemicznej albo za pomocą pola magnetycznego) można – poprzez ich szybkie przemagnesowywanie w zmiennym polu magnetycznym – podnieść lokalnie temperaturę tkanek, co prowadzi do ich zniszczenia (w przypadku np. raka mózgu wystarczy temperatura ok. 42 °C).

Manipulowanie obiektami w skali nano umożliwiło badanie nowych zjawisk. Przykładem jest tu fotonika (i jej odmiany, takie jak np. plazmonika). Nanomateriały ułożone w regularne wzory, tworzące sztuczne kryształy, pozwalają na precyzyjne kierowanie światłem. Można falę świetlną – mającą w próżni długość ok. 500 nm – upchnąć w strukturze fotonicznej o rozmiarach kilkudziesięciu nm, a następnie tym światłem pokierować, uwięzić, przesłać pod kątem prostym do kierunku wejściowego itp. Sterowanie światłem odbywa się dzięki uwięzieniu pola elektrycznego w sieci tzw. kryształu fotonicznego (naturalnymi takimi kryształami są opale). Kryształy fotoniczne są przykładem szerokiej klasy tzw. metamateriałów (albo materiałów funkcjonalnych), które zostały zaprojektowane przez człowieka do wykonywania ściśle określonych zadań. Ciekawym przykładem są poszukiwania materiałów o tzw. ujemnym współczynniku załamania światła. Fala elektromagnetyczna załamuje się na granicy takich ośrodków zupełnie inaczej niż w tradycyjnych materiałach. Uzyskanie takich materiałów pozwoliłoby na stworzenie czapki-niewidki, która byłaby opływana przez światło w taki sposób, że jej zawartość byłaby zupełnie niewidoczna (jak kamuflaż Predatora). Materiał spełniający to zadanie w świetle widzialnym wymaga struktur wielkości nanometrowej.

Z rozwojem nanotechnologii wiążą się także zagrożenia. W popkulturze nanotechnologia stała się synonimem czegoś bardzo zaawansowanego technicznie, ale jednocześnie niebezpiecznego, gdy wymknie się spod kontroli. Jedną z osób, które wywarły ogromny wpływ na rozwój nanotechnologii, był Kim Eric Drexler, który w roku 1986 w książce „Engines of Creation” przestrzegał przed stworzeniem samopowielających się nanorobotów, które zmieniłyby całą dostępną materię w swoje kopie (szarą maź, „Grey Goo”). Wizja ta nie była wcale odległa od wizji autorów science-fiction. Stanisław Lem w książce „Wizja lokalna” (1983 r.) opisał cywilizację z jednej strony kontrolującą, ale jednocześnie będącą pod kontrolą „bystrów” – dziś byśmy powiedzieli nanorobotów. Do realizacji stworzenia sztucznych urządzeń o takiej złożoności jest jeszcze bardzo daleko, ale nanotechnologia jest jeszcze dosyć młoda, trzeba więc zwracać baczną uwagę na zagrożenia z niej wynikające. Z drugiej strony, organizmy żywe od wieków były narażone na oddziaływania z nanocząstkami – np. fullereny i nanorurki węglowe można znaleźć w zwykłej sadzy, nano-ZnO jest składnikiem różnych maści, a nanokryształy węglanu wapnia są znajdowane w wielu zdrowych tkankach człowieka.

Nanotechnologia wymaga połączenia wiedzy z różnych dziedzin nauki. Na Uniwersytecie Warszawskim otwarto studia licencjackie (a od 2012 r. także magisterskie) na makrokierunku „Inżynieria nanostruktur”. Uczestniczą w nim Wydział Fizyki i Wydział Chemii Uniwersytetu Warszawskiego. Słowo makrokierunek (akurat w tym przypadku przedrostek „nano” byłby niestosowny) oznacza, że absolwenci IN zdobywają wiedzę zarówno z chemii, jak i z fizyki. Od 2010 r. nowi studenci uzyskali możliwość ubiegania się o stypendium na tzw. kierunkach zamawianych. Tych stypendiów w 2010 r. było 25 (po 1000 zł miesięcznie), a w 2013 r. będzie ich 27. Istnieje limit przyjęć – 60 osób. Z założenia tego typu ambitne kształcenie nie może być nigdy masowe. Studenci w trakcie swoich studiów licencjackich już na II roku będą pracowali na „prawdziwych” urządzeniach do badań nanomateriałów, w laboratoriach i grupach badawczych. Zamiast więc powiększać liczbę studentów UW będzie wybierała najzdolniejszych kandydatów, którzy sprostać ambitym programowi. Już w tej chwili przyszłymi absolwentami IN interesują się instytuty naukowe oraz firmy technologiczne. Nanotechnologia po prostu nie jest tylko „technologią przyszłości” – możemy korzystać na co dzień z produktów „nano”, ale potencjał, jaki mają w sobie nanoobiekty, wystarczy na wiele lat badań.

Interfejs mózg-komputer – zrób to sam

Część II: wykonanie doświadczenia

Magdalena MICHALSKA*, Joanna JĘDRZEJEWSKA-SZMEK*

Wyobraź sobie, że siedzisz w swoim pokoju, zamierzasz zgasić światło, myślisz o tym i światło gaśnie – komputer odczytał Twoją myśl i światło wyłączył. Jest to bardziej realne, niż mogłoby się wydawać! Co prawda, zamiast jedynie myśleć o zgaszeniu światła, musisz się zrelaksować, mieć przyklejone do głowy kilka elektrod i dysponować odpowiednim sprzętem oraz oprogramowaniem do analizy sygnału. Przy odrobinie pracy, niewielkich nakładach finansowych i łucie szczęścia możesz coś takiego zrobić w domu! Ci, którzy czytali poprzednią część tego artykułu, zapewne już mają kilka pomysłów. Tutaj przekażemy garść informacji potrzebnych do rozpoczęcia samodzielnych prób złożenia interfejsu mózg-komputer.

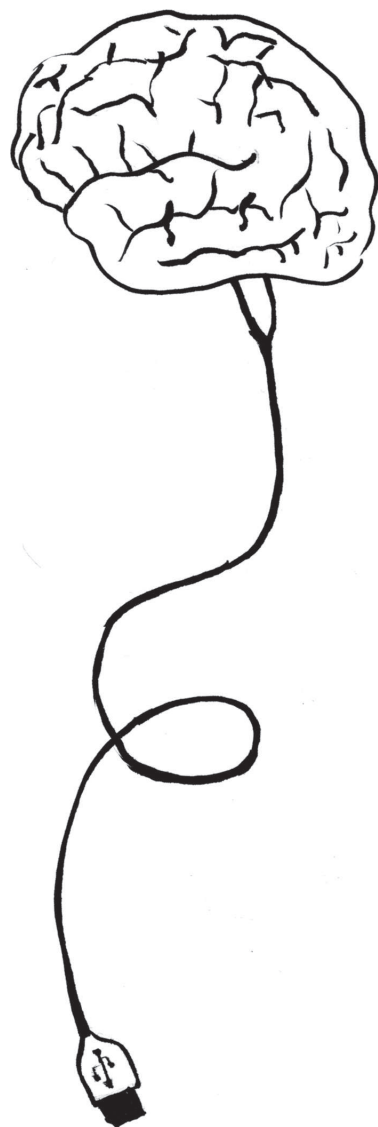
Teoretyczne aspekty powstawania czynności bioelektrycznej mózgu omówiliśmy w poprzednim artykule. Dla przypomnienia: EEG to zapis aktywności bioelektrycznej mózgu, nie przekazuje ono nam wszakże, co człowiek myśli, można z niego jedynie wywnioskować coś o sposobie pracy dużych grup neuronów – na przykład zbadać, które obszary mózgu intensywniej pracują. Wreszcie, w momencie zamknięcia oczu lub w stanie relaksu obserwujemy wzrost amplitudy w tzw. paśmie alfa, czyli w składowych sygnału o częstościach z przedziału, umownie, od 8 do 15 Hz. Posiadając tę wiedzę oraz trochę ogólnych informacji i umiejętności z dziedziny informatyki, matematyki i fizyki, mamy podstawy do złożenia prostego interfejsu mózg-komputer.

Wszystko zaczyna się od zebrania sygnału, a do tego potrzebujemy odpowiedniego sprzętu i oprogramowania. Skąd wziąć sprzęt? Musimy mieć na pewno wzmacniacz sygnału i elektrody. Jedna profesjonalna elektroda EEG to koszt około 70 zł, a potrzebujemy ich więcej. Jeśli chodzi o wzmacniacze EEG, ceny są jeszcze bardziej zaporowe – koszt prostego wzmacniacza o niskiej rozdzielczości i małej liczbie kanałów (rzędu kilku) to kilka tysięcy złotych. Na szczęście, już przed nami mnóstwo ludzi zapragnęło sterować swoim komputerem wyłącznie za pomocą myśli i nie miało dużo pieniędzy do wydania. W efekcie powstało trochę instruktaży, jak stosunkowo niskim kosztem przygotować odpowiednie urządzenia. Miejscem, gdzie należy szukać szczegółowych informacji na ten temat, jest witryna projektu Open EEG [1]. Tutaj, z uwagi na brak miejsca, opiszemy dość ogólnie podstawowe kroki, które należy poczynić. W zależności od tego, jak „niskopoziomowo” chcemy do tego podejść, możemy wziąć schemat obwodu takiego wzmacniacza i samodzielnie go zlutować zgodnie z instrukcjami [2] bądź też skorzystać z gotowego półproduktu, np. [3]. Jeśli chodzi o elektrody, porządne, samodzielne ich wykonanie jest niezmiernie trudne dla osoby początkującej, niemającej wcześniej styczności z techniką oklejania, a ta część jest dość kluczowa w procesie zbierania EEG. Dlatego też, aby nie mnożyć potencjalnych miejsc, w których popełniamy błąd, tworząc nasz własny interfejs mózg-komputer, polecamy zainwestować w trzy elektrody (to mniej więcej minimum potrzebne do zebrania sygnału) bądź spróbować skontaktować się z jakąś placówką badawczą lub szpitalem i spytać, czy nie mają zużytych elektrod, które mogliby odstąpić młodym pasjonatom nauki.

Skąd wziąć oprogramowanie? Jeśli chodzi o komunikację z wymienionym powyżej sprzętem, też możemy do tego podejść na różnych poziomach samodzielnego zaangażowania. Dostępny jest firmware, który należy samodzielnie wgrać na mikrokontroler (dla tych, którzy się przestraszyli: jest to prosta czynność wymagająca użycia odpowiedniego urządzenia zwanego programatorem, dostępnego w sklepach elektronicznych, oraz odpowiedniego oprogramowania dostępnego w Internecie). Z zawartych w nim komentarzy można zaczerpnąć informacji na temat protokołu komunikacji [4]. Można też podejrzeć gotowy program do interpretowania danych z tych płytek [5]. Następnie przydałoby się obejrzyć dane, które zbieramy. Tu znów na stronie projektu Open EEG znajdziemy trochę ciekawych linków [6], można też próbować użyć oprogramowania projektu openBCI [7] (tu szczególnie zachęcamy do kontaktowania się z autorkami tekstu, które chętnie pomogą w razie problemów).

Mamy sygnał, i co dalej? Załóżmy, że mamy już podłączony sprzęt. „Leci” z niego sygnał – N razy na sekundę dostajemy próbkę – wartość sygnału w danej chwili (N to tzw. częstość próbkowania). Teraz z tych liczb musimy wydobyć interesujące nas informacje. Jak to się robi profesjonalnie? Wypada o tym wiedzieć, choć w praktyce

*Zakład Fizyki Medycznej,
Wydział Fizyki
Uniwersytetu Warszawskiego





Rozwiązanie zadania F 783.

Dolna kulka zostanie poderwana do góry, jeśli $mg \leq q^2/(4\pi\epsilon_0 d^2)$, gdzie d to najmniejsza odległość między kulkami w trakcie drgań tej górnej. Z zasady zachowania energii mamy:

$$mgh - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 h} = mgd - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} - k \frac{(h-d)^2}{2}.$$

Podstawiając $q^2/(4\pi\epsilon_0 d^2) = mg$, dostajemy:

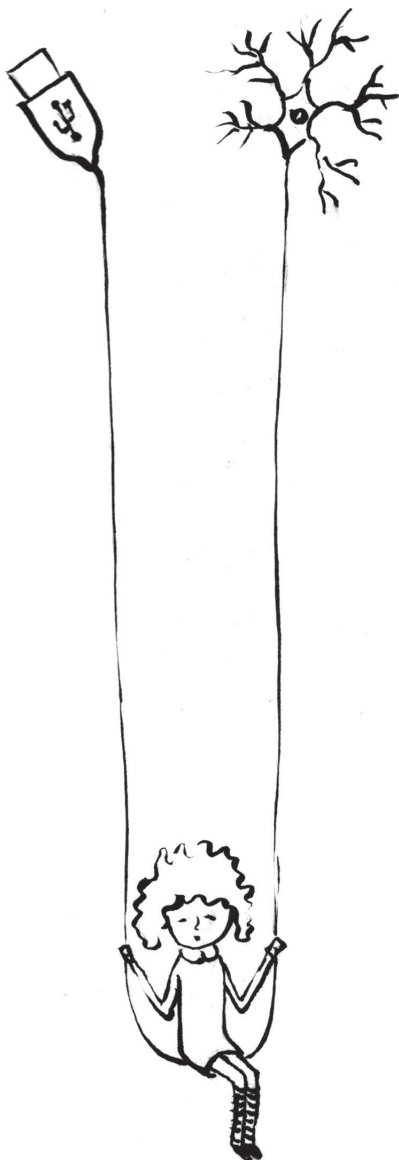
$$d^2 - \frac{2kh^2}{kh+2mg}d + \frac{kh-2mg}{kh+2mg}h^2 = 0,$$

stąd

$$d = h \frac{kh \pm 2mg}{kh + 2mg}.$$

Odległość minimalna odpowiada znakowi minus, a ładunek, dla którego kulka zostanie poderwana do góry, to

$$q = h\sqrt{4\pi\epsilon_0 mg} \frac{kh - 2mg}{kh + 2mg}.$$



uproszczymy nasze postępowanie do tego stopnia, że wiedza taka nie będzie nam bardzo potrzebna – zachęcamy do przeczytania dodatkowych materiałów na internetowej stronie *Delty*.

W stosunku do profesjonalnej analizy sygnału EEG zastosujemy następujące uproszczenia. Po pierwsze, zadowolimy się surowym sygnałem, nic nie będziemy odfiltrowywać. Po drugie, opiszemy sygnał przy użyciu transformaty Fouriera, a wydobywaną cechą będzie suma energii w częstościach z pasma alfa. Wreszcie, zastosujemy klasyfikację na podstawie ręcznie wybranego progów, który cecha ma przekraczać. Efekt powyższych kroków najzwyczajniej opisuje poniższy kawałek kodu w Pythonie:

```
def decision(data, sampling_rate, min_alfa, max_alfa, border):
    d = abs(numpy.fft.rfft(data))
    d[0] = 0
    s = 0
    for x in range(min_alfa * sampling_rate, max_alfa * sampling_rate):
        s += d[x]
    if s > border: # Relaks!
        return 1
    return 0
```

Możemy już teraz podać przepis na wykonanie interfejsu mózg-komputer.

Będą nam potrzebne dwie płytki PCB zgodne ze schematami [8] (np. takie jak na [9]), programator ISP, kabel PCB board-to-board connector, kabel szeregowy (ponieważ będzie trzeba przymocować jedną jego końcówkę do płytki cyfrowej, a drugą podłączyć do komputera, polecamy dwa kable – w jednym uciąć jedną końcówkę i zostawić końcówkę żeńską szeregową, drugi szeregowy do podłączenia tamtego do komputera – może być z dwiema męskimi końcówkami szeregowymi lub z męską końcówką szeregową i wejściem do portu USB, w zależności od tego, jakie porty ma nasz komputer), baterijka 9 V, komputer, najlepiej z systemem operacyjnym Linux, 3 elektrody EEG, pasta przewodząca, np. TEN20, gaziki, spirytus rektyfikowany lub salicylowy, torebka landrynek, roztwór soli fizjologicznej oraz woltomierz.

Elektrody należy przygotować w zależności od tego, jaki mają wtyk, tak aby dało się je podłączyć do pinów wystających z płytki. Włożyć elektrody do roztworu soli fizjologicznej i pozostawić, aby moczyły się podczas dalszych przygotowań. Płytkę analogową i cyfrową należy połączyć kablem PCB board-to-board connector. Kablem szeregowym podłączyć płytkę cyfrową do komputera. Wgrać na mikrokontroler na płytce cyfrowej firmware [4], używając programatora oraz przeznaczonego do tego oprogramowania, np. PonyProg. Zaaplikować elektrody na głowę – zaczynając od elektrody odpowiadającej za uziemienie. Przetrzeć głowę spirytusem w miejscu, gdzie będzie naklejona elektroda, nabrać na główkę elektrody (do wklęsłej części) znaczącą ilość pasty przewodzącej i nakleić na głowę. Pasta ma właściwości klejące, powinno być jej na tyle dużo, aby elektroda trzymała się dobrze na głowie. Elektrody polecamy przykleić w następujących pozycjach według uniwersalnego systemu oklejania, zwanego 10-20 (w Wikipedii można znaleźć linki do grafik przedstawiających pozycje elektrod w tym systemie): uziemienie – Fz, kanały – O1, O2. Zmierzyć opory na stykach elektrod ze skórą, przykładając jedną pałeczkę woltomierza do końcówki elektrody GND (uziemienie), a drugą do końcówki innej elektrody. Opory powinny mieć wartość kilku kiloomów, w przypadku wartości przewyższających 10 kiloomów należy dokładniej przetrzeć skórę spirytusem, użyć więcej pasty przewodzącej i ponownie zaaplikować elektrodę. Podłączyć elektrody do odpowiednich pinów na płytce analogowej (kanał1, kanał2 oraz uziemienie). Podłączyć do płytki cyfrowej zasilanie z baterijki 9 V. Uruchomić oprogramowanie do zbierania sygnału, wyświetlić sygnał. Zadowoleni z sukcesu możemy zjeść landrynki.

- [1] witryna projektu Open EEG: <http://openeeg.sourceforge.net/>
<http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/modeeg.html>
- [2] http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/modeeg_building.html
- [3] <http://www.olimex.com/gadgets/index.html>
- [4] <http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/firmware/modeeg-p3.c>
<http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/firmware/modeeg-p2.c>
- [5] <http://code.google.com/p/openbci/source/browse/#1svn/trunk/openbci/amplifiers>
- [6] <http://openeeg.sourceforge.net/doc/sw/>
- [7] <http://code.google.com/p/openbci/>
- [8] <http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/modEEGdigital-v1.0.png>
<http://openeeg.sourceforge.net/doc/modeeg/modEEGamp-v1.0.png>
- [9] <http://www.olimex.com/gadget>

Tym razem zajmiemy się trochę innymi kwadratami niż zazwyczaj. Chodzi mianowicie o napisy postaci x^2 , czyli sklejenie jakiegoś słowa (ciągu liter) x z nim samym. Przykładowymi kwadratami występującymi w języku polskim są słowa *mama*, *kankan*, *rowerowe*, *wałowało*, *esemesem*.

Jeśli rozważamy jakieś słowo, może nas interesować, czy jest ono kwadratem, ale także czy jakieś jego pod słowo (tzn. spójny fragment) jest kwadratem. Jeżeli nie, to słowo takie nazywamy *bezkwadratowym*. Zastanówmy się przez chwilę nad tym, jak konstruować słowa bezkwadratowe.

Najprościej wybrać słowo, w którym wszystkie litery są różne, np. *abcde...* Gdyby liter w alfabecie było nieskończenie wiele, to moglibyśmy w ten sposób skonstruować dowolnie długie słowo bezkwadratowe. Nie da się ukryć, że nie jest to zbyt ciekawy przykład. No to może spróbujemy wygenerować długie słowo bezkwadratowe nad jakimś mniejszym alfabetem?

Alfabet jednoliterowy na pewno nam nie pomoże. Załóżmy więc, że mamy do dyspozycji dwie litery, *a* i *b*. Widać, że każde dwie kolejne litery w słowie bezkwadratowym muszą być różne, a zatem nasze słowo musi zaczynać się jakoś tak: *aba...* lub *bab...* Niestety, w obu tych przykładach nie możemy dołożyć już żadnej litery, gdyż wówczas otrzymamy kwadrat $(ab)^2$ lub odpowiednio $(ba)^2$. To oznacza, że najdłuższe słowo bezkwadratowe nad alfabetem dwuliterowym ma tylko trzy litery.

Kolejna próba: alfabet trzyliterowy. Znowu konstruujemy słowo, biorąc zawsze kolejną literę różną od poprzedniej. Daje to zawsze dwie możliwości wyboru. W takim razie dodajmy warunek, że każda kolejna litera musi być różna od *środkowej* litery dotychczasowego słowa – dokładniej, przy wyznaczaniu i -tej litery interesuje nas litera o indeksie $\lfloor \frac{i}{2} \rfloor$, przy czym litery słowa numerujemy od zera. Jeżeli to kryterium wciąż dopuszcza dwie możliwości, to wybieramy tę spośród niezabronionych liter, która występuje wcześniej w alfabecie. W ten sposób otrzymujemy takie oto słowo:

abacbcabacabcbacbcabcbacabacbcabacabcbacbcabcb...

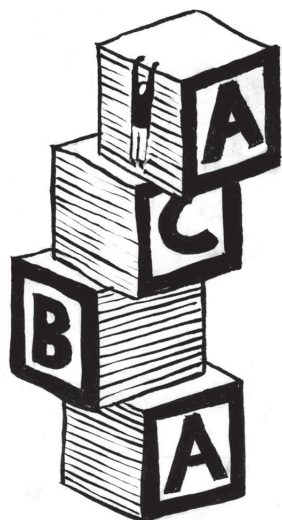
Okazuje się, że dowolnie długie słowo wygenerowane w ten sposób jest bezkwadratowe. Można ten fakt udowodnić formalnie, jednak w tym artykule zastosujemy podejście informatyczne natury eksperymentalnej: weźmiemy odpowiednio długie słowo tej postaci (np. złożone z miliona liter) i sprawdzimy za pomocą programu komputerowego, czy jest w tym słowie jakieś kwadratowe pod słowo. Jeśli okaże się, że nie, to *zapewne* wszystkie takie słowa są bezkwadratowe...

Nie jest wcale łatwo zaproponować efektywny, a zarazem nieskomplikowany algorytm sprawdzający, czy dane słowo jest bezkwadratowe – zachęcamy Czytelnika do próby samodzielnego zmierzenia się z tym problemem. Poniżej przedstawiamy elegancki algorytm o złożoności czasowej $O(n \log n)$, przy czym n to długość badanego słowa s , wzorowany na trudno dostępnej i trochę zapomnianej pracy M. Maina i R. Lorentza sprzed 25 lat.

Zacznijmy od prostego sprawdzenia, czy w słowie s znajduje się jakaś para równych kolejnych liter – to eliminuje nam kwadraty słów długości 1. W głównej części algorytmu wykonujemy $O(\log n)$ kroków; w i -tym kroku (dla $i = 1, 2, 3, \dots$) sprawdzamy, czy słowo s zawiera pod słowo kwadratowe x^2 , takie że długość x (oznaczenie: $|x|$) należy do przedziału domknięto-otwartego $[2^i, 2^{i+1})$. Wykonując taki krok, zakładamy, że s nie zawiera pod słów kwadratowych o długości połówki krótszej niż rozważane w tym kroku. Naszym celem jest wykonanie każdego kroku w złożoności czasowej $O(n)$.

Poszukiwania żądanego kwadratu rozpoczynamy od podziału słowa s na bloki długości $l = 2^{i-1}$ (jeżeli nie dzieli się równo, to końcowej, krótszej grupy liter nie rozpatrujemy). Zauważmy, że jeżeli w s występuje kwadrat x^2 , taki że $|x| \geq 2l$, to pierwsze wystąpienie x w ramach s musi zawierać co najmniej jeden z bloków podziału. Oznaczmy ten blok przez $s[j..j+l-1]$. To samo pod słowo pojawia się także na pozycji $j + |x|$ słowa s , choć to drugie wystąpienie nie musi już być blokiem podziału.

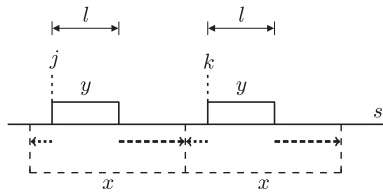
W naszym algorytmie rozważamy każdy kolejny blok $y = s[j..j+l-1]$ i poszukujemy wszystkich jego wystąpień w s zaczynających się na pozycjach z przedziału $[j+2l, j+4l)$. Co ciekawe, takie wystąpienia mogą być co najwyżej *dwa*. Faktycznie, żadne dwa wystąpienia y w ramach s nie mogą na siebie nachodzić ani nawet się stykać, gdyż wówczas wyznaczałyby one kwadrat słowa o długości nie większej niż l (dlaczego?). Stanowiłoby to sprzeczność z założeniem, że s nie zawiera kwadratu krótszego niż $2l$.



Dla Czytelnika, który zechce spróbować zmierzyć się z próbą dowodu bezkwadratowości rozważanych słów, mamy drobną wskazówkę: warto zacząć od sprawdzenia, jaki jest związek między kolejnymi literami rozważanych słów a zapisami binarnymi odpowiadających im pozycji.



Rozwiązanie zadania M 1307. Każdą liczbę zapiszmy w postaci $2^k m$, gdzie m jest nieparzyste. Wówczas m może przyjąć wartość $1, 3, 5, \dots, 2n-1$ – łącznie n różnych wartości. W takim razie, wśród dowolnych $n+1$ liczb znajdą się takie dwie, które mają ten sam czynnik nieparzysty, spełniając więc warunek zadania.



Dla każdego wystąpienia y w s na pozycji $k \in [j + 2l, j + 4l)$ musimy jakoś sprawdzić, czy wystąpienia z pozycji j oraz k wyznaczają jakiś kwadrat x^2 , taki że $|x| = k - j$. Poszukując takiego kwadratu, wystarczy skupić się na badaniu równości par liter słowa s o indeksach oddalonych o $k - j$. Najpierw sprawdzamy, czy $s[j - 1] = s[k - 1]$, $s[j - 2] = s[k - 2]$ i tak dalej, aż natrafimy na parę różnych liter albo aż dalszym indeksem dojdziemy do pozycji $j + l - 1$, co oznacza, że znaleźliśmy kwadrat. Następnie powtarzamy to postępowanie, ale tym razem idąc do przodu, tzn. sprawdzamy, jak długo zachodzi $s[j + m] = s[k + m]$ dla $m = l, l + 1, l + 2, \dots$. Tym razem możemy zatrzymać się, jeśli liczba wykonanych tutaj kroków powiększona o liczbę kroków wykonanych wcześniej jest nie mniejsza niż $k - j - l$, patrz rysunek. Jeżeli nie dojdziemy do wartości $k - j - l$, to łatwo zauważyć, że rozważana para wystąpień pod słowa y nie wyznacza kwadratu.

Na tym rozumowaniu oparty jest poniższy pseudokod algorytmu wykrywania kwadratu w słowie $s = s[0..n - 1]$.

```

function CzyJestKwadrat( $s, n$ )
  for  $i := 0$  to  $n - 2$  do
    if  $s[i] = s[i + 1]$  then return true;
   $l := 1$ ;
  while  $2l \leq n/2$  do
     $j := 0$ ;
    while  $j < n - l$  do
       $Z :=$  wystąpienia  $s[j..j + l - 1]$  zaczynające się
        na pozycjach z przedziału  $[j + 2l, j + 4l)$ ;
      for each  $k \in Z$  do
         $lewo :=$  długość najdłuższego wspólnego sufiksu
          słów  $s[0..j - 1]$  i  $s[0..k - 1]$ ;
         $prawo :=$  długość najdłuższego wspólnego prefiksu
          słów  $s[j + l..n - 1]$  i  $s[k + l..n - 1]$ ;
        if  $lewo + prawo \geq k - j - l$  then return true;
       $j := j + l$ ;
     $l := 2l$ ;
  return false;
end function

```

Prefiksem słowa nazywamy dowolny jego początkowy fragment, a sufiksem – dowolny jego końcowy fragment.

Skondensowany przegląd efektywnych algorytmów tekstowych zawiera artykuł W. Ryttera w *Delcie* 1/2008.

Zastanówmy się nad złożonością czasową tego algorytmu, przy okazji uzupełniając szczegóły techniczne jego implementacji. Pierwszym interesującym miejscem jest wyznaczenie zbioru Z . Znanne są różne efektywne algorytmy wyszukiwania wzorca (u nas jest to słowo y) w tekście (u nas: zadany fragment słowa s), np. algorytmy Knutha–Morrisa–Pratta, Boyera–Moore’a itp. W tym miejscu czeka nas jednak kolejne zaskoczenie: otóż w naszym programie w ogóle nie musimy używać żadnego z tych wysublimowanych algorytmów! Zaczynamy od sprawdzenia, literka po literce, czy y pasuje do s od pozycji $j + 2l$. Jak w pewnym momencie zakończymy to sprawdzanie (albo znajdując wystąpienie y , albo wskutek natrafienia na parę różnych liter na odpowiadających pozycjach), to kolejną próbę przypasowania słowa y wykonujemy od pierwszej pozycji w s następującej za wszystkimi przejrzanymi. Faktycznie, wystąpienie słowa y w s nie może nachodzić na żadne inne wystąpienie niepustego prefiksu słowa y w s , gdyż wówczas s zawierałoby kwadrat jakiegoś prefiksu słowa y , a przecież $|y| \leq l$. W ten sposób znajdujemy szukane co najwyżej dwa elementy zbioru Z w czasie $O(l)$.

Kolejny ciekawy moment to wyznaczenie wartości $lewo$ i $prawo$, wykonywane troszkę inaczej niż w opisie słownym algorytmu. Uzasadnienie poprawności pomijamy, przyjrzyjmy się kwestii złożoności czasowej. Łączna liczba operacji wykonywanych tutaj może być całkiem duża. Zauważmy jednak, że jeśli przy wyznaczaniu wspólnego sufiksu i prefiksu wykonamy więcej niż $k - j - l$ operacji, to na pewno zaraz potem zakończymy działanie algorytmu, więc możemy sobie ten jeden raz pozwolić na wykonanie nawet i rzędu $O(n)$ operacji. W przeciwnym razie liczba tych operacji nie przekroczy $k - j - l$, która to wartość – przypomnijmy – jest nie większa niż $3l - 1$, czyli jest rzędu $O(l)$.

Widzimy zatem, że wewnątrz wewnętrznej pętli **while** wykonujemy – poza ewentualnie jedynym jej obrotem, kończącym cały algorytm – w czasie $O(l)$. Pętla ta wykonuje $O(\frac{n}{l})$ obrotów, co pokazuje, że koszt czasowy jednego obrotu zewnętrznej pętli **while** to $O(n)$. Ta, z kolei, wykonuje co najwyżej $O(\log n)$ obrotów, skąd wnosimy, że rzeczywiście opisany algorytm ma złożoność czasową $O(n \log n)$.

Na koniec pytanie do Czytelnika: czy można ten algorytm jakoś łatwo przerobić, tak aby wykrywał *wszystkie* kwadraty w słowie?



Rozwiązanie zadania F 784.

Aby kulka doleciała do ziemi, wystarczy, że w chwili zetknięcia się z ziemią prędkość kulki będzie równa zeru.

Z zasady zachowania energii:

$$mg(r - d) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d} + \frac{mv_{\min}^2}{2} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

otrzymujemy, zaniedbując poprawki rzędu $\frac{d}{r}$:

$$v_{\min} = \sqrt{2gr \left(\frac{q}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 drmg}} - 1 \right)},$$

przyjmując, że $\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2} > mg$;

w przeciwnym przypadku $v_{\min} = 0$.

Jak obliczać sumy potęg za pomocą rachunku różnicowego?

Autor jest finalistą XXVII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Bystra 2010.



Więcej o rachunku różnicowym i jego zastosowaniach można się dowiedzieć z książki R.L. Graham, D.E. Knuth, O. Patashnik, *Matematyka konkretna*, PWN, Warszawa 2002.

W książce tej sumowanie oznaczane jest symbolem $\sum f(x)\delta x$, co naśladuje symbolikę rachunku całkowego. Tutaj symbol ten został zmieniony, bo znak \sum występuje też w zupełnie innym znaczeniu, a wszystkie używane funkcje są jednoargumentowe.

Jest też różnica w oznaczeniu zakresów sumowania oznaczonego: mamy

$$\sum_{k=a}^{b-1} f(k) = \mathfrak{S}_a^b f(x).$$

Ten wzór w przypadku $0 < k < n$ można objaśnić, gdy zauważymy, że dzieląc zbiór n -elementowy na k niepustych podzbiorów, tworzymy z jednego z n elementów zbiór jednoelementowy (co można zrobić na $S(n-1, k-1)$ sposobów) lub umieszczamy go (na jeden z k sposobów) w jednym ze zbiorów, do których będziemy jeszcze dokładać elementy (na $S(n-1, k)$ sposobów).

Hubert WÓJTOWICZ

Jak wiadomo, pochodna opisuje zmiany danej wielkości (np. tak działa prędkościomierz w samochodzie). Z kolei całka opisuje sytuację odwrotną – odtwarza daną wielkość z jej zmienności (tak np. działa licznik energii elektrycznej). Można sobie wyobrazić, że urządzenia obliczające pochodną czy całkę nie działają w sposób ciągły, lecz skokowo. Wówczas możemy odpowiednik pochodnej nazwać *różnicą* i zdefiniować jako

$$\Delta f(x) = f(x+1) - f(x).$$

Bez trudu można przekonać się, że prawdziwe są następujące zależności

$$\Delta(f(x) \pm g(x)) = f(x) \pm g(x), \quad \Delta(f(x)g(x)) = f(x)\Delta g(x) + g(x+1)\Delta f(x),$$

skąd – wobec oczywistego $\Delta c = 0$ dla dowolnej stałej c – mamy np.

$$\Delta(cf(x)) = c\Delta f(x).$$

Znający rachunek różniczkowy widzą, że wzory te są dokładnymi odpowiednikami wzorów dla pochodnej.

Z kolei odpowiednik całki będziemy nazywali *anty-różnicą* lub *sumowaniem* i oznaczali $\mathfrak{S}f(x)$. Zatem

$$\mathfrak{S}f(x) = g(x) + c \iff f(x) = \Delta g(x).$$

I tutaj można wypisać wiele wzorów analogicznych do występujących w rachunku całkowym. Np. odpowiednik wynikającej ze wzorów wypisanych wyżej zależności

$$\mathfrak{S}(f(x)\Delta g(x)) = f(x)g(x) - \mathfrak{S}(g(x+1)\Delta f(x))$$

nazywany jest całkowaniem przez części – tu nazwiemy go sumowaniem przez części. Podobnie też, jak w rachunku całkowym, wprowadzimy *sumowanie oznaczone* \mathfrak{S}_a^b określone przez warunek:

$$\text{jeśli } \mathfrak{S}f(x) = g(x), \text{ to } \mathfrak{S}_a^b f(x) = g(b) - g(a).$$

Poza zaciekawiającą analogią do pochodnych i całek wprowadzone pojęcia mają szereg interesujących zastosowań. Tu zajmiemy się jednym z nich – wykorzystamy je do obliczenia dla danego m sumy dowolnie wielu m -tych potęg kolejnych liczb naturalnych, poczynając od 1.

Do tego celu potrzebne nam będą tzw. liczby Stirlinga II rodzaju, które będziemy oznaczali $S(n, k)$. Liczby te mówią, na ile sposobów można podzielić n -elementowy zbiór na k niepustych, rozłącznych podzbiorów. Liczby Stirlinga spełniają następującą zależność rekurencyjną:

$$S(n, k) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } k > n \vee (k = 0 \wedge n > 0), \\ 1 & \text{gdy } k = n, \\ k \cdot S(n-1, k) + S(n-1, k-1) & \text{gdy } 0 < k < n. \end{cases}$$

Potrzebne nam też będą jeszcze pewne modyfikacje pojęcia potęgi. *Potęę kroczącą* zdefiniujemy w następujący sposób:

$$x^{\underline{m}} = \begin{cases} x(x-1)\dots(x-m+1) & \text{dla } m \in \mathbb{Z}_+, \\ 1 & \text{dla } m = 0, \\ \frac{1}{(x+1)(x+2)\dots(x+m)} & \text{dla } m \in \mathbb{Z}_-. \end{cases}$$

Zauważmy, że

$$\Delta x^{\underline{m}} = (x+1)^{\underline{m}} - x^{\underline{m}} = mx^{\underline{m-1}}.$$

Okazuje się, że zróżnicowana potęga krocząca zachowuje się analogicznie do zróżniczkowanej zwykłej potęgi.

Warto odnotować, że

$$\Delta \frac{x^{\underline{m}}}{m} = x^{\underline{m-1}},$$

czego wygodniej nam będzie używać, gdy $m \neq 0$ zastąpimy przez $k+1$

$$\Delta \frac{x^{\underline{k+1}}}{k+1} = x^{\underline{k}}.$$



Rozwiązanie zadania M 1308.

Zauważmy, że dla $x \in [-2, 2]$ możemy napisać $x = 2 \cos \varphi$.
 Wtedy $f(x) = 2 \cos 3\varphi$ i ogólnie $f_n(x) = 2 \cos 3^n \varphi$. To oznacza, że $f_n(x) = 0$ dla $x = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{2 \cdot 3^n}$.
 Ponieważ funkcja cos jest malejąca w przedziale $(0, \pi)$, więc pierwiastki otrzymane dla $k = 0, 1, \dots, 3^n - 1$ będą różne, a więcej pierwiastków f_n mieć nie może.

Wykorzystując definicję antyróżnicy, otrzymujemy wzór na sumowanie:

$$\mathfrak{S}x^k = \frac{x^{k+1}}{k+1} + c, \quad k \neq -1.$$

Musimy jeszcze zastanowić się, czy istnieje taka funkcja $f(x)$, że

$$\Delta f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x+1}.$$

Łatwo można się zorientować, że jest nią

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{x}.$$

Zatem łącznie mamy (z dokładnością do stałej)

$$\mathfrak{S}x^m = \begin{cases} \frac{x^{m+1}}{m+1} & \text{dla } m \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}, \\ 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{x} & \text{dla } m = -1. \end{cases}$$

Wprowadziliśmy pojęcia potęgi kroczącej i liczb Stirlinga II rodzaju, ale jak to połączyć z obliczaniem sumy $\sum_{k=0}^{n-1} k^m$? Okazuje się, że przydatne jest następujące twierdzenie

$$x^n = \sum_{k=0}^n S(n, k)x^k, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Dowód tego twierdzenia można przeprowadzić indukcyjnie, opierając się na wzorze rekurencyjnym na $S(n, k)$.

Teraz już obliczanie sumy potęg przebiega sprawnie. Oto przykład: kolejno obliczamy

$$x^4 = \sum_{m=0}^4 S(4, m)x^m = x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x^1.$$

I ostatecznie

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} k^4 &= \sum_{k=0}^{n-1} (k^4 + 6k^3 + 7k^2 + k^1) = \mathfrak{S}_0^n x^4 + 6\mathfrak{S}_0^n x^3 + 7\mathfrak{S}_0^n x^2 + \mathfrak{S}_0^n x^1 = \\ &= \frac{n^5}{5} + 6\frac{n^4}{4} + 7\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} = \frac{n^5}{5} - \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}. \end{aligned}$$

Kącik przestrzenny (7) Zejdźmy na ziemię

Czasami, gdy zbyt bujamy w obłokach, słyszymy od innych *zejdź na ziemię!* Kto by pomyślał, że ta zazwyczaj dość nieprzyjemna uwaga może być niekiedy cenną wskazówką do zadań ze stereometrii. Zdarza się bowiem, że rozwiązując problem przestrzenny, nie wiemy, jak się do niego zabrać, natomiast widzimy, że można sformułować analogiczne zadanie na płaszczyźnie. Czasem rozwiązanie takiego zadania na płaszczyźnie może nam podpowiedzieć, co zrobić w przestrzeni.

1. (OM 52-III-2) *Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu leżącego wewnątrz czworościanu foremnego o krawędzi 1 od jego wierzchołków jest nie większa niż 3.*

Nietrudno zauważyć, że wierzchołki realizują maksimum, a intuicja podpowiada nam, że pewnie tylko one. Spróbujmy więc sformułować, a następnie rozwiązać, analogiczne zadanie na płaszczyźnie:

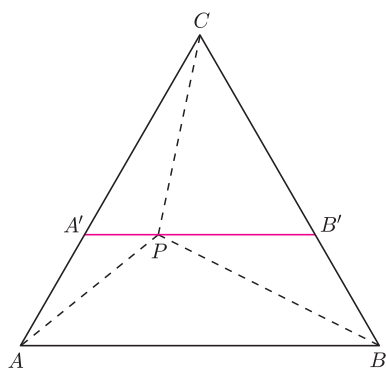
Dowieść, że suma odległości dowolnego punktu P leżącego wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku a od jego wierzchołków jest nie większa niż $2a$.

Niech A' i B' będą punktami przecięcia prostej równoległej do AB i przechodzącej przez punkt P odpowiednio z bokami AC i BC . Trójkąt $A'B'C$ jest równoboczny i $CP \leq A'B'$. Ponadto stosując nierówność trójkąta, dostaniemy $AP \leq AA' + A'P$ oraz $BP \leq BB' + B'P$. Dodając te trzy nierówności stronami, otrzymujemy

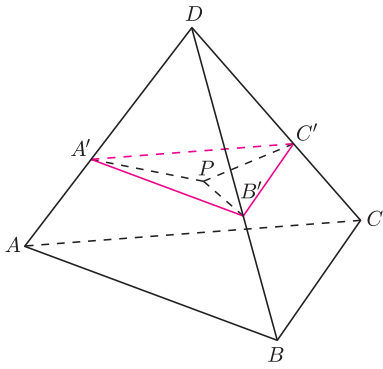
$$AP + BP + CP \leq AA' + A'P + BB' + B'P + A'B' = 2a.$$

Nietrudno też przekonać się, że równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy punkt P jest jednym z wierzchołków trójkąta ABC .

Przejdźmy do sytuacji trójwymiarowej. Przyjmijmy, że P leży wewnątrz czworościanu foremnego $ABCD$ o krawędzi 1. Wykorzystajmy naszą wiedzę



Rys. 1



Rys. 2

o wersji płaskiej. Tym razem, zamiast prostej, poprowadźmy płaszczyznę równoległą do ABC przechodzącą przez punkt P i przecinającą krawędzie AD, BD, CD odpowiednio w punktach A', B', C' . Podobnie jak w wersji płaskiej, czworościan $A'B'C'D$ jest foremny, więc $DP \leq A'B'$. Znow z nierówności trójkąta otrzymamy

$$AP \leq AA' + A'P, \quad BP \leq BB' + B'P \quad \text{oraz} \quad CP \leq CC' + C'P,$$

więc dostajemy

$$\begin{aligned} AP + BP + CP + DP &\leq AA' + A'P + BB' + B'P + CC' + C'P + A'B' = \\ &= 3 - 2A'B' + A'P + B'P + C'P \leq 3. \end{aligned}$$

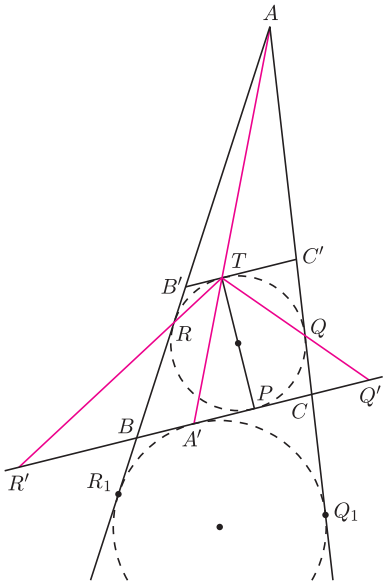
Ostatnia nierówność wynika z zastosowania wersji płaskiej dla trójkąta $A'B'C'$.

W tym zadaniu rozwiązanie analogicznego problemu płaskiego nie tylko podpowiedziało nam, jak znaleźć rozwiązanie wersji przestrzennej, ale nawet okazało się elementem dowodu.

2. (OM 60-III-5) Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD, CDA, DAB, ABC odpowiednio w punktach P, Q, R, S . Odcinek PT jest średnicą tej sfery, zaś punkty A', Q', R', S' są punktami przecięcia prostych AT, QT, RT, ST z płaszczyzną BCD . Dowieść, że punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.

Zadanie na pierwszy rzut oka wygląda dość przerażająco. Ale to tylko pozory, tak naprawdę jest dosyć łatwe. Żeby mieć lepszy ogłąd, najpierw rozwiążmy wersję płaską:

Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach P, Q, R . Odcinek PT jest średnicą tego okręgu. Proste AT, QT, RT przecinają prostą BC odpowiednio w punktach A', Q', R' . Wykazać, że A' jest środkiem odcinka $Q'R'$.



Rys. 3

Rozwiązanie. Skoro PT jest średnicą, to styczna do okręgu wpisanego w punkcie T jest równoległa do BC . Niech B' i C' będą punktami przecięcia tej stycznej z bokami AB i AC (rys. 3). Trójkąty $AB'C'$ i ABC są jednokładne, skąd natychmiast wynika, że punkt A' jest punktem styczności okręgu dopisanego z bokiem BC . Z równoległości $B'C'$ i BC wynika też, że trójkąty $TC'Q$ i $Q'CQ$ są podobne, a skoro $TC' = QC'$, to $CQ' = CQ$. Niech Q_1 będzie punktem styczności okręgu dopisanego, stycznego do BC , z prostą AC . W takim razie $A'C = Q_1C$, a stąd natychmiast wynika, że

$$A'Q' = A'C + CQ' = Q_1C + CQ = QQ_1.$$

Analogicznie, oznaczając przez R_1 punkt styczności okręgu dopisanego z bokiem AB , udowodnimy, że $R'A' = R_1R$. Ale $QQ_1 = RR_1$ – dowód jest więc zakończony.

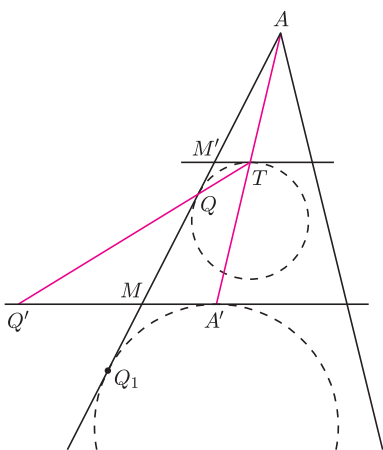
Teraz rozwiązanie zadania w wersji przestrzennej nie powinno sprawić już żadnych problemów.

Istotnie, prowadząc przez T płaszczyznę $B'C'D'$ równoległą do BCD , stwierdzamy, że punkt A' jest punktem styczności sfery dopisanej do czworościanu ze ścianą BCD . Dla wygody i przejrzystości rozumowania rozważmy przekrój czworościanu $ABCD$ oraz dwóch rozważanych sfer płaszczyzną ATQ (rys. 4) – cała reszta jest niepotrzebna, gdyż wersja płaska wyrobiła nam pewne intuicje. Punkt Q_1 styczności sfery dopisanej z płaszczyzną ACD leży na prostej AQ , należy więc do przekroju. Niech ponadto M i M' będą odpowiednio punktami przecięcia prostej AQ z prostą $A'Q'$ i prostą do niej równoległą przechodzącą przez punkt T . Postępując analogicznie jak w wersji płaskiej, otrzymamy kolejno równości:

$$M'T = M'Q, \quad MQ = MQ', \quad MA' = MQ_1,$$

skąd natychmiast wynika, że $Q'A' = QQ_1$, czyli $Q'A'$ jest równe długości odcinka stycznego do obu sfer. W ten sam sposób dowodzimy, że tę własność mają odcinki $R'A'$ i $S'A'$.

Zadanie to jest kolejnym przykładem, jak duże znaczenie w zadaniach przestrzennych ma czytelny rysunek zawierający tylko potrzebne rzeczy. A wersja płaska pomogła nam zdecydować, co tak naprawdę jest potrzebne do rozwiązania.

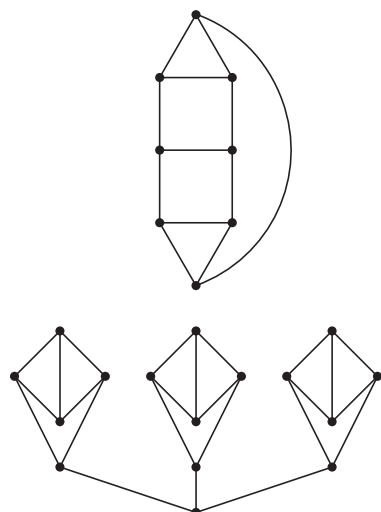


Rys. 4

Michał KIEZA

Skojarzenia to bardzo popularny temat. Pojawiają się w różnych miejscach zarówno w informatyce, jak i w matematyce dyskretnej. Przypomnijmy: w grafie nieskierowanym G zbiór krawędzi M nazywamy *skojarzeniem*, jeśli żadne dwie krawędzie z M nie mają wspólnego końca. W tym artykule zajmiemy się skojarzeniami w grafach kubicznych. Graf G nazwiemy *kubicznym*, jeśli każdy wierzchołek G ma stopień dokładnie 3.

Mając dany graf G , przez $V(G)$ i $E(G)$ będziemy oznaczać odpowiednio zbiór wierzchołków i krawędzi G . Ponadto oznaczymy $n = |V(G)|$. Dla wierzchołka v przez $N(v)$ będziemy oznaczać zbiór sąsiadów v ; tę notację rozszerzymy na podzbiory wierzchołków: $N(S) = (\bigcup_{v \in S} N(v)) \setminus S$. Skojarzenie M w grafie G nazwiemy *doskonałym*, jeśli ma ono rozmiar dokładnie $n/2$, czyli każdy wierzchołek G jest końcem jakiejś krawędzi skojarzenia. Na rysunku pokazane są dwa grafy kubiczne: pierwszy z nich ma doskonałe skojarzenie, a drugi nie ma. Czy łatwo jest odróżnić grafy kubiczne z doskonałym skojarzeniem od tych, które takiego nie mają?



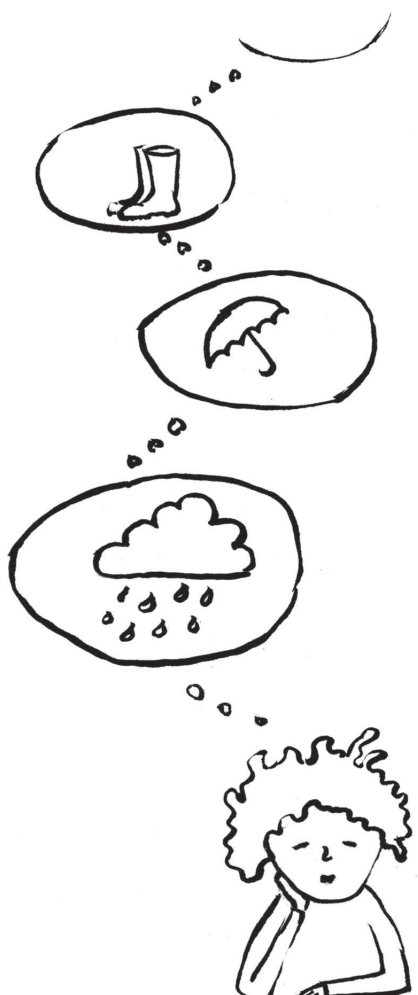
Dwa grafy kubiczne.

By odpowiedzieć na to pytanie, przypomnijmy sobie wpiery twierdzenie Halla. Mamy graf dwudzielny H – dwudzielny, to znaczy, że zbiór wierzchołków $V(H)$ można podzielić na takie dwie części $V_A(H)$ i $V_B(H)$, że wszystkie krawędzie H łączą $V_A(H)$ z $V_B(H)$. Interesuje nas to, czy w tym grafie istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$, czyli takie, że wszystkie wierzchołki ze zbioru $V_A(H)$ są skojarzone (każdy jest końcem pewnej krawędzi skojarzenia). Jeśli istnieje taki zbiór $S \subset V_A(H)$, że $|S| > |N(S)|$, to ewidentnie takie skojarzenie nie istnieje: wierzchołki z S mają za mało sąsiadów, by wszystkie były skojarzone. Twierdzenie Halla orzeka, że powyższy warunek jest decydujący: jeśli dla każdego $S \subset V_A(H)$ mamy $|S| \leq |N(S)|$, to w H istnieje skojarzenie rozmiaru $|V_A(H)|$.

Twierdzenie Halla mówi o istnieniu dużych – kojarzących wszystkie wierzchołki jednej części grafu – skojarzeń w grafach dwudzielnych. A jak to jest dla dowolnych grafów? O tym mówi twierdzenie Tutte. Obierzmy dowolny graf G i zastanówmy się, co może przeszkadzać w tym, by G miał doskonałe skojarzenie. Weźmy dowolny zbiór wierzchołków S i wyrzucmy go z grafu, otrzymując graf $G \setminus S$. Spójrzmy na pewną spójną składową $G \setminus S$: jeśli ma ona nieparzystą liczbę wierzchołków, to w doskonałym skojarzeniu musiałyby istnieć krawędzie łączące wierzchołki z tej spójnej składowej z wierzchołkiem z S . Wobec tego nieparzystych spójnych składowych $G \setminus S$ nie może być więcej niż $|S|$. Twierdzenie Tutte mówi, że powyższy warunek jest wystarczający: jeśli dla każdego zbioru wierzchołków S po wyrzuceniu S w G pozostaje nie więcej niż $|S|$ nieparzystych spójnych składowych, to w G istnieje doskonałe skojarzenie.

Wróćmy teraz do grafów kubicznych. Okazuje się, że tym, co może przeszkadzać, by w grafie kubicznym istniało doskonałe skojarzenie, są mosty (patrz np. dolny graf na rysunku). Krawędź e jest *mostem*, jeśli nie leży w żadnym cyklu, tj. po wyrzuceniu krawędzi e końce e leżą w różnych spójnych składowych. Spróbujemy wykorzystać twierdzenie Tutte, by wykazać następujący lemat: *jeśli graf kubiczny G nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie*. Chcemy użyć twierdzenia Tutte, weźmy więc dowolny podzbiór wierzchołków S i zastanówmy się, ile może być spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków w $G \setminus S$. Weźmy taką spójną składową G_o . Zauważmy, iż łączny stopień wierzchołków G_o to $3 \cdot |V(G_o)|$: jest to liczba nieparzysta, czyli, na mocy lematu o uściskach dłoni, nieparzystą liczbę krawędzi łączy G_o z resztą grafu. Jeśliby łączyła G_o z resztą grafu tylko jedna krawędź, to byłaby mostem: wobec tego istnieją co najmniej trzy krawędzie łączące G_o z resztą grafu. Skoro G_o było spójną składową $G \setminus S$, to te trzy krawędzie łączą G_o z S . Z drugiej strony, łączny stopień wierzchołków z S wynosi $3 \cdot |S|$, w $G \setminus S$ może być zatem co najwyżej $3 \cdot |S|/3 = |S|$ spójnych składowych o nieparzystej liczbie wierzchołków, co kończy dowód lematu.

Wiemy już, że jeśli graf kubiczny nie ma mostów, to ma doskonałe skojarzenie. Ale ile ma tych skojarzeń? Otóż do końca nie wiadomo. W latach 70. ubiegłego wieku László Lovász i Michael Plummer postawili hipotezę, że jest ich wykładniczo wiele: istnieje taka stała $c > 1$, że każdy graf kubiczny bez mostów ma co najmniej c^n doskonałych skojarzeń. Hipotezę tę dość szybko udowodnił Marc Voorhoeve dla grafów kubicznych dwudzielnych. Bardzo niedawno Maria Chudnovsky oraz Paul Seymour udowodnili hipotezę dla grafów planarnych: pokazali oni, że graf kubiczny planarny bez mostów ma co najmniej $2^{n/655978752}$ doskonałych skojarzeń. Z drugiej strony, Esperet, Král, Škoda i Škrekovski pokazali, że w dowolnym grafie kubicznym bez mostów mamy co najmniej $\frac{3}{4}n - 10$ doskonałych skojarzeń i jest nadzieja na to, że niedługo powstanie dowód, że istnieje ich co najmniej $Cn \log n$ dla pewnej stałej C . Jak widać, jeszcze długa droga pozostała do rozstrzygnięcia hipotezy Lovásza–Plummera.



*doktorant Instytutu Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



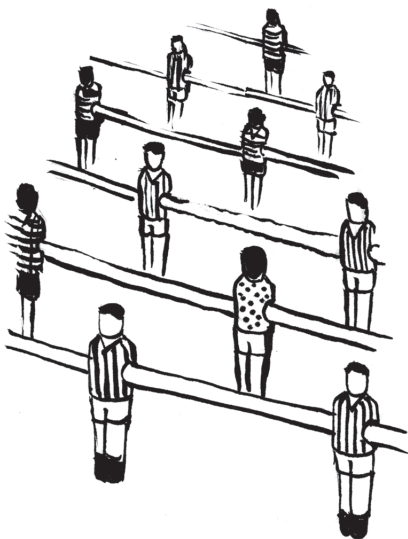
W praktyce zwykle każda para drużyn rozgrywa nie jeden, ale dwa mecze – jest runda rewanżowa.

O rozgrywkach ligowych

W sporcie stosowane są różne systemy prowadzenia rozgrywek. Jednym z nich jest tzw. *system pucharowy*, w którym zwycięzca meczu kwalifikuje się do dalszych gier, przegrany zaś odpada z turnieju. Aby system był bardziej sprawiedliwy, dokonuje się początkowego rozstawienia przeciwników, tak by teoretycznie najsilniejsi spotkali się jak najpóźniej.

Innym systemem, bardzo przydatnym, gdy nie mamy danego rankingu drużyn, jest tzw. *system kołowy*, bardziej znany po prostu jako *rozgrywki ligowe*. W systemie tym mamy n drużyn i każda rozgrywa mecz ze wszystkimi pozostałymi – dzięki temu jest to bardzo sprawiedliwy system. Łącznie mamy $n(n-1)/2$ meczów. Rozgrywki składają się z *kolejek*. Jeśli n jest parzyste, to w każdej kolejce uczestniczą wszystkie drużyny, a jeśli nieparzyste, to jedna drużyna pauzuje. Drugi przypadek możemy sprowadzić do pierwszego, dorzucając fikcyjną drużynę i interpretując pauzowanie jako wygrany z nią mecz. Każda drużyna musi rozegrać $n-1$ meczów, a więc liczba kolejek musi być równa co najmniej tyle. Jeśli spojrzymy na terminarze spotkań różnych lig, to zobaczymy, że składają się one właśnie z tylu kolejek. Ale dlaczego? Dlaczego zawsze udaje się tak ułożyć terminarz, aby nie zdarzyła się sytuacja, w której wypada, że dane dwie drużyny, które już grały ze sobą, teraz znowu miałyby na siebie trafić? Czy jest to możliwe dla dowolnej parzystej liczby drużyn?

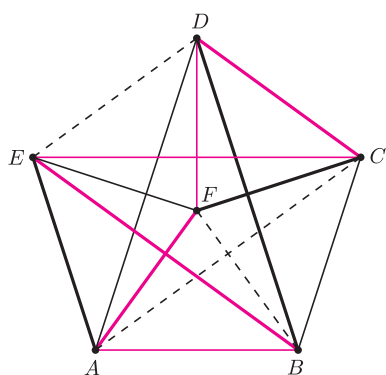
Popatrzmy na przykłady z życia. Czy jesteśmy w stanie znaleźć dla dowolnej (odpowiednio małej) parzystej wartości ligę o takiej liczbie drużyn? Poszukajmy wśród lig piłki nożnej:



- 2 – to dość trywialny przypadek – mecz pomiędzy dwiema drużynami, trudno to nawet nazwać ligą,
- 4 – przykładowo rozgrywki grupowe w finałach Mistrzostw Świata albo Europy, rozgrywki grupowe Ligi Mistrzów; bardzo często łączone z systemem pucharowym (najpierw faza grupowa, potem pucharowa),
- 6 – np. finałowa runda eliminacji do Mistrzostw Świata w strefie obejmującej Amerykę Północną i Środkową (*CONCACAF*), do niedawna taką wielkość miały grupy w rozgrywkach Ligi Europejskiej pod warunkiem, że pauzowanie interpretujemy jako mecz z fikcyjną drużyną (grupy w rzeczywistości liczyły po 5 drużyn),
- 8 – trudno znaleźć ligę o tej liczbie drużyn, ale liga polska w sezonie 2001/02 była podzielona na dwie grupy po 8 drużyn, z których następnie po cztery najlepsze drużyny wchodziły do *grupy mistrzowskiej*, a pozostałe do *grupy spadkowej*,
- 10 – np. liga austriacka, słoweńska, szwajcarska czy grupa eliminacyjna do Mistrzostw Świata w Ameryce Południowej (*CONMEBOL*),
- 12 – np. liga duńska, szkocka, słowacka,
- 14 – tyle drużyn liczyła liga polska w sezonach 2003/04 i 2004/05,
- 16 – typowa wielkość dla większości lig europejskich, np. liga belgijska, bułgarska, czeska, fińska, grecka, norweska, polska, portugalska, rosyjska,
- 18 – np. niemiecka *Bundesliga*, liga holenderska, rumuńska, turecka,
- 20 – typowa obecnie wielkość dla najlepszych lig europejskich, takich jak angielska *Premier League*, francuska *Ligue 1*, hiszpańska *Primera División*, włoska *Serie A*; również liga argentyńska czy brazylijska,
- 24 – np. angielska „druga liga” – *Championship*.

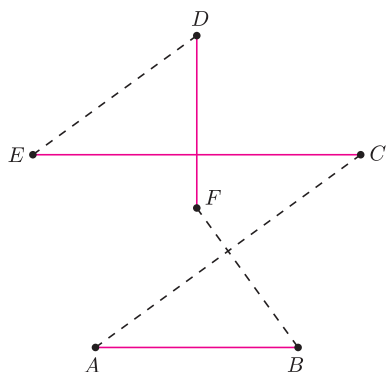
Dla wszystkich wymienionych lig, aby każda drużyna zagrała z każdą, wystarcza $n - 1$ kolejek. Skłania nas to do przypuszczenia, że dla dowolnej liczby parzystej n w lidze liczącej n drużyn zawsze da się tak ułożyć terminarz spotkań, żeby do rozegrania wszystkich meczów wystarczyło $n - 1$ kolejek.

Spróbujmy to przetłumaczyć na nieco inny język: przedstawimy rozgrywki jako graf. Wierzchołkami będą drużyny danej ligi (zakładamy, że liczba wierzchołków n jest parzysta), a krawędź łącząca dwa wierzchołki będzie oznaczała mecz między odpowiednimi drużynami. Każde dwie drużyny mają ze sobą grać, więc rysujemy wszystkie możliwe krawędzie – taki graf to *graf pełny* albo *klika* o n wierzchołkach. Będziemy kolorować krawędzie naszego grafu $n - 1$ kolorami. Kolory oznaczają kolejki, w których odbywają się mecze. Chcemy tak pokolorować krawędzie, aby z każdego wierzchołka wychodziła krawędź każdego koloru i każdym kolorem było pokolorowane $n/2$ krawędzi. Jeśli to się uda, to fachowo mówimy, że *graf pełny (klika) o n wierzchołkach rozkłada się na $n - 1$ doskonałych skojarzeń*.



Rys. 1

Jak wykazać, że dla dowolnej liczby parzystej n można tak pokolorować krawędzie grafu pełnego? Okazuje się, że można to zrobić w bardzo sprytny i przejrzysty sposób. Co więcej, będzie to sposób konstruktywny! Umieścimy mianowicie $n - 1$ drużyn w wierzchołkach $(n - 1)$ -kąta foremnego, a ostatnią w jego środku, tak jak na rysunku 1 (zamiast różnych kolorów są różne rodzaje linii). Teraz sprawa jest dosyć prosta: wybieramy dowolny kolor, malujemy nim dowolną jeszcze niepomalowaną krawędź łączącą drużynę w środku z którąś z drużyn w wierzchołkach $(n - 1)$ -kąta i następnie tym kolorem malujemy wszystkie przekątne $(n - 1)$ -kąta prostopadłe do danej krawędzi. Na rysunku 2 widać dwa początkowe etapy kolorowania. Ponieważ liczba $n - 1$ jest nieparzysta, to każda z wybranych krawędzi łączących środek z wierzchołkiem $(n - 1)$ -kąta jest zawarta w jego osi symetrii, a każda z $\frac{n-2}{2}$ przekątnych łączących wierzchołek z jego obrazem symetrycznym jest prostopadła do tej krawędzi (i nie jest prostopadła do żadnej innej krawędzi łączącej środek z wierzchołkiem $(n - 1)$ -kąta). W każdym kroku kolorujemy więc $\frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}$ krawędzi naszego grafu.



Rys. 2

Gdy byłem małym chłopcem, czyli we wczesnej podstawówce, bardzo interesowałem się piłką nożną i lubiłem tworzyć własne rozgrywki ligowe. Najpierw, oczywiście, trzeba było ułożyć terminarz spotkań. Liga polska liczyła wówczas 18 drużyn, a ja, rzecz jasna, nie znałem opisanego przed chwilą sposobu. A proste przepisanie terminarza ligi polskiej (i podmiana nazw drużyn) nie wchodziło w grę, bo w tamtych czasach zwyczajnie nie bardzo można było ten terminarz znaleźć (chyba że kolekcjonując gazety z całego sezonu – dziś wystarczyłoby kupić *Skarb kibica*, włączyć telegazetę lub wejść do Internetu). Nie byłem więc w stanie ułożyć terminarza dla ligi 18-drużynowej, ale za to wymyśliłem sprytny sposób na ułożenie terminarza dla ligi liczącej 16 drużyn (i tyle liczyły „moje” ligi).

Ułożyć terminarz dla ligi liczącej 4 drużyny jest łatwo – podzielmy więc naszą ligę na cztery grupy po cztery drużyny. Nazwijmy je A, B, C, D. Przez pierwsze trzy kolejki drużyny z poszczególnych grup grają między sobą. Co dalej? Teraz naszą ligę możemy potraktować po prostu jako ligę złożoną z czterech „drużyn” A, B, C, D. Mecz pomiędzy „drużynami” A i B trwa przez cztery kolejki i polega na tym, że każda drużyna z A gra z każdą z B (znowu jest to bardzo łatwe do zrealizowania). Zatem w kolejkach 4–7 mamy mecze A–B, C–D, w kolejkach 8–11 mecze A–C, B–D, a w 12–15 mecze A–D, B–C. I terminarz gotowy.

Na koniec powstaje pytanie: jeśli mamy ułożony terminarz, albo inaczej, kolorowanie grafu, to czy można tak rozmieścić jego wierzchołki, aby to kolorowanie było identyczne z opisaną wyżej konstrukcją? Innymi słowy, czy ten sposób układania jest jedyny z dokładnością do kolejności kolejek i układu drużyn? Może Czytelnik potrafi odpowiedzieć na to pytanie?

Małą Deltę przygotował Michał KIEZA

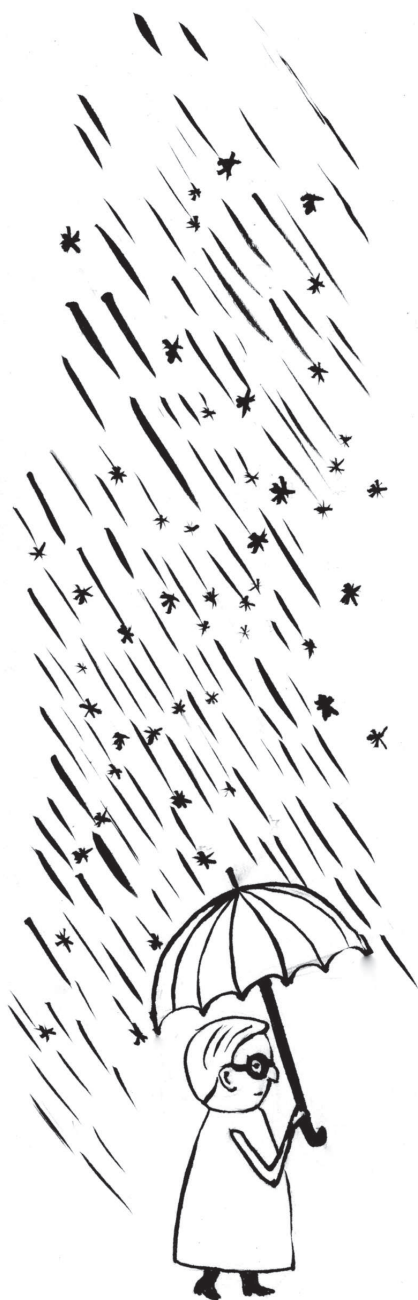
Jak Czytelnik Wnikliwy zapewne zauważy, tą metodą można ułożyć terminarz spotkań dla dowolnej ligi o liczbie drużyn będącej potęgą dwójki.

Pył kosmiczny znajduje się wokół planet, w przestrzeni międzyplanetarnej, międzygwiazdowej oraz międzygalaktycznej. Ziarna pyłu są obiektami o rozmiarach od kilku cząsteczek do kilkudziesięciu centymetrów. Mimo tego, iż są niewielkie, można je pośrednio zaobserwować bez użycia instrumentów optycznych. Obserwując pogodne niebo poza miastem, powinniśmy gołym okiem w ciągu godziny zobaczyć co najmniej trzy meteory. Potocznie nazywane są one *spadającymi gwiazdami*. Co roku zdarzają się okresy, gdy aktywność meteorowa jest dużo wyższa i sięga nawet 100–120 zjawisk na godzinę, a czasem więcej. Ta zwiększona ilość zjawisk związana jest z rojami meteorów, które powstały na skutek utraty materii z powierzchni komet okresowych lub zderzeń między planetoidami.

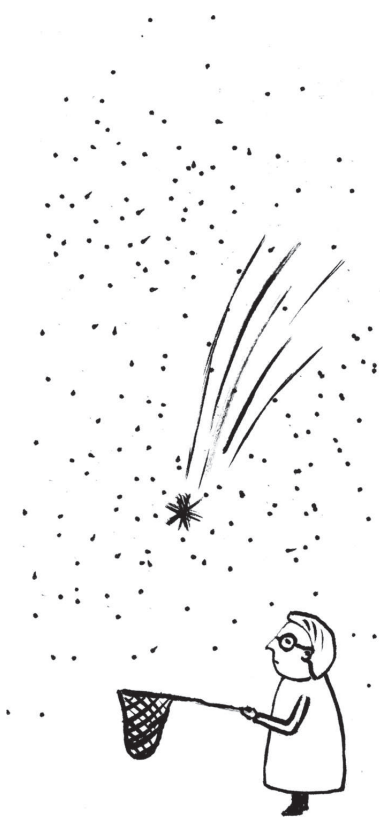
Drobiny – meteoroidy – poruszające się po orbitach podobnych do orbity ciała macierzystego mogą przeciąć orbitę ziemską. Wpadają w atmosferę z prędkościami rzędu kilkudziesięciu kilometrów na sekundę, co powoduje jonizację ich atomów, a także otaczającego je rozrzedzonego powietrza. W tym samym czasie materiał na powierzchni drobiny rozgrzewa się do temperatury rzędu 2000 K i odrywają się od niego jego części składowe – podlega ablacji. Gdy ilość zderzeń między meteoroidem a cząsteczkami powietrza wzrasta, zwiększa się również ilość zjonizowanych atomów wchodzących w skład meteoroidu oraz otaczającego go powietrza. To z kolei powoduje ich świecenie w wyniku rekombinacji ładunku. Większość światła śladu meteorowego pochodzi z linii jednokrotnie zjonizowanych atomów metali wchodzących w skład meteoroidu. Jonizacja otaczającej atmosfery stwarza możliwość odbijania się od śladu meteorowego fal radiowych. Energia kinetyczna wpadającego ciała zmniejsza się w wyniku wspomnianych procesów jonizacji i ablacji. Na wysokości około 110 km nad powierzchnią Ziemi ślad meteorowy jest na tyle jasny, iż może być dostrzeżony bez użycia instrumentów optycznych. Większość śladów kończy się, gdy meteoroid dociera do 80 kilometrów nad Ziemią. To, od jakiej wysokości zaczyna być widoczny meteor, zależy od jego masy, gęstości i prędkości początkowej, jaką miał względem Ziemi.

Zgodnie z prawami Keplera każde ciało znajdujące się w polu grawitacyjnym Słońca porusza się po orbitach eliptycznych, parabolicznych lub hiperbolicznych. Przypadek orbity parabolicznej jest często używany jako pierwsze przybliżenie w wyznaczaniu orbit kometarnych. Orbity eliptyczne są zamknięte, natomiast paraboliczne i hiperboliczne otwarte. Ciała o orbitach otwartych mogą uciec z Układu Słonecznego. Zakładając, że wszystkie obserwowane meteoroidy należą do Układu Słonecznego, wyliczamy ze wzoru na trzecią prędkość kosmiczną, iż ich prędkości heliocentryczne (to jest w układzie współrzędnych związanym ze Słońcem) w pobliżu orbity ziemskiej muszą być mniejsze niż 42 km/s. Ziemia porusza się z prędkością około 30 km/s wokół Słońca, zatem maksymalna prędkość wejściowa meteoroidu wynosi 72 km/s.

Najmniejsze prędkości wejścia osiągają drobiny swobodnie wpadające w ziemską atmosferę, przyciągane przez grawitację ziemską. Ich prędkość wejściowa to druga prędkość kosmiczna, z powierzchni Ziemi równa 11,2 km/s (wynika to z faktu, że druga prędkość kosmiczna to najmniejsza prędkość, jaką trzeba nadać ciału, aby doleciało do nieskończoności, czyli opuściło pole grawitacyjne Ziemi – z zasady zachowania energii mechanicznej wynika, że ciało przyciągane z nieskończoności przez grawitację Ziemi musi uzyskać przy jej powierzchni taką samą prędkość). Przyciąganie ziemskie ma również niewielki wpływ na prędkości meteoroidów. Spośród znanych i aktywnych rojów meteorowych najmniejsze prędkości mają: Bootydy Czerwcowe (18 km/s), Drakonidy (20 km/s), czy α -Kaprikornidy (23 km/s). Najszybsze zjawiska można obserwować dla η -Aquarydów (66 km/s), α -Aurygidów (66 km/s), Orionidów (66 km/s) i Leonidów (71 km/s). Najpowszechniej znane sierpniowe Perseidy produkują zjawiska poruszające się z prędkościami około 59 km/s. Szacując długość śladu meteorowego na 30–60 km, otrzymujemy czas trwania meteorów w przedziale



* doktorant w Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika, PAN, oraz współpracownik stowarzyszenia Pracownia Komet i Meteorów



od 0,5 do 4,0 sekund. Pominęliśmy przy tym efekt projekcji zjawiska wylatującego z danego punktu na niebie i przecinającego sferę niebieską. Efekt ten jest identyczny ze zjawiskiem skrótu perspektywicznego, które można zaobserwować np. dla równoległych szyn kolejowych zdających się zbiegać ku sobie wraz ze wzrostem odległości od obserwatora. Ostatecznie, mierzona prędkość kątowna zjawiska zależy również od wysokości zjawiska nad horyzontem oraz odległości od miejsca, z którego zdaje się wybiegać na niebie, a nazywanego radiantem. W zasadzie obserwator może zarejestrować zjawiska o prędkościach kątowych z przedziału $\omega = 0-41$ stopni/s, przy czym zerową prędkość kątową mają meteory lecące z radiantu wprost na obserwatora (tzw. meteory stacjonarne). Dopiero obserwacje tego samego zjawiska z dwóch odległych miejsc mogą być użyte do wyznaczenia jego prędkości liniowej i trajektorii w atmosferze.

Większość meteoroidów, wpadając w atmosferę, rozgrzewa się, co z kolei powoduje ich fizyczne i chemiczne przemiany, które zamazują informację o ich pochodzeniu. Te najmniejsze o rozmiarach mniejszych niż kilkaset mikrometrów – mikrometeoroidy – spalniają się już w górnych, najrzadszych warstwach atmosfery. Ich składowe nie podlegają sublimacji, opadają powoli na powierzchnię Ziemi w niemal nienaruszonej postaci. Mikrometeoroidy mogą zachować swój pierwotny skład chemiczny i morfologię przez długi czas, jeśli spadną np. w nietopniejący śnieg. W roku 2006 naukowcy prowadzący badania we francusko-włoskiej stacji polarnej CONCORDIA odnaleźli wiele mikrometeoroidów w warstwie śniegu na głębokości 4 metrów. Spośród blisko półtora tysiąca wyselekcjonowano dwa najmniej przetworzone mikrometeoroidy o numerach 19 i 119. Ich badania za pomocą elektronowego mikroskopu transmisyjnego wykazały, iż złożone są one z materii organicznej przetworzonej w niewielkim stopniu. Zawierają wyjątkowo dużo związków węgla, a także nadwyżkę ilości deuteru w stosunku do wodoru (10–30 razy więcej niż na Ziemi). Skład chemiczny drobin świadczy o tym, że ich ciało macierzyste nie zmieniło się od miliardów lat. Są one pod wieloma względami podobne do ziaren pyłu z komety 81P/Wild dostarczonego za pomocą sondy kosmicznej Stardust. Odnalezione mikrometeoroidy mogą być równe wiekiem dyskowi protoplanetarnemu, z którego dopiero miały powstać planety Układu Słonecznego. Natomiast związki organiczne wchodzące w ich skład skłaniają ku hipotezie, iż rezerwuuar materii koniecznej do powstania życia był obecny w chłodnych obszarach młodego Układu Słonecznego już przed 4,5 mld lat.



Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 783. Mała kulka o masie m i ładunku elektrycznym q wisi na sprężynie o stałej sprężystości k . Kulka jest utrzymywana na wysokości h nad ziemią, tak że sprężyna nie jest naciągnięta. Na podłodze, dokładnie pod kulką, znajduje się druga kulka, o takiej samej masie m i przeciwnym ładunku $-q$. W pewnej chwili puszczamy górną kulkę. Dla jakiego minimalnego ładunku q dolna kulka zostanie poderwana do góry? Stała sprężystości sprężyny i masa kulki spełniają warunek $kh \gg mg$.
Rozwiązanie na str. 5

F 784. Kulka o masie m i ładunku elektrycznym q znajduje się pod unieruchomionym ciałem o ładunku $-q$ w odległości d od niego i na wysokości r nad ziemią. Jaką minimalną prędkość skierowaną pionowo w dół należy nadać kulce, aby upadła na ziemię? Początkowa wysokość r jest duża w porównaniu z d , ruch odbywa się w jednorodnym polu ciężenia Ziemi.
Rozwiązanie na str. 7

Redaguje Przemysław MAZUR

M 1306. Na boku BC trójkąta ABC wybrano punkt P . Punkty Q i R są środkami okręgów wpisanych w trójkąty APB i APC . Punkt S jest punktem styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC do boku BC . Wykazać, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.
Rozwiązanie na str. 24

M 1307. Udowodnić, że spośród dowolnych $n + 1$ liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, 2n\}$ można wybrać dwie, tak żeby jedna była dzielnikiem drugiej.
Rozwiązanie na str. 6

M 1308. Dany jest wielomian $f(x) = x^3 - 3x$. Definiujemy indukcyjnie

$$f_1(x) = f(x), \quad f_{n+1}(x) = f(f_n(x)).$$

Dowieść, że wielomian f_n ma 3^n pierwiastków rzeczywistych.
Rozwiązanie na str. 9

Badamy ciała nieszttywne w ruchu obrotowym

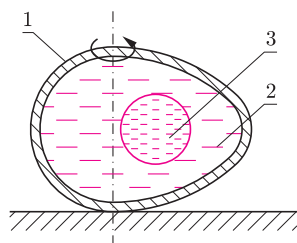
Część I: Ciecze o małych lepkościach



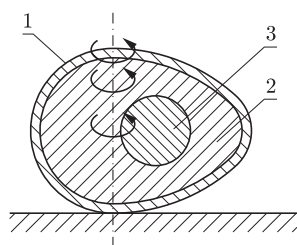
Stanisław BEDNAREK

W poprzednich odcinkach tego kącika zajmowaliśmy się badaniem ruchu obrotowego bryły sztywnej. Po przeprowadzonych doświadczeniach można postawić wynikające w naturalny sposób pytanie, jak będą zachowywać się w ruchu obrotowym ciała nieszttywne, np. ciecze lub proszki? W dzisiejszych doświadczeniach poświęcimy nieco uwagi niektórym aspektom ruchu obrotowego cieczy o małych lepkościach, a później zajmiemy się cieczami o dużych lepkościach i proszkami.

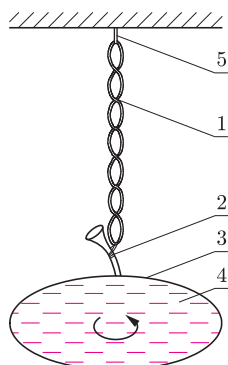
Do dzisiejszych doświadczeń potrzebne będą: dwa surowe jajka, balonik, woda, olej, denaturat, mąka, nitka, gumka aptekarska, szklana butelka z zakrętką, silikon do uszczelnień, trzy plastikowe butelki od napojów o pojemności 1,5 l, w tym jedna z zakrętką, kawałek rurki do nasunięcia na szyjki tych butelek, naturalny lub gumowy korek, pozwalający zamknąć plastikową butelkę, garnek oraz dostęp do gładkiej powierzchni stołu oraz kuchni gazowej lub lodówki z zamrażalnikiem.



Rys. 1. Ruch surowego jajka;
1 – skorupka, 2 – białko, 3 – żółtko.



Rys. 2. Ruch ugotowanego jajka;
oznaczenia takie same jak na rysunku 1.

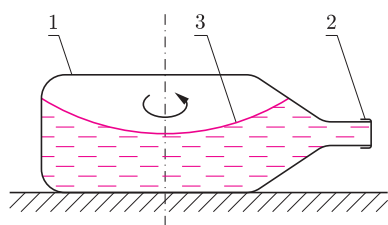


Rys. 3. Obracający się balonik;
1 – gumka aptekarska, 2 – nitka,
3 – balonik, 4 – woda, 5 – haczyk.

Do pierwszego doświadczenia wykorzystamy dwa jajka. Jedno surowe jajko kładziemy na gładkiej powierzchni stołu i próbujemy wprowadzić w ruch obrotowy przez pokręcenie palcami (rys. 1). Zauważamy, że jajko nie chce się łatwo obracać – zatrzymuje się zaraz po zakręceniu. Co jest przyczyną zaobserwowanego faktu? Jak wiadomo, wewnątrz surowego jajka znajduje się płynne białko, w którym pływa również płynne żółtko otoczone cienką błoną. Białko może oddziaływać ze skorupką jedynie za pośrednictwem sił lepkości cieczy, które nie są zbyt duże. Pokręcając jajko, chwytny za skorupkę i praktycznie tylko ją wprowadzamy w ruch obrotowy. Płynne wnętrze jajka pozostaje nieruchome i siły lepkości, czyli tarcia wewnętrznego, szybko wyhamowują lekką skorupkę, w której zgromadzona jest niewielka energia kinetyczna ruchu obrotowego. Do wyhamowania jajka przyczyniają się ponadto opór powietrza i tarcie o stół.

Drugie jajko włóżmy do garnka z wodą i ugotujmy na twardo, czyli przez około 10 min. Po wyjęciu i ostudzeniu jajka spróbujemy wprowadzić je w ruch obrotowy tak samo, jak jajko surowe (rys. 2). Okazuje się, że ugotowane jajko obraca się bez większego trudu przez kilkadziesiąt sekund. W tym przypadku w ruch obrotowy wprowadziliśmy masę całego jajka. Nie jest ono wyhamowywane od wewnątrz i ma wielokrotnie większą energię kinetyczną, pozwalającą znacznie dłużej wykonywać ruch. Ugotowane i surowe jajko o takiej samej wielkości mogą nam posłużyć do efektownej sztuczki, zadziwiającej kolegów lub znajomych. Wprowadzamy je jednocześnie w taki sam sposób w ruch obrotowy. Dwa identycznie wyglądające jajka zachowują się zupełnie inaczej. Zamiast gotować jajko, możemy włożyć je na kilka godzin do zamrażalnika lodówki, co spowoduje skrzepnięcie jego płynnej zawartości. Efekt będzie taki sam.

Żeby przeprowadzić drugie doświadczenie, do balonika nalewamy wody, aby przyjął on kształt zbliżony do kuli o średnicy około 6 cm. Kształt ten zależy od ilości wlanej wody i sprężystości balonika. Wlot balonika szczelnie zawiązujemy nitką i przywiązujemy do niego gumkę aptekarską (rys. 3). Chwytny za przeciwległy koniec gumki, pozwalając balonikowi swobodnie zwisać. Gumkę możemy zawiesić na jakimś haczyku lub trzymać. Drugą ręką obejmujemy balonik i kilkadziesiąt razy skręcamy gumkę, gromadząc w niej przez to energię potencjalną sprężystości. Pozwalamy balonikowi ze skręconą gumką nadal zwisać nieruchomo, podtrzymując go lekko od dołu palcami. Widzimy, że balonik ma kształt prawie kulisty. Następnie przestajemy podtrzymywać balonik. Gumka zaczyna się rozkręcać, a jej energia potencjalna sprężystości zamienia się na energię kinetyczną ruchu obrotowego całego układu. Zwróćmy uwagę, co dzieje się z balonikiem.



Rys. 4. Woda w obracającej się butelce;
1 – butelka szklana, 2 – zakrętka,
3 – powierzchnia wody.



(a)



(b)

Fot. 1. Przyrządy do badania kształtu powierzchni wody w ruchu obrotowym, zamkniętej w naczyniu: (a) cylindrycznym, (b) kulistym. Oba przyrządy znajdują się w Ogrodzie Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie.

Wraz ze wzrostem szybkości obrotów balonik zmienia swój kształt z kulistego na coraz bardziej zbliżony do dysku. Przyczyną tego efektu są siły odśrodkowe, działające na zawartą w baloniku wodę oraz jego powłokę. Siły te zwrócone są na zewnątrz wzdłuż promieni, a ich wartości rosną proporcjonalnie do kwadratu prędkości. Pod działaniem tych sił balonik jest rozciągany i ulega spłaszczeniu. Wiemy zapewne, że również Ziemia i niektóre ciała niebieskie mają lekko spłaszczony kształt. Jest to spowodowane tym, że są one nieszttywne i wykonują ruch obrotowy, dla przykładu, wewnątrz Ziemi znajdują się stopione skały, a jej skorupa może się odkształcać.

W trzecim doświadczeniu wykorzystamy butelkę szklaną, do której nalewamy wody, żeby wypełnić nią około 0,7 objętości. Butelkę szczelnie zamykamy zakrętką i kładziemy na gładkiej powierzchni stołu, rysunek 4. Jaki kształt ma powierzchnia wody w butelce? Następnie leżącą butelkę chwytamy palcami w połowie jej długości i wprawiamy w ruch obrotowy wokół osi pionowej. Butelka obraca się przez kilkadziesiąt sekund. Jaki kształt przyjmuje powierzchnia wody podczas obrotu? Widzimy, że jest ona wtedy wklęsła. Dokładniej, przyjmuje kształt paraboloidy obrotowej, której oś symetrii pokrywa się z osią obrotu.

Dzieje się tak dlatego, że na cząsteczki wody, obracającej się wraz z butelką, działają dwie siły – siła ciężkości skierowana pionowo w dół i wspomniane wcześniej siły odśrodkowe. Wypadkowa tych sił skierowana jest ukośnie na zewnątrz, a powierzchnia wody w stanie równowagi ustawia się prostopadłe do tej wypadkowej. Rozważania ilościowe, uwzględniające wprost proporcjonalną zależność wartości siły odśrodkowej od promienia obrotu i kwadratu liczby obrotów na sekundę, wykazują, że kształt powierzchni swobodnej jest właśnie paraboloidą. Do przeprowadzenia tego doświadczenia konieczna jest butelka szklana. Butelka plastikowa jest za lekka, odkształca się w miejscu styku ze stołem oraz wykazuje zbyt duże tarcie. Przez to jej ruch jest szybko hamowany i siła odśrodkowa jest zbyt mała, byśmy zdążyli zauważyć zmiany kształtu powierzchni wody.

Warto dodać, że wypolerowana, wklęsła strona paraboloidy obrotowej stanowi idealne zwierciadło skupiające, pozbawione aberracji sferycznej. Oznacza to, iż wszystkie promienie świetlne równoległe do jego osi podłużnej spotykają się w jednym punkcie, zwanym ogniskiem. Były próby wytworzenia takich zwierciadeł z obracającej się rtęci, zamkniętej w cylindrycznym naczyniu wprawionym w ruch obrotowy. Powierzchnia czystej rtęci jest błyszcząca i bardzo dobrze odbija światło. Ponieważ krzywizna powierzchni wzrasta wraz ze zwiększeniem liczby obrotów na sekundę, to położenie ogniska rtęciowego zwierciadła można było płynnie regulować. Zwierciadła takie o średnicy dochodzącej nawet do kilku metrów próbowano zastosować w dużych teleskopach.

W następnym doświadczeniu przymocowujemy do korka plastikowej butelki gumkę aptekarską, tak by butelka, zwisając, mogła się swobodnie obracać. Do butelki nalewamy wody, wypełniając ją około 0,4 objętości, i zamykamy butelkę zakrętką z gumką. Sprawdzamy, jaki kształt ma górna powierzchnia wody w nieruchomej butelce. Wprawiamy butelkę w ruch obrotowy tak samo, jak balonik w poprzednim doświadczeniu. Zauważamy, że powierzchnia wody, podobnie jak w przypadku butelki obracającej się na stole, przyjmuje kształt paraboloidy obrotowej, której gałęzie wznoszą się ku górze ze zwiększającą się szybkością obrotu. Zależność kształtu powierzchni od szybkości obrotu możemy zbadać dokładniej, nagrywając krótki film cyfrowy z przebiegiem eksperymentu, np. za pomocą telefonu komórkowego lub aparatu fotograficznego. Interesujące eksperymenty, ukazujące kształt powierzchni cieczy zamkniętej w różnych naczyniach i wprawionej ręcznie w ruch obrotowy, można również przeprowadzić w Ogrodzie Doświadczeń im. Stanisława Lema w Krakowie (fot. 1) i w Eksperymentarium w łódzkiej Manufakturze. Warto więc odwiedzić te miejsca podczas szkolnej wycieczki.

Opisy innych ciekawych eksperymentów dotyczących ruchu obrotowego ciał nieszttywnych można znaleźć na stronie internetowej *Delty*.

Co się kryje w morzach?

Co łączy mszywioly, lek na białaczkę, fluoryzujące białko, Nagrodę Nobla z chemii w 2008 roku, obróbkę spożywczą kawioru i mleka? Wszystkie te zjawiska i produkty wynikają z działań człowieka poznającego morza i oceany.

W Sopocie, 400 m od dzisiejszej linii brzegowej, wznosi się skarpa porośnięta lasem. Tu właśnie archeolodzy odkryli pozostałości drewniano-ziemnej warowni sprzed 1200 lat. Wśród wykopalisk znaleźli łodzie oraz pozostałości dorszy, śledzi, jesiotrów. Sądzą, że w tamtym czasie morze dochodziło aż do skarpy i stamtąd wypływały łodzie rybackie.

To miejsce zawsze nasuwa mi obraz człowieka w skórach, który przedarł się przez gęsty las i zarośla i nagle zobaczył... Ten wymaglinowany obraz głęboko mnie wzrusza. Człowiek w skórach nie miał mamy (jak ja), która mu obiecała, że zobaczy morze. Jak bardzo musiał być zdumiony, początkowo przerażony!

Co wtedy pomyślał i co zrobił?

Zbudował łódź i wyruszył na tę wodę. Rozpoczął trwającą do dziś eksplorację.

W 2010 roku, po dziesięciu latach badań 2700 naukowców z 80 krajów, ogłoszono podsumowanie wiedzy o morskim życiu. Był to chyba największy międzynarodowy projekt, złożyło się na niego ponad 540 ekspedycji, 9000 dni spędzonych na morzach oraz 2600 naukowych publikacji.

Morza i oceany zajmują 70% powierzchni Ziemi, żyją w nich organizmy ze wszystkich grup taksonomicznych. Jeszcze teraz można dokonać znaczących odkryć: ekosystem oparty na chemosyntezie w pobliżu głębinowych źródeł hydrotermalnych znaleziono w 1977 roku, a z tego, że mała cyanobakteria, *Prochlorococcus*, jest liderem fotosyntezy na Ziemi, zdaliśmy sobie sprawę tylko 30 lat temu. Opatentowano już wiele genów i ich produktów, wytwarzanych przez organizmy morskie, do zastosowań medycznych (55%), analitycznych i biotechnologicznych (29%), hodowlanych (26%), spożywczych (17%), kosmetycznych (7%). Szansa znalezienia aktywnych chemicznie substancji z organizmów morskich jest 500 razy wyższa niż z gatunków naziemnych.

Wiele patentów na geny i ich produkty wiąże się ze specyficznymi cechami organizmów morskich: zawartością nienasyconych kwasów tłuszczowych, zawartością fluoryzujących białek (Nagroda Nobla 2008). Ważne patenty wynikają z badań morskich organizmów zamieszkujących ekstremalne warunki: gorące podwodne źródła (być może tam zaczęło się życie) albo regiony polarne. W takich ekstremofilnych mikroorganizmach poszukuje się białek enzymatycznych działających skutecznie w niskiej lub wysokiej temperaturze, pod wysokim ciśnieniem. Z tych organizmów wydziela się geny enzymów stosowanych w detergentach, enzymy do obróbki kawioru czy krowiego mleka.

W 2010 roku prowadzono próby kliniczne II fazy z lekiem przeciw rakowi piersi, wyprodukowanym na wzór substancji wydzielonej z gąbek *Halichondria okadzi*. Obiecujący lek przeciwnowotworowy znaleziono w mszywiolach, zwierzętach osiadłych na powierzchni doków, dnach statków i obudowach portów. Naskrobane 12 ton takich mszywiolów wystarczyłoby na światowe potrzeby przeprowadzania prób klinicznych.

Wraz z rozszerzaniem zakresu wiedzy o morzach pojawił się problem zrównowżenia eksploatacji zasobów morskich. Zaczął się od regulacji połowów ryb i morskich ssaków, wsparty obserwacją, że populacje ryb wzrosły w czasie II wojny światowej na obszarach wyłączonych z połowów w wyniku istnienia pól minowych. Od tamtych dni datuje się także ustanowienie obszarów chronionych, które dziś zajmują 0,7% powierzchni mórz i oceanów. Rozwiązania utrudnia często brak jasnego określenia zakresu wód terytorialnych, a co gorsza – brak globalnych ustaleń co do możliwości zagospodarowywania zasobów wód ogólnie dostępnych. Niech komentarzem będzie informacja, że pod lodem Oceanu Północnego znajduje się prawdopodobnie 22% światowych zasobów ropy i gazu, a ścierają się tu interesy Rosji, Kanady, USA i UE.

To jeszcze jedna dziedzina, w której wszyscy ludzie muszą się porozumieć. Muszą, bo wody oceaniczne odegrają, być może, decydującą rolę w rozwoju globu, ale też kuszą do istotnych ingerencji człowieka, które w wielkiej skali mogą skończyć się źle.

Magdalena FIKUS

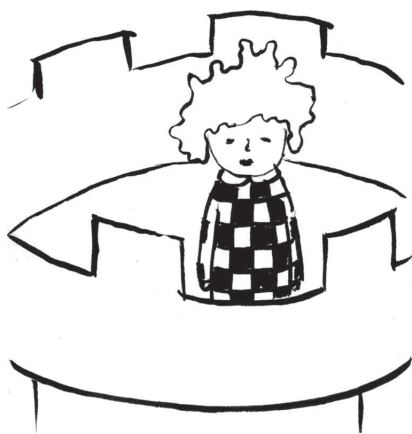
Informatyczny kącik olimpijski (39): Wieże

W tym kąciku zajmiemy się rozwiązaniem zadania pochodzącego z jednej z finałowych rund konkursu TopCoder Open 2010, o nazwie *Shrooks on the Board*.

Jesteśmy proszeni o obliczenie reszty z dzielenia liczby poprawnych ustawień wież na planszy przez zadaną liczbę pierwszą P . Plansza jest prostokątna, ma H wierszy oraz W kolumn. W tym zadaniu wieże są nietypowe: atakują jedynie pola znajdujące się w tym samym wierszu i do tego odległe o co najwyżej K pól. Poprawne ustawienie to takie, które zawiera co najmniej jedną wieżę i żadna wieża nie atakuje innej.

Zauważmy na początek, że istnieje dokładnie jedno ustawienie, które nie zawiera wież. Będziemy uznawali je za poprawne, a na końcu wynik zmniejszymy o 1. Możemy więc ustawić dowolną liczbę wież w dowolny sposób, byle się nie atakowały. Od tej pory problemy dla poszczególnych wierszy są niezależne. Łatwo zauważyć, że jeżeli wieże w jednym wierszu można ustawić na X_W sposobów, to ostatecznym wynikiem będzie reszta z dzielenia liczby $(X_W)^H - 1$ przez P . Do obliczenia tejże reszty wystarczy znać resztę z dzielenia liczby X_W przez P ; koszt czasowy końcowego potęgowania to $O(\log H)$.

Cały problem polega więc na wyznaczeniu wartości X_W . Spróbujmy najpierw wyprowadzić wzór rekurencyjny na X_n . Mamy następujące możliwości: albo pierwsze pole jest puste, a dalsza część planszy jest jakoś zapełniona wieżami, co daje X_{n-1} poprawnych ustawień, albo też na pierwszym polu stoi wieża, kolejne K pól jest pustych, a pozostałe są jakoś zapełnione, co daje dodatkowe X_{n-K-1} ustawień. Ostatecznie mamy, że $X_n = X_{n-1} + X_{n-K-1}$. Pozostaje zaznaczyć, iż dla $n \leq 0$ przyjmujemy $X_n = 1$. Daje to prosty algorytm obliczający X_W w czasie $O(W)$.



Inne rozwiązanie otrzymujemy, stosując standardową metodę obliczania wyrazów ciągu zadanego wzorem rekurencyjnym za pomocą szybkiego potęgowania macierzy, patrz artykuł *Macierze oczami informatyka* w *Delcie* 7/2009. Przypomnijmy tylko, że w metodzie tej przedstawiamy taki oto wektor

$$\begin{pmatrix} X_n \\ X_{n-1} \\ \vdots \\ X_{n-K} \end{pmatrix}$$

jako iloczyn pewnej macierzy A rozmiaru $(K+1) \times (K+1)$ i analogicznego wektora zapisanego dla $n-1$. Wówczas zadanie sprowadza się do obliczenia macierzy A^W , co możemy wykonać w czasie $O(K^3 \log W)$.

Spróbujmy teraz podejść do problemu od innej strony. Pokażemy, że sposobów ustawienia ℓ wież w wierszu długości W jest tyle samo, co wyborów ℓ elementów spośród $W - (\ell - 1) \cdot K$ elementów. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że wieża zajmuje swoje pole oraz K pól na prawo od niego. W takim razie możemy skonstruować bijekcję między ustawieniami wież a wyborami elementów. Mając dane ustawienie wież, po prostu usuwamy K pól na prawo od każdej wieży poza ostatnią i otrzymujemy wybór ℓ pól spośród $W - (\ell - 1)K$ pól. Odwrotnie, mając dany pewien wybór ℓ elementów spośród $W - (\ell - 1)K$ elementów, ustawiamy wieże w polach odpowiadających tym elementom i po każdej (poza ostatnią) dokładamy dodatkowo K wolnych pól.

Żądanych ustawień wież jest zatem $\binom{W - \ell K + K}{\ell}$. Oczywiście, musi być $W - \ell K + K \geq \ell$, czyli

$$\ell \leq \frac{W + K}{K + 1}.$$

Ostatecznie:

$$X_W = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{W+K}{K+1} \rfloor} \binom{W - \ell K + K}{\ell}.$$

Aby obliczyć resztę z dzielenia X_W przez P , wystarczy umieć szybko obliczać reszty z dzielenia symboli Newtona przez P . W tym celu korzystamy z twierdzenia Lucasa, które orzeka, że jeśli P jest liczbą pierwszą i $0 \leq b, d < P$, to $\binom{aP+b}{cP+d}$ daje taką samą resztę z dzielenia przez P co $\binom{a}{c} \binom{b}{d}$. Zauważmy teraz, że zarówno reszty z dzielenia liczb $0!, 1!, \dots, (P-1)!$ przez P , jak i ich odwrotności modulo P , możemy obliczyć w czasie $O(P)$ – te drugie według wzorów

$$\text{odwr}(k!) = (k+1) \cdot \text{odwr}((k+1)!),$$

$$\text{odwr}((P-1)!) = -1.$$

Wówczas resztę z dzielenia $\binom{b}{d}$ przez P obliczamy w czasie stałym, natomiast $\binom{a}{c}$ ponownie zapisujemy w postaci $\frac{a'P+b'}{c'P+d'}$ i zaczynamy od początku. W ten sposób symbol Newtona $\binom{n}{k}$ obliczamy w czasie $O(\log_P n)$. Możemy więc obliczyć X_W , wykonując $O(\frac{W}{K} \log_P(W+K) + P)$ operacji. Można śmiało powiedzieć, że jest to $O(\frac{W}{K} \log W + P)$ operacji, gdyż $P \geq 2$, a zadanie jest interesujące tylko dla $K \leq W$.

Żadne z powyższych rozwiązań nie jest jeszcze satysfakcjonujące. Aby uzyskać lepszy wynik, połączymy ostatnie dwa rozwiązania. Jeśli $K^4 \leq W$, to uruchamiamy rozwiązanie z mnożeniem macierzy, a w przeciwnym przypadku rozwiązanie przez symbole Newtona. Ostatecznie, całe zadanie rozwiązujemy w czasie $O(W^{\frac{3}{4}} \log W + \log H + P)$ przy zużyciu pamięci rzędu $O(P + \sqrt{W})$.

Tomasz KULCZYŃSKI

90 lat fizyki na Hożej



Budynek przy Hożej 69 w latach międzywojennych.

Hoża 69 lub po prostu Hoża to synonim ośrodka fizyki Uniwersytetu Warszawskiego. Budowę rozpoczęto w roku 1913, ale wojna ją przerwała. W roku 1919, po studiach i pracy naukowej w Liège i Heidelbergu, wraca do Polski trzydziestosześcioletni Stefan Pieńkowski, aby objąć katedrę fizyki doświadczalnej odradzającego się Uniwersytetu Warszawskiego. Na Hożej zastaje niewykończone mury. Z wrodzoną energią i determinacją organizuje środki pozwalające na doprowadzenie do otwarcia Zakładu Fizycznego UW już po piętnastu miesiącach, czyli na początku roku 1921. Profesor Pieńkowski pozostaje *spiritus movens* ośrodka do końca swojego aktywnego życia (1953).

To głównie dzięki niemu Hoża w krótkim czasie stała się jednym z najlepszych ośrodków fizyki doświadczalnej w Europie. Kluczowe okazało się mądre inwestowanie w młodą kadrę naukową. Intencją Stefana Pieńkowskiego było rozwijanie pełnego wachlarza badań podstawowych. Najzdolniejszych uczniów wysyłał do zagranicznych ośrodków, żeby po powrocie mogli prowadzić badania na nowych kierunkach. Np. Andrzej Sołtan pojechał do Pasadeny, a Leonard Sosnowski do Cambridge. Po II wojnie światowej pierwszy otrzymał zadanie organizacji Instytutu Badań Jądrowych, a drugi został pierwszym faktycznym dyrektorem Instytutu Fizyki PAN (bo wyznaczony do tej funkcji Pieńkowski już nie zdążył jej objąć). Choć decyzje o utworzeniu nowych instytucji były polityczne, to oddawały one stale rosnący potencjał naukowy Hożej.

Sama II wojna światowa przerwała rozwój ośrodka. Wyposażenie zostało zrabowane. Pieńkowski przystąpił do organizowania tajnego Uniwersytetu, a na Hożej utworzył Zakład Pomiarów Fizycznych, który nie dotrwał do końca wojny. Sam budynek przetrwał, ale został zdewastowany. Po wojnie Pieńkowski, już jako rektor Uniwersytetu Warszawskiego, doprowadził do reaktywacji tak Uniwersytetu, jak i Hożej.

Rozkwit fizyki teoretycznej na Hożej rozpoczął się wraz z powrotem z Kanady profesora Leopolda Infelda w 1950 roku. Podobnie jak Pieńkowski miał on dar do wyszukiwania młodych utalentowanych naukowców, których rozsyłał po świecie, aby, po powrocie, rozwijali najgorętsze kierunki fizyki teoretycznej w Warszawie. To podejście, zarówno w teorii, jak i w praktyce, jest kontynuowane. Dzięki niemu Hoża pozostaje jednym z liczących się ośrodków fizyki, a badania koordynuje już chyba piąte pokolenie profesorów.

Hoża jest również kolebką Internetu w Polsce. Pierwsza internetowa transmisja została przeprowadzona 20 lat temu właśnie stąd, a pierwsza polska strona domowa znajdowała się na naszych serwerach. Od 1997 roku Hoża jest także jednym z najaktywniejszych i najefektywniejszych uczestników Warszawskiego Festiwalu Nauki. Ostatnie lata to także coraz lepsze wykorzystywanie nowych środków finansowania. Na płocie terenu przy Hożej 69 powoli zaczyna brakować miejsca na tablice informacyjne realizowanych tu projektów.

Hoża wielokrotnie się rozbudowywała, ale zawsze było tam za ciasno. Pączkujące inicjatywy z czasem znajdowały sobie własne miejsca, ale wiele z nich, w jakiejś części, pozostało na Hożej na zasadzie symbiozy. Przykładem może być Instytut Problemów Jądrowych. Jego część, od ponad pół wieku (na początku jako część IBJ), mieści się – prowizorycznie – na terenie przy Hożej 69. Być może mijająca właśnie okrągła rocznica będzie ostatnią obchodzoną w tym historycznym miejscu. Na Kampusie Ochota budują się już nowe budynki.

Co się stanie z terenem przy Hożej 69? Nie wiadomo. Hoża to jednak coś więcej niż adres czy budynek. To hasło elektryzujące pokolenia wychowanych na Hożej fizyków.

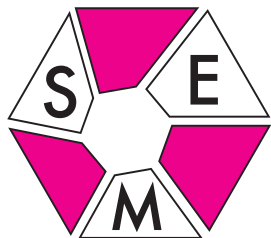
Piotr ZALEWSKI

Korzystałem głównie z materiałów dostępnych poprzez stronę www.fuw.edu.pl

W szczególności z artykułu A.K. Wróblewskiego *Zarys dziejów Hożej* opublikowanego w *Postępkach Fizyki* 45(1994)459–483.



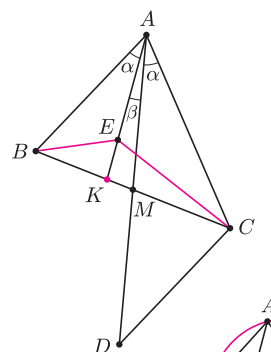
Sala Duża Doświadczalna. Przy katedrze Stefan Pieńkowski.



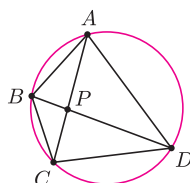
W roku szkolnym 2010/2011 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej jest organizatorem LXII edycji Olimpiady Matematycznej. Od września do grudnia 2010 roku uczestnicy Olimpiady Matematycznej zmagali się z dwunastoma zadaniami domowymi pierwszego etapu zawodów. Do jedenastu Komitetów Okręgowych OM w całym kraju przysłano do oceny prace 1557 uczniów. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 605 uczestników. Omówimy jedno z zadań pierwszego etapu LXII OM.

Zadanie 8. Punkt M jest środkiem boku BC trójkąta ostrokątnego ABC . Punkt K leży na boku BC i spełnia warunek $\sphericalangle BAM = \sphericalangle KAC$. Na odcinku AK wybrano taki punkt E , że $\sphericalangle BEK = \sphericalangle BAC$. Dowieść, że $\sphericalangle KEC = \sphericalangle BAC$.

Rozwiązanie. Załóżmy, że $AB < AC$. Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle BAK$ oraz $\beta = \sphericalangle KAM$. Niech D będzie takim punktem, że czworokąt $ABDC$ jest równoległobokiem (rys. 1). Z założenia $\sphericalangle BEK = 2\alpha + \beta$, więc $\sphericalangle EBA = \alpha + \beta$. Oznacza to, że $\triangle EBA \sim \triangle CDA$ i $\frac{AE}{AC} = \frac{EB}{CD} = \frac{EB}{AB}$. Ponadto $\sphericalangle EBA = \alpha + \beta = \sphericalangle EAC$, co oznacza, że $\triangle EBA \sim \triangle EAC$. Stąd $\sphericalangle ACE = \alpha$ i $\sphericalangle KEC = \sphericalangle EAC + \sphericalangle ACE = 2\alpha + \beta$, co należało wykazać. Zauważamy jeszcze, że gdy $AB \geq AC$, rozumowanie jest analogiczne.



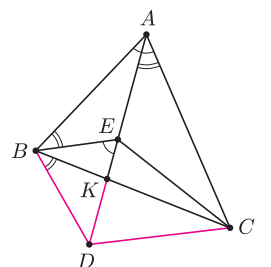
Rys. 1



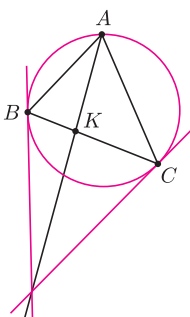
Rys. 2

Z treści rozważanego zadania wynika, że prosta AK jest symedianą w $\triangle ABC$. Oznacza to, że prosta AK jest obrazem środkowej AM w symetrii osiowej względem dwusiecznej kąta $\sphericalangle BAC$. Przedstawimy poniżej dwa inne rozwiązania zadania 8 wykorzystujące własności symedian. Rozwiązania te nie są prostsze niż rozwiązanie już zaprezentowane, korzystają jednak z ciekawych faktów.

Fakt 1. W czworokącie $ABCD$ wpisanym w okrąg przekątne przecinają się w punkcie P . Jeżeli AP jest symedianą w $\triangle ABD$, to CP jest symedianą w $\triangle BCD$, BP jest symedianą w $\triangle ABC$ oraz DP jest symedianą w $\triangle ADC$ (rys. 2).



Rys. 3

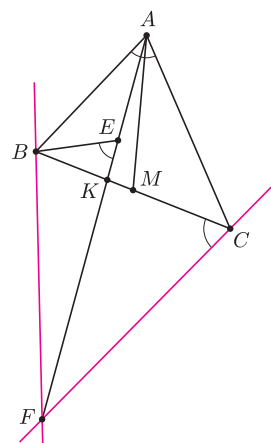


Rys. 4

Rozwiązanie zadania 8 oparte na fakcie 1. Niech D będzie punktem przecięcia prostej AK z okręgiem opisanym na $\triangle ABC$ różnym od punktu A (rys. 3). Wówczas $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Ponadto z założenia $\sphericalangle ABE = \sphericalangle BEK - \sphericalangle BAE = \sphericalangle BAC - \sphericalangle BAE = \sphericalangle CAD$. Z faktu 1, BK jest symedianą w $\triangle ABD$. Równość $\sphericalangle KBD = \sphericalangle EBA$ oznacza, że BE jest środkową w $\triangle DBA$. Więc CE jest środkową w $\triangle ACD$ i $\sphericalangle ACE = \sphericalangle KCD$. Ponadto $\sphericalangle BCD = \sphericalangle BAD$ jako kąty wpisane oparte na tym samym łuku. Ostatecznie $\sphericalangle KEC = \sphericalangle ECA + \sphericalangle EAC = \sphericalangle CAD + \sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC$.

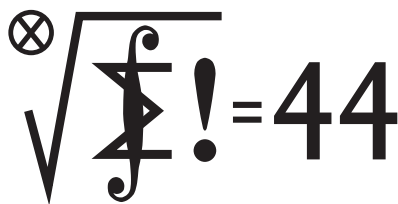
Fakt 2. Jeżeli AK jest symedianą w $\triangle ABC$, to styczne do okręgu opisanego na $\triangle ABC$ w punktach B i C oraz prosta AK są współpękowe (rys. 4).

Rozwiązanie zadania 8 oparte na fakcie 2. Niech styczne do okręgu opisanego na $\triangle ABC$ w punktach B i C przecinają się w punkcie F (rys. 5). Z faktu 2 prosta AK , jako symediana w $\triangle ABC$, przechodzi przez F . Mamy zatem $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BAC$ z twierdzenia o kącie pomiędzy styczną i cięciwą. Z założenia $\sphericalangle BAK = \sphericalangle BEF$, więc punkty B, E, C i F leżą na jednym okręgu. Z równości $BF = FC$ wynika, że $\sphericalangle BEF = \sphericalangle FEC$, co jest tezą zadania.



Rys. 5

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2011

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie <http://www.mimuw.edu.pl/delta/regulamin.html>

Zadania z matematyki nr 617, 618

Redaguje Marcin E. KUCZMA

617. Znaleźć wszystkie funkcje F , określone na zbiorze wszystkich liczb całkowitych dodatnich, o wartościach rzeczywistych, spełniające równanie $F(3m + 2n) = F(m)F(n)$ dla każdej pary liczb całkowitych $m, n \geq 1$.

618. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym środek odcinka AD jest jednakowo odległy od punktów P i C , a środek odcinka CD jest jednakowo odległy od punktów P i A . Punkt Q jest środkiem odcinka BP . Wykazać, że $\sphericalangle PAQ = \sphericalangle PCQ$.

Zadanie 618 zaproponował pan Michał Kieza z Warszawy.

Rozwiązania zadań z numeru 11/2010

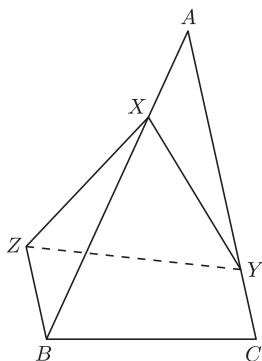
Przypominamy treść zadań:

609. W trójkącie ostrokątnym ABC bok AB jest najdłuższy. Na bokach AB i AC zaznaczono odpowiednio punkty X i Y tak, że $|AY| = |BX|$. Wykazać, że $2 \cdot |XY| > |BC|$.

610. Ciąg (a_n) jest określony rekurencyjnie: $a_1 = 1, a_2 = 3,$

$$a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2} \quad \text{dla } n \geq 3.$$

Dowieść, że żaden wyraz tego ciągu nie ma dzielnika dodatniego postaci $8k + 5$.



609. Na odcinku BX , po zewnętrznej stronie trójkąta ABC , budujemy trójkąt BXZ przystający do AYX (tak, że $|BZ| = |AX|, |XZ| = |YX|$). W tych trójkątach kąty przy wierzchołkach B i A są równe, wobec czego $BZ \parallel CA$. Zatem kąt CBZ jest rozwarty.

Skoro $|AB| > |AC|$, to $|BZ| = |AX| > |CY|$. Stąd i z rozwartości kąta CBZ wnosimy, patrząc na trapez $ZBCY$, że

$$|BC| < |YZ| \leq |YX| + |XZ| = 2 \cdot |XY|.$$

610. Określamy parę ciągów $(a_n), (b_n)$ wzorami: $a_1 = b_1 = 1,$

$$(1) \quad a_{n+1} = a_n + 2b_n, \quad b_{n+1} = a_n + b_n.$$

Wówczas $a_2 = 3$ oraz

$$a_{n+2} = a_{n+1} + 2(a_n + b_n) = a_{n+1} + 2a_n + (a_{n+1} - a_n) = 2a_{n+1} + a_n,$$

co pokazuje, że (a_n) jest ciągiem danym w zadaniu.

Ze wzorów (1) dostajemy równość

$$a_{n+1}^2 - 2b_{n+1}^2 = -(a_n^2 - 2b_n^2);$$

a ponieważ $a_1^2 - 2b_1^2 = -1$, wynika stąd, że $a_n^2 - 2b_n^2 = (-1)^n$.

Ustalmy n . Widać, że a_n jest liczbą nieparzystą. Niech $p = 2m + 1$ będzie jej dowolnym dzielnikiem pierwszym. Dostajemy zależność

$$2b_n^2 \equiv (-1)^{n+1} \pmod{p}.$$

Po podniesieniu do potęgi m (i skorzystaniu z małego twierdzenia Fermata: $b_n^{2m} \equiv 1$),

$$(2) \quad 2^m \equiv (-1)^{m(n+1)} \pmod{p}.$$

Za chwilę wykazemy, że jednocześnie

$$(3) \quad 2^m \equiv (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}.$$

Równość (mod p) prawych stron (2) i (3) oznacza, że

(4) liczby $m(n+1)$ oraz $\lceil m/2 \rceil$ są jednakowej parzystości.

Dla n parzystego warunek (4) mówi, że $m = 4k$ lub $m = 4k + 1$ dla pewnego k ; zatem $p = 8k + 1$ lub $p = 8k + 3$. Każdy dzielnik pierwszy liczby a_n ma więc taką postać. Dowolny dzielnik dodatni (jako iloczyn pewnej liczby dzielników pierwszych) wtedy też jest tej postaci.

Dla n nieparzystego warunek (4) implikuje $m = 4k$ lub $m = 4k + 3$, czyli $p = 8k + 1$ lub $p = 8k + 7$. I znów, dowolny iloczyn takich liczb też jest liczbą tej postaci. W obu przypadkach liczby postaci $8k + 5$ nie mogą być dzielnikami liczby a_n .

Pozostaje udowodnić wzór (3). Przyjmijmy (dla ustalonego m) oznaczenia:

A = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,

B = iloczyn wszystkich liczb nieparzystych z przedziału $\langle 1; m \rangle$,

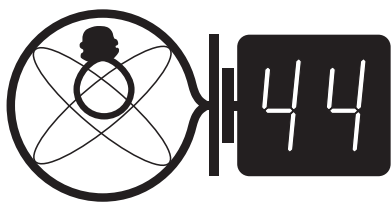
C = iloczyn wszystkich liczb parzystych z przedziału $\langle m+1; 2m \rangle$.

Iloczyn B liczy $\lceil m/2 \rceil$ czynników. Łączymy je z czynnikami iloczynu C w pary o sumie $2m + 1$ (czyli p). Otrzymujemy związek $C \equiv B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} \pmod{p}$. Stąd

$$2^m m! = 2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (2m) = A \cdot C \equiv A \cdot B \cdot (-1)^{\lceil m/2 \rceil} = (-1)^{\lceil m/2 \rceil} m! \pmod{p}.$$

Wystarczy teraz podzielić przez czynnik $m!$ (względnie pierwszy z p), by uzyskać wzór (3) i zakończyć rozwiązanie.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
502 ($WT = 1,00$) i 503 ($WT = 3,55$)
z numeru 9/2010

Jacek Piotrowski	Rzeszów	37,13
Jerzy Witkowski	Radlin	33,82
Tomasz Rudny	Warszawa	32,65
Andrzej Idzik	Bolesławiec	26,47
Tomasz Wietecha	Tarnów	25,39

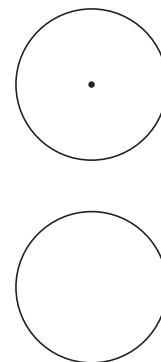


Zadania z fizyki nr 514, 515

Redaguje Jerzy B. BROJAN

514. Jednorodny krążek (blok) może się obracać bez tarcia wokół poziomej osi, oznaczonej na rysunku 1 kropką. Drugi taki sam krążek jest połączony z pierwszym nawiniętą na nie nitką. Z jakim przyspieszeniem spada dolny krążek?

515. Zbiornik zawierający $n = 100$ moli gazu doskonałego o temperaturze $T_1 = 400$ K i pod ciśnieniem $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Pa znajduje się w otoczeniu powietrza atmosferycznego o temperaturze $T_0 = 290$ K i pod ciśnieniem $p_0 = 1 \cdot 10^5$ Pa. Obliczyć maksymalną pracę, którą może wykonać zespół gaz + otoczenie (zarówno bezpośrednio, jak za pośrednictwem maszyn cieplnych). Ciepło molowe gazu przy stałej objętości jest równe $C_V = \frac{5}{2}R$.

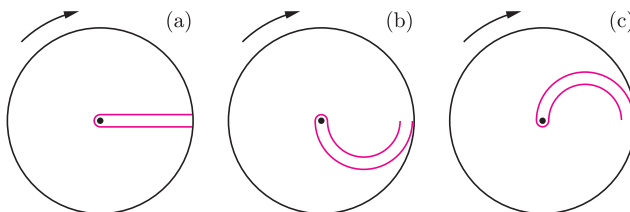


Rys. 1

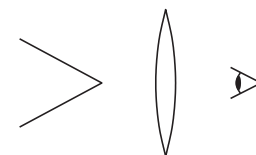
Rozwiązania zadań z numeru 11/2010

Przypominamy treść zadań:

506. Pozioma płytkę kołową o promieniu r i momencie bezwładności I obraca się wokół swojej osi bez tarcia. Jej początkowa prędkość kątowa to ω_0 . W płytce jest rowek, a w rowku – kulka o masie m , która może się w nim toczyć bez tarcia. Kulka początkowo znajdowała się w środku płytki, a pod wpływem bardzo słabego impulsu zaczęła się toczyć na zewnątrz i spadła z płytki. Ile wynosiła końcowa prędkość kątowa płytki ω_1 ? Rozważyć trzy przypadki – gdy rowek biegnie prosto wzdłuż promienia (rys. 2(a)) i gdy ma kształt półokręgu (rys. 2(b) i (c)).



Rys. 2



Rys. 3

507. W soczewce skupiającej o ogniskowej f widzimy obraz pozorny stożka, którego oś pokrywa się z osią soczewki (rys. 3). Kąt rozwarcia stożka wynosi 2α , a jego wierzchołek jest odległy od soczewki o x . Ile wynosi kąt rozwarcia obrazu stożka 2β ?

506. W przypadku (a) składowa okrężna (prostopadła do promienia) prędkości kulki wynikała tylko z obrotu płytki i w chwili stoczenia się z płytki wynosiła $\omega_1 r$. Zgodnie z zasadą zachowania momentu pędu

$$I\omega_0 = I\omega_1 + m\omega_1 r^2, \quad \text{czyli } \omega_1 = \frac{I\omega_0}{I + mr^2}.$$

W przypadkach (b) i (c) prędkość kulki w chwili stoczenia nie jest wprost powiązana z ω_1 . Oznaczmy ją v_1 ; zauważmy też, że składowa radialna prędkości wtedy nie występuje. Można więc skorzystać zarówno z zasady zachowania momentu pędu, jak i z zasady zachowania energii:

$$I\omega_0 = I\omega_1 + mv_1 r, \quad \frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 + \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Równania te mają dwa rozwiązania: banalne rozwiązanie $\omega_1 = \omega_0$ (wtedy $v_1 = 0$), oraz „niebanalne”

$$\omega_1 = \omega_0 \frac{I - mr^2}{I + mr^2} \quad (\text{wtedy } v_1 = 2\omega_0 r \frac{I}{I + mr^2}).$$

Rozwiązanie „banalne” odpowiada przypadkowi (b), a „niebanalne” – przypadkowi (c).

507. Promień biegnący wzdłuż tworzącej stożka można uważać za wybiegający ze wszystkich punktów tej półprostej, zatem po załamaniu pobiegnie tak, jakby wybiegał ze wszystkich punktów jej obrazu. Stąd wynika, że jego przedłużenie tworzy z osią soczewki kąt β . Oznaczmy przez h wysokość, na której następuje załamanie tego promienia, a przez y odległość obrazu wierzchołka stożka od soczewki. Z równań

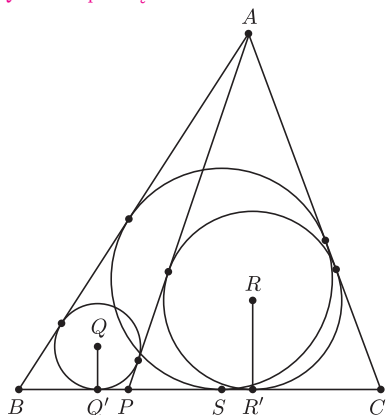
$$\text{tg } \alpha = \frac{h}{x}, \quad \text{tg } \beta = \frac{h}{y}, \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

znajdujemy rozwiązanie

$$\text{tg } \beta = \left(1 - \frac{x}{f}\right) \text{tg } \alpha.$$



Rozwiązanie zadania M 1306.
Niech Q' i R' oznaczają rzuty punktów Q i R na prostą BC .



Z przyrównania odcinków stycznych do okręgu wpisanego w trójkącie APB wynika równość $PQ' = \frac{1}{2}(AP + BP - AB)$. Podobnie mamy

$$\begin{aligned} R'S &= CS - CR' = \\ &= \frac{1}{2}((AC + BC - AB) - \\ &\quad - (AC + PC - AP)) = \\ &= \frac{1}{2}(AP + BP - AB), \end{aligned}$$

czyli $PQ' = R'S$. Stąd również $PR' = Q'S$, czyli $PQ' \cdot PR' = SQ' \cdot SR'$. Ponieważ kąt QPR między dwusiecznymi kątów przyległych jest prosty, więc trójkąty prostokątne $QQ'P$ i $PR'R$ są podobne. W takim razie $QQ' \cdot RR' = PQ' \cdot PR' = SQ' \cdot SR'$. Stąd trójkąty $QQ'S$ i $SR'R$ są podobne, więc kąt QSR też jest prosty. To oznacza, że punkty P, Q, R, S leżą na jednym okręgu.

Patrz w niebo: Najmłodsza planeta

Doniesienie o odkryciu kolejnej niewidocznej planety przy jakiejś odległej gwiazdzie nie budzi już sensacji. Gdyby planetę dało się wprost zobaczyć, to inna sprawa, ale takie planety są jednak za małe i zbyt odległe, dlatego o ich obecności wnioskuje się pośrednio, na podstawie widma gwiazdy, bo generalnie widmo zawiera mnóstwo informacji o gwiazdzie. Wygląd widma zależy przede wszystkim od temperatury gwiazdy, ale wszelkie odchylenia od wyglądu standardowego mogą nieść informacje o tym, co dzieje się w otoczeniu gwiazdy. Tak właśnie stało się w przypadku gwiazdy o pozornie dziwacznej nazwie CoKu Tau 4, która nie jest dziwaczna, jeżeli się wie, że oznacza pewną gwiazdę w obszarze gwiazdotwórczym w Byku (Taurus), a odkryli ją Amerykanie M. Cohen i L.V. Kuhi. Gwiazdę odkryto w podczerwieni, a inny badacz zauważył, że jej widmo ma „dołek” przy długości fali około $10 \mu\text{m}$. Otóż gdyby gwiazda była samotna, to jej widmo byłoby jak w podręczniku, a gdyby gwiazdę otaczał dysk materii, to widmo spadałoby ku falom długim mniej stromo, bo dysk dodawałby swoją emisję w podczerwieni. Dołek w widmie zinterpretowano jako obecność dysku z centralną dziurą, czyli stwierdzono, że gwiazdę otacza pierścien. Uwaga: dołek w widmie nie przyniósł informacji o rozmiarach dziury; jego obecność wskazuje tylko, że dziura w ogóle jest. Widocznie na długości fali odpowiadającej temu dołkowi jest niewiele energii gwiazdy (taka to gwiazda) i energii pierścienia też jest mało, bo emituje on głównie na falach jeszcze dłuższych.

Jakie z tego wnioski? Wokół gwiazdy centralnej CoKu Tau 4 materia dysku najwyraźniej została zużyta i... dalej jest ogromne pole do popisu dla teoretyków. Należy przede wszystkim spróbować określić, co i kiedy z tej materii powstało. Gdyby miała tam powstać druga gwiazda, to mogłaby już być widoczna, a skoro nie jest, to pewnie jest tam planeta. Sama gwiazda ma nie więcej niż milion lat, planeta musi być więc jeszcze młodsza. Stwarza to dalsze problemy, bowiem według jednych badaczy formowanie samego jądra planety trwa dłużej, inni zaś utrzymują, że niestabilności w dysku mogą znacząco przyspieszyć proces zgęszczania się planety. Bez względu na to, czy ten mechanizm zostanie wyjaśniony, czy nie, pozostaje faktem, że przy CoKu Tau 4 mieliśmyby najmłodszą znaną planetę – według niektórych wręcz „niewiarygodnie młodą”.

Tomasz KWAST

Marzec

Orion, chyba najokazalszy w zimie gwiazdozbiór, wieczorem jest już wyraźnie w zachodniej stronie nieba, ale z północy na południe przecina niebo Droga Mleczna. Na południu, prawie na horyzoncie, widzimy na jej tle Rufę i Kompas, dwa z czterech gwiazdozbiórów, na które rozłożono dawny Okręt Argo. Pozostałych dwóch w Polsce nie widać (a są to Żagle i Kil). Trochę to dziwne, gdy jedną z części składowych okrętu ma być Kompas, ale to taka już tradycja. Kompas jest gwiazdozbiorem niepozornym, Rufa dość rozległym, ale w Polsce widać tylko jej część. Nie ma tam szczególnie jasnych gwiazd, korzystając jednak z czystego zimowego nieba (zimą naprawdę mniej kurzu unosi się w atmosferze), można spróbować zobaczyć przez lornetkę trzy gromady otwarte, tworzące mały trójkąt. Są nimi M46 (o jasności 6 mag), M47 (4,5 mag) i NGC 2423 (6,9 mag). Każda z nich zawiera co najmniej 50 gwiazd, przy czym pierwsza z wymienionych ma ponad 100 gwiazd. Kompas, choć też leży w Drodze Mlecznej, nie zawiera podobnych obiektów dostępnych obserwacjom amatorskim.

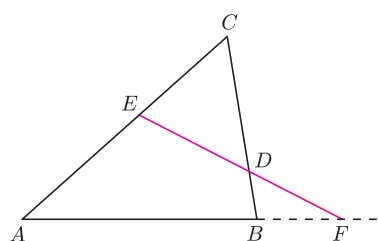
Merkury znajdzie się najdalej na wschód od Słońca 23 III, można go więc szukać na niebie zachodnim. Wenus jest w Kozioroźcu, Mars w Wodniku, a Jowisz w Rybach, czyli wszystkie te planety są blisko Słońca, zatem ich nie widać. Jedynie Saturn jest w Pannie, widać go więc przez całą noc. Nów Księżycza wypada 4 III, a pełnia 19 III. Żadnych zaćmień ani zakryć jasnych obiektów w marcu nie będzie, nie będzie też przewidywalnych rojów meteorów, za to – co chyba najważniejsze – 20 III nastąpi wiosenna równonoc, czyli dni staną się już dłuższe od nocy. I w ogóle idzie ku wiosnie!

T. K.

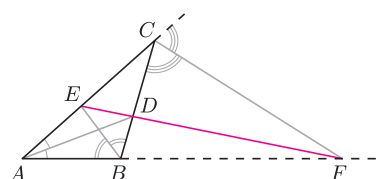




TwM jest bardzo podobne do omawianego tu miesiąc temu twierdzenia Cevy (patrz zadanie 6).

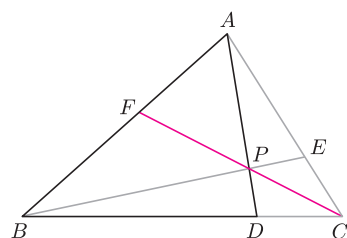


Rys. 1

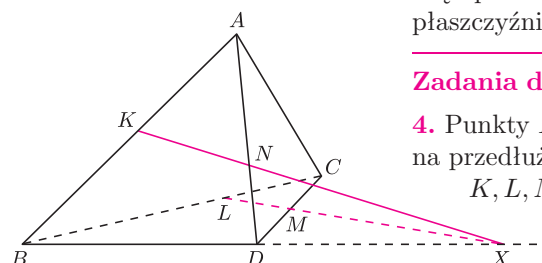


Rys. 2

Ćwiczenie: Jeśli P jest środkiem okręgu wpisanego, to $\frac{AP}{PD} = \frac{AB+AC}{BC}$.



Rys. 3



Rys. 4

Składaniu jednokładności poświęcony był deltoid 3/2010.

Twierdzenie Menelaosa Joanna JASZUŃSKA

W wielu zadaniach dane są trzy punkty, które albo są współliniowe, albo należy to o nich udowodnić. Wygodnym narzędziem bywa wtedy

Twierdzenie Menelaosa (TwM). Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , a punkt F na przedłużeniu boku AB (rys. 1). Wówczas punkty D, E, F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1.$$

1. W trójkącie ABC punkty D, E są spodkami dwusiecznych odpowiednio $\sphericalangle BAC$ i $\sphericalangle ABC$. Punkt F jest spodkiem dwusiecznej kąta zewnętrznego przy wierzchołku C . Udowodnij, że punkty D, E, F leżą na jednej prostej.

2. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P . Wykaż, że

$$\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD}.$$

3. Sfera S jest styczna do krawędzi AB, BC, CD, DA czworościanu $ABCD$ odpowiednio w punktach K, L, M, N . Wykaż, że leżą one na jednej płaszczyźnie.

Rozwiązania

R1. Twierdzenie o dwusiecznej orzeka, iż: $\frac{AF}{FB} = \frac{AC}{BC}$, $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$, $\frac{CE}{EA} = \frac{BC}{AB}$ (rys. 2). Zachodzi więc równość z TwM, co kończy dowód. \square

R2. Z TwM dla trójkąta ABD i prostej FP (rys. 3) zachodzi

$$\frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AF}{FB} = 1, \quad \text{stąd} \quad \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD} \cdot \frac{CD}{BC}.$$

Podobnie z TwM dla trójkąta ACD i prostej EP otrzymujemy $\frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD} \cdot \frac{BD}{BC}$. Zatem

$$\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD} \cdot \frac{BD+CD}{BC} = \frac{AP}{PD}. \quad \square$$

R3. Załóżmy, że prosta KN przecina prostą BD w pewnym punkcie X (poza odcinkiem BD , rys. 4). Wtedy z TwM dla trójkąta ABD i prostej KN mamy

$$\frac{BX}{XD} \cdot \frac{DN}{NA} \cdot \frac{AK}{KB} = 1.$$

Odcinki stycznych do sfery z jednego punktu są równe, stąd $AK = AN$, $BK = BL$, $CL = CM$, $DM = DN$. Wobec powyższego

$$1 = \frac{BX}{XD} \cdot \frac{DN}{KB} = \frac{BX}{XD} \cdot \frac{DM}{LB} = \frac{BX}{XD} \cdot \frac{DM}{MC} \cdot \frac{CL}{LB}.$$

Zatem z TwM dla trójkąta BCD , prosta LM przecina prostą BD w punkcie X . Stąd proste KN i LM przecinają się, więc punkty K, L, M, N leżą na jednej płaszczyźnie. Prostszy przypadek $KN \parallel BD$ pozostawiam jako ćwiczenie. \square

Zadania domowe

4. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i CA trójkąta ABC , a punkt F na przedłużeniu boku AB , przy czym punkty D, E, F są współliniowe. Punkty K, L, M są odpowiednio środkami boków BC, CA, AB , zaś punkty D', E', F' – obrazami symetrycznymi punktów D, E, F w symetriach względem K, L, M . Wykaż, że punkty D', E', F' są współliniowe.

5. Udowodnij twierdzenie Menelaosa.

Wskazówka. Zrzutuj punkty A, B, C na prostą DE i zastosuj twierdzenie Talesa.

6. Udowodnij twierdzenie Cevy: Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC . Wówczas proste AD, BE, CF przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BD}{DC} \cdot \frac{CE}{EA} = 1$.

Wskazówka. Wykorzystaj podobny pomysł, jak w rozwiązaniu zadania 2.

7. Wykaż, że złożenie jednokładności o środku O_1 i skali k_1 z jednokładnością o środku $O_2 \neq O_1$ i skali $k_2 \neq \frac{1}{k_1}$ jest jednokładnością o środku na prostej O_1O_2 .