



tel. 022 638 10 33, 148 71-24 11 59 92







17 lipca 2011 roku zmarł

## Andrzej Woszczyk

Astronom i znakomity Popularyzator Astronomii

Redaktor Naczelny *Uranii – Postępów Astronomii*  
wielki Przyjaciel *Delty*

## SPIS TREŚCI NUMERU 9 (448)

- Programowanie na platformie CUDA  
*Wojciech Śmietanka* str. 1
- Kolejność ma znaczenie  
*Tomasz Idziaszek* str. 3
- O fizycznych podstawach badania zmian klimatu  
*Krzysztof Turzyński* str. 4
-  Polityczne zwierzę  
*Magdalena Fikus* str. 5
-  Geometryczne liczby  
*Michał Kosacki* str. 6
- Informatyczny kącik olimpijski (45): Wypisz napis  
*Jakub Radoszewski* str. 8
- Olimpiady 2011/2012 str. 9
- O prostej Simsona raz jeszcze  
*Michał Kieza* str.17
- Prosto z nieba:  
Gromada galaktyk w Pannie  
*Michał Bejger* str.17
-  Samozasilające się silniki magnetohydrodynamiczne  
*Stanisław Bednarek* str.18
-  Zadania str.19
- Aktualności str.20
-  Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej str.21
- Klub 44 str.22
- Wrzesień  
*Agnieszka Majczyna* str.24
-  W przestrzeni łatwiej!  
*Joanna Jaszewska* str.25

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Witold Sadowski, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

**Warunki prenumeraty w RUCH-u:**

Cena prenumeraty w 2011 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** wpłaty przyjmują Regiony Sprzedaży RUCH SA właściwe dla miejsca zamieszkania. Termin przyjmowania wpłat: do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty.

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH SA, Pion Kolportażu, Zespół ds. Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33; tel. 22-53-28-823 (prenumerata płatna w walucie obcej), -816, -819 (prenumerata płatna w PLN w kasie Zespołu lub na konto w banku PEKAO SA IV O/Warszawa 68 1240 1053 1111 0000 0443 0494), fax 22-53-28-734, infolinia 800-1200-29. Płatność kartą kredytową (Visa, MasterCard, American Express) przez [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl)

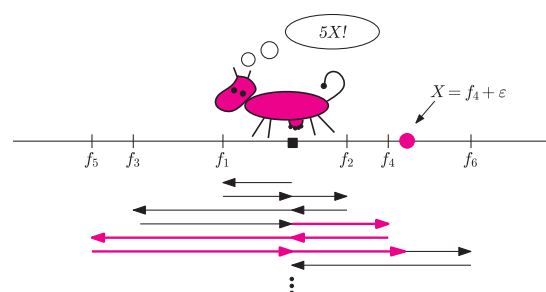
3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:  
SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;  
w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;  
w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;  
kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

**Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):**  
[deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski **Cena 1 egzemplarza 4 zł**

## W następnym numerze



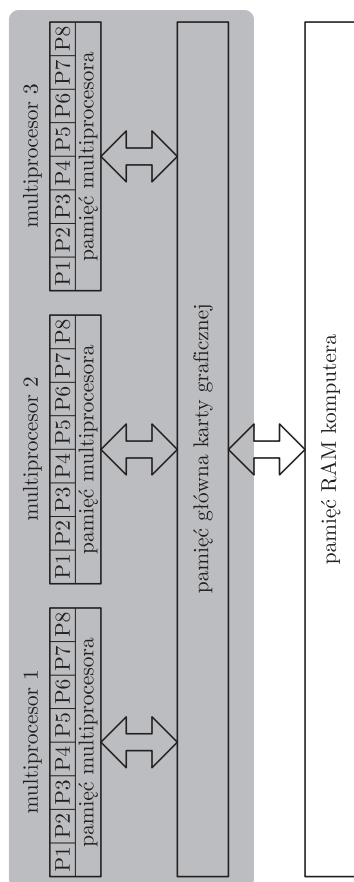
**polecamy**

**informatyczne krowy**

# Programowanie na platformie CUDA

Wojciech ŚMIETANKA\*

Flops to jednostka wydajności sprzętu komputerowego, oznaczająca liczbę operacji zmiennoprzecinkowych wykonywanych przez sprzęt w ciągu sekundy. Gflops to miliard takich operacji na sekundę.



Rys. 1. Struktura karty graficznej (część zacieniona) i przepływ danych w pamięci komputera podczas obliczeń.

Dziesięć lat temu kolejne generacje procesorów charakteryzowały się wykładniczo rosnącą częstotliwością taktowania. Teraz ta sytuacja uległa zmianie. Obecnie to liczba rdzeni w jednym procesorze zaczyna rosnąć wykładniczo. W użytku są już procesory firmy Intel dla zwyczajnych PC-tów mające 8 rdzeni, a co jakiś czas pojawiają się informacje o tym, że niedługo zostanie wyprodukowany procesor o 50 rdzeniach. Niestety, pisanie programu, który wykorzystuje w pełni moc  $n$  rdzeni, nie jest dla programisty łatwym zadaniem. Jest to spowodowane dość uciążliwymi metodami synchronizacji wielu wątków i używanym modelem pamięci, który jest bardziej przystosowany do programowania jednowątkowego.

Okazuje się, że w większości współczesnych komputerów znajduje się drugi układ scalony, który od początku był projektowany do obliczeń równoległych. Chodzi o kartę graficzną. Zwyczajowo karta graficzna ma za zadanie obliczyć wartości koloru pojedynczych pikseli na ekranie. Widać, że wyniki poszczególnych obliczeń są niezależne. W tym artykule chciałbym przybliżyć platformę CUDA, która służy do programowania na kartach graficznych firmy NVIDIA. O tym, że warto zastanowić się nad programowaniem na karcie graficznej, może świadczyć następujące porównanie:

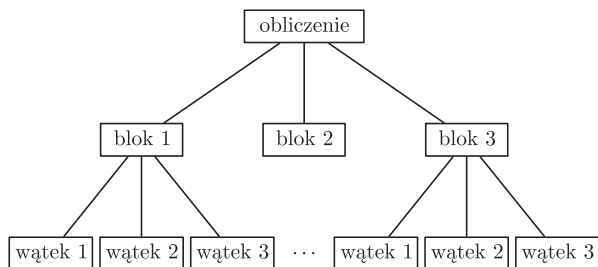
- jeden z najlepszych obecnie procesorów Intela – Core i7 980X – kosztuje ok. 1000 dolarów i osiąga moc obliczeniową ok. 100 Gflopsów;
- jedna z najlepszych kart graficznych NVIDIA – GeForce GTX 580 – kosztuje ok. 500 dolarów i oferuje moc obliczeniową ok. 1500 Gflopsów.

**Struktura karty graficznej.** Karta graficzna składa się (w uproszczeniu) z *multiprocessorów*, przy czym jeden multiprocessor składa się z 8 lub 16 pojedynczych procesorów i jednej niewielkiej współdzielonej pamięci na cały multiprocessor (pamięć multiprocessora jest szybka, umożliwia jednoczesny odczyt/zapis), oraz jednej dużej pamięci, która jest wspólna dla wszystkich multiprocessorów. Pamięć ta jest o rząd wielkości wolniejsza od pamięci multiprocessora, umożliwia także jednoczesny odczyt/zapis.

Standardowo program używający do obliczeń karty graficznej będzie działał według następującego schematu: skopiowanie danych z pamięci komputera do pamięci głównej karty graficznej i dalej do pamięci multiprocessora; wykonanie obliczenia na multiprocessorach; skopiowanie częściowych wyników z pamięci multiprocessora do pamięci głównej karty graficznej i skopiowanie końcowego wyniku do pamięci komputera.

**Struktura obliczeń.** A teraz ciekawe pytanie: w jaki sposób programista rozdziela zadania między multiprocessory i procesory? Przypuśćmy, że chcemy wykonać jakieś duże obliczenie  $K$ . Programista dzieli je na zbiór mniejszych obliczeń:  $K = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ . Pojedynczy element obliczenia  $b_i$  to blok, który jest z kolei złożony z pojedynczych wątków:

$$b_i = \{w_{i1}, w_{i2}, \dots, w_{im}\}.$$



Rys. 2. Struktura obliczeń.

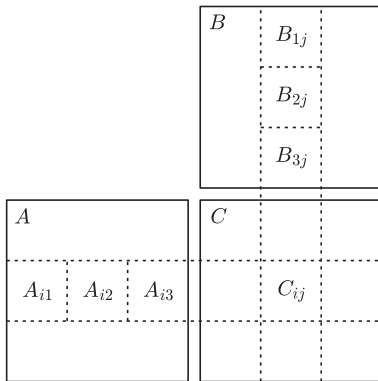
Specyfikacja techniczna platformy CUDA daje następujące gwarancje: każdy blok będzie wykonywany w obrębie jednego multiprocessora; nie wiadomo o tym, w jakiej kolejności wykonają się bloki; jeden wątek wykona się na jednym procesorze; w obrębie jednego multiprocessora wykonuje się w danym momencie co najwyżej jeden blok.

Zadaniem programisty jest napisanie kodu pojedynczego wątku. Każdy wątek wykonuje dokładnie ten sam kod, przy czym wątek może sprawdzić, w którym bloku się znajduje, a także jaki ma numer wewnątrz tego bloku. Obliczenie wykonywane przez wątek zależy od tak zdefiniowanych współrzędnych tego wątku.

\*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego

Należy jeszcze podkreślić, że programista nie specyfikuje dokładnie, na którym procesorze wykona się dany wątek. Zadaniem programisty jest zdefiniować strukturę obliczeń, a przydziałem wątków do procesorów zajmuje się CUDA.

**Praktyczny przykład – mnożenie macierzy.** Chcemy pomnożyć dwie macierze  $A$  i  $B$ , obie wymiaru  $n \times n$ . Przez  $C$  oznaczmy macierz wynikową. Obliczenie macierzy  $C$  wprost z definicji wymaga wykonania  $O(n^3)$  operacji. Używając platformy CUDA, można zaproponować lepsze rozwiązanie, w którym wszystkie macierze dzielimy na podmacierze rozmiaru  $k \times k$  (oznaczamy je przez  $A_{ij}, B_{ij}, C_{ij}$ ). Dla uproszczenia analizy założymy, że rozmiar macierzy  $n$  jest wielokrotnością rozmiaru podmacierzy  $k$ . Jeden blok obliczenia będzie miał za zadanie obliczyć jedną z podmacierzy  $C_{ij}$ . Zauważmy, że  $C_{ij} = \sum_{l=1}^{n/k} A_{il} \cdot B_{lj}$ . W jednej iteracji będziemy chcieli obliczyć jeden składnik postaci  $A_{il} \cdot B_{lj}$ . Można to zrobić następująco.



Rys. 3. Schemat mnożenia macierzy.

Tutaj  $n/k = 3$  oraz

$$C_{ij} = A_{i1} \cdot B_{1j} + A_{i2} \cdot B_{2j} + A_{i3} \cdot B_{3j}.$$

Dla każdego  $l \in \{1, 2, \dots, n/k\}$ :

- pobieramy do pamięci multiprocessora macierze  $A_{il}, B_{lj}$  – tę pracę wykonuje pierwszy wątek z każdego bloku;
- równolegle obliczamy  $A_{il} \cdot B_{lj}$ , każdej komórce macierzy wynikowej przyporządkowujemy jeden wątek odpowiedzialny za obliczenie tej wartości;
- dodajemy do wyniku obliczoną wartość  $A_{il} \cdot B_{lj}$ .

Po wykonaniu obliczeń dla wszystkich  $l$  mamy obliczoną podmacierz  $C_{ij}$ , którą możemy zapisać do pamięci głównej karty.

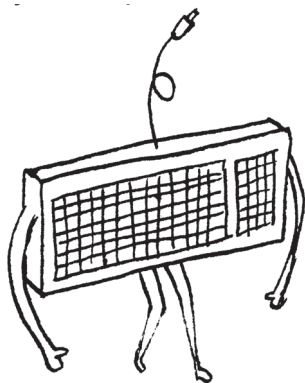
Spróbujmy oszacować złożoność tego rozwiązania. W tym celu przez  $p$  oznaczmy liczbę procesorów wewnątrz jednego multiprocessora, a przez  $m$  – liczbę multiprocessorów.

Przyjrzyjmy się czasowi wykonywania pojedynczego bloku. Przy obliczaniu iloczynu  $A_{il} \cdot B_{lj}$  najpierw pobieramy dwie macierze rozmiaru  $k \times k$  do pamięci multiprocessora, co zajmuje czas  $O(k^2)$ , a następnie wykonujemy  $k^3$  mnożeń, ale to zrównolegla się między  $p$  procesorów, koszt tego wynosi więc  $O(\frac{k^3}{p})$ . Taki ciąg operacji należy wykonać dla  $l \in \{1, 2, \dots, \frac{n}{k}\}$ . Zatem jeden blok wykonuje się w czasie  $O((\frac{k^3}{p} + k^2) \cdot \frac{n}{k})$ .

Mamy  $\frac{n^2}{k^2}$  bloków, ich wykonanie zrównoleglamy między  $m$  multiprocessorów, zatem łączny czas to  $\frac{n^2}{mk^2}$  razy czas wykonania pojedynczego bloku. Daje to złożoność czasową  $O(\frac{n^3}{mk^3} \cdot (\frac{k^3}{p} + k^2))$ . Przyjmując, że  $k = p$ , co jest możliwe, gdyż to programista dobiera wartość  $k$ , daje to złożoność  $O(\frac{n^3}{mp^3} \cdot p^2)$ , czyli  $O(\frac{n^3}{mp})$ . W ten sposób klasyczną złożoność  $O(n^3)$  podzieliliśmy przez  $m \cdot p$ , czyli liczbę procesorów. We wspomnianej wcześniej karcie GeForce GTX 580 mamy  $m = 32$ ,  $p = 16$ , czyli programista ma do dyspozycji 512 procesorów. To daje duże możliwości zrównoleglania.

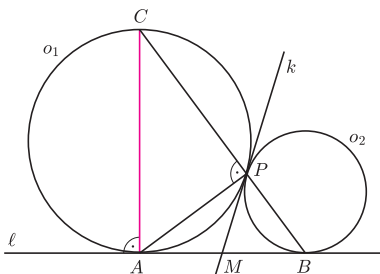
**Czy przyszłość programowania leży w równoległości?** Jest cała lista problemów związanych z programowaniem równoległym, jak np.: mała liczba doświadczonych programistów; wyższy niż w przypadku programowania jednowątkowego poziom skomplikowania; część algorytmów ciężko się zrównolegla (np. nie jest znany dobry równoległy algorytm sprawdzania, czy w danym grafie dwudzielnym jest doskonałe skojarzenie); błędy typu *race condition*, gdy więcej niż jeden wątek jednocześnie zapisuje w danym miejscu w pamięci.

Z drugiej strony programiści chcieliby, aby ich programy działały szybko. Podnoszenie wydajności pojedynczego rdzenia nie odbywa się w takim tempie jak kiedyś, można więc przypuszczać, że do dalszego poprawiania wydajności oprogramowania potrzebne jest odrzucenie modelu programowania z jednym procesorem i myślenie w sposób równoległy. NVIDIA CUDA jest jednym z ciekawszych modeli oferujących możliwość programowania współbieżnego. Wprowadza to za cenę jednej zasadniczej nowości: programiści muszą nauczyć się dzielić obliczenia tworzonego oprogramowania na możliwie niezależne kawałki. Nie jest to takie łatwe, bo całkowicie zmienia sposób myślenia o programowaniu.



**Rozwiązanie zadania M 1325.**

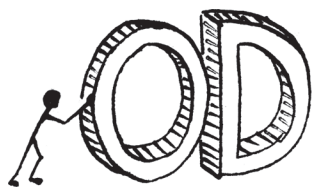
Rozważmy wspólną styczną  $k$  okręgów  $o_1$  i  $o_2$  przechodzącą przez punkt  $P$ .



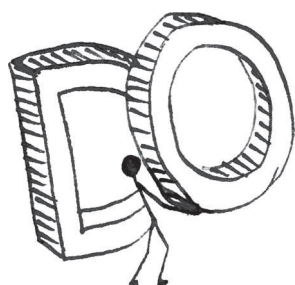
Przecina ona prostą  $l$  w punkcie  $M$ . Ponieważ  $MA = MP = MB$ , więc trójkąt  $ABP$  jest prostokątny. Wobec tego  $AC$  jest średnicą okręgu  $o_1$ , jako cięciwa, na której oparty jest kąt prosty  $APC$ , a średnica okręgu jest prostopadła do stycznej w swoim końcu.

# Kolejność ma znaczenie

Tomasz IDZIASZEK



Zakładamy, że Czytelnik zna podstawowe kwestie związane z pamięcią podręczną procesora (tzn. pamięcią *cache*). Można o nich przeczytać w artykule Krzysztofa Piecucha w *Delcie* 10/2009.



Z artykułu Wojciecha Śmietanki wypływa ważny morał: przystosowanie algorytmu do działania na maszynie równoległej wymaga często zupełnie innego spojrzenia na dany problem. Okazuje się jednak, że nawet w przypadku architektury jednoprocessorowej optymalizacja algorytmu może wymagać od nas całkiem pomysłowych przeróbek. W tym artykule podamy dwa przykłady, w których kluczową okaże się *kolejność*, w jakiej wykonujemy operacje.

Za pierwszy przykład niech posłuży wspomniany już algorytm mnożenia macierzy. Można go zapisać, na przykład, tak:

```
for i := 1 to n do
  for k := 1 to n do
    for j := 1 to n do
      c[i, j] := c[i, k] + a[i, k] · b[k, j];
```

Z uwagi na przemienność dodawania nie ma znaczenia, w jakiej kolejności wykonamy powyższe pętle. Ważne jest tylko to, aby ostatni wiersz został wykonany dla wszystkich trójek  $(i, j, k) \in \{1, \dots, n\}^3$ . Okazuje się, że to, iż pętle występują w kolejności  $i, k, j$  (zamiast, wydawać by się mogło, bardziej naturalnej kolejności  $i, j, k$ ), ma kluczowe znaczenie. Na moim komputerze ten program dla  $n = 1000$  wykonuje się 2,1 s, natomiast program „naturalny” aż 8,2 s – prawie cztery razy wolniej! Wiąże się to z tym, że w powyższym programie wszystkie macierze są przeglądane wierszami, co dobrze wpływa na wykorzystanie pamięci podręcznej procesora.

Często, aby umożliwić wykonywanie operacji w lepszej kolejności, konieczne jest głębsze przebudowanie algorytmu. Za przykład posłuży nam tu wyznaczanie liczb pierwszych za pomocą sita Eratostenesa.

Będziemy wypełniać tablicę  $p[2..n]$ . Po zakończeniu algorytmu wartość  $p[i]$  będzie wskazywała, czy liczba  $i$  jest pierwsza. Algorytm w pseudokodzie wygląda tak:

```
for i := 2 to n do
  p[i] := true;
for i := 2 to  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  do
  if p[i] then
    j :=  $i^2$ ;
    while j ≤ n do
      p[j] := false;
      j := j + i;
```

Zauważmy, że dla każdej nowo znalezionej liczby pierwszej  $i$  przeglądamy prawie całą tablicę  $p$ , by wykreślić wielokrotności  $i$ . To powoduje, że nieefektywnie korzystamy z pamięci podręcznej procesora. Spróbujmy zatem tak przepisać powyższy algorytm, by zwiększyć lokalność odwołań do pamięci.

Zauważmy, że liczba pierwsza  $i$  zostanie użyta do wykreślenia tylko, gdy  $i \leq \sqrt{n}$ . Na początek wykonajmy więc powyższy kod dla początkowego kawałka tablicy  $p[2.. \lfloor \sqrt{n} \rfloor]$ , przy okazji zapamiętując w tablicy  $pie[1..k]$  napotkane liczby pierwsze, a w tablicy  $wiel[1..k]$  ich najmniejsze wielokrotności większe niż  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ . Resztę tablicy podzielmy na bloki długości  $B$  i przeglądajmy te bloki kolejno, za każdym razem wykreślając (dla wszystkich  $1 \leq i \leq k$ ) znajdujące się w tym bloku wielokrotności liczby  $pie[i]$ , odpowiednio uaktualniając w  $wiel[i]$  najmniejszą niewykorzystaną jeszcze

wielokrotność  $pie[i]$ . Poniższy pseudokod realizuje ten nowy algorytm:

```
for i := 2 to n do
  p[i] := true;
k := 0;
for i := 2 to  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  do
  if p[i] then
    k := k + 1;
    pie[k] := i;
    wiel[k] :=  $i^2$ ;
    while wiel[k] ≤  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$  do
      p[wiel[k]] := false;
      wiel[k] := wiel[k] + i;
```

```
b :=  $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ ; {b to ostatni element poprzedniego bloku}
while b < n do
  for i := 1 to k do
    while wiel[i] ≤  $\min(b + B, n)$  do
      p[wiel[i]] := false;
      wiel[i] := wiel[i] + pie[i];
  b := b + B;
```

Jeśli przyjmiemy  $n = 10^8$ , to pierwszy kod działa na moim komputerze 4,2 s. Pamięć podręczna w moim procesorze ma rozmiar 32 kB, zatem możemy przyjąć  $B = 32000$ . Wtedy drugi program działa w czasie 1,3 s, co daje ponadtrzykrotne przyspieszenie, mimo iż liczba operacji wykonywanych w pseudokodzie wzrosła!

Można, oczywiście, dalej optymalizować nasz algorytm, np. wyrzucić z tablicy  $p$  liczby parzyste i użyć tablicy bitowej. Można również przyjąć jako rozmiar bloku wielokrotność iloczynu małych liczb pierwszych i zauważyć, że wtedy wielokrotności tych liczb w każdym bloku są położone tak samo.

# O fizycznych podstawach badania zmian klimatu

Krzysztof TURZYŃSKI

Ocena tego, czy klimat na Ziemi się zmienia i jakie są kierunki tych zmian, wymaga dostępu do wiarygodnych informacji, jak ten klimat wyglądał w przeszłości.

W szczególności, prognozowanie zmian klimatu wymaga uwzględnienia wielu zjawisk, z których część charakteryzuje się długimi okresami zmienności. Tymczasem regularne pomiary temperatury powietrza za pomocą termometrów prowadzone są od zaledwie stulecia. Czy oznacza to, że jesteśmy skazani na proste ekstrapolacje i domysły?

Bynajmniej. Stosunkowo elementarne procesy fizyczne pozwalają nam zaglądać w klimatyczną przeszłość naszej planety. W tej krótkiej notatce omówimy dwa spośród wielu zjawisk pozwalających szacować temperaturę w dawno minionych wiekach.

Oprócz najbardziej rozpowszechnionych izotopów  $^{16}\text{O}$  i  $^1\text{H}$  „zwykła” woda we wszystkich stanach skupienia zawiera około 0,2% stabilnego izotopu  $^{18}\text{O}$ . Dokładna wartość zależy od pochodzenia wody. Woda pochodząca z opadów musiała kiedyś wyparować z oceanów, a ciepło parowania jest nieco mniejsze dla lżejszych izotopów. Prawdopodobieństwo wyparowania opisane jest rozkładem Boltzmann,

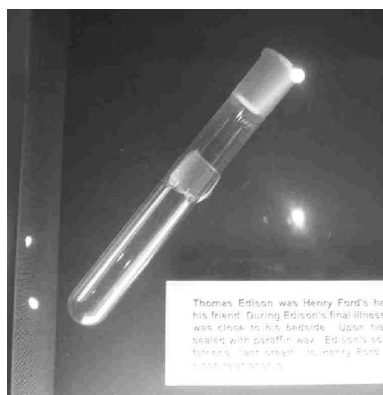
$$P \sim \exp(-E/kT),$$

i jest mniejsze dla cząsteczek wody zawierających  $^{18}\text{O}$ . Zależy ono także od temperatury: im temperatura wyższa, tym większy względny udział izotopu  $^{18}\text{O}$  w atmosferycznej parze wodnej. Ponieważ pokrywa lodowa w okolicach biegunów Ziemi bierze się przede wszystkim z opadów, badając próbki starego lodu pochodzącego z głębokich odwiertów, można wyznaczyć średnią temperaturę na Ziemi w czasie, kiedy ten lód powstawał. Uzyskane opisaną metodą dane wskazują na w miarę stabilną temperaturę w ciągu ostatnich 10 000 lat, wcześniej miała zaś miejsce epoka lodowcowa, przerywana jednak okresami gwałtownego ocieplenia. Porównując lód arktyczny z antarktycznym, można także zaobserwować występowanie tzw. huśtawki biegunowej, czyli oscylacyjnych zaburzeń światowego przepływu ciepła, powodujących, że po niewielkiej dodatniej fluktuacji temperatury na Grenlandii pojawia się z opóźnieniem jeszcze mniejsze ochłodzenie na Antarktydzie i odwrotnie.

Ludzka zapobiegliwość oraz naturalne procesy spowodowały, że mamy obecnie dostęp do próbek powietrza z różnych chwil w przeszłości. Można dzięki temu stwierdzić, że w połowie XVIII wieku atmosfera ziemską składała się w 0,0039% z pary wodnej, w 0,00028% z ditlenku węgla ( $\text{CO}_2$ ), mniej niż co milionowa jej cząsteczka była cząsteczką metanu ( $\text{CH}_4$ ). Energie drgań atomów tworzących te cząsteczki odpowiadają długości fali elektromagnetycznej rzędu mikrometrów; takie fale, emitowane z powierzchni Ziemi, są silnie absorbowane przez cząsteczki  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\text{CO}_2$  i  $\text{CH}_4$ , a potem w wyniku spontanicznej emisji częściowo zwracane. Powoduje to efekt cieplarniany, czyli znaczący wychwyt zwrotny ziemskiego ciepła: symulacje komputerowe pokazują, że nawet tak niewielka domieszka powyższych substancji, tzw. gazów cieplarnianych, powoduje podniesienie średniej temperatury na powierzchni Ziemi z  $-18^\circ\text{C}$ , przy ich nieobecności, do  $+15^\circ\text{C}$ . W antarktycznym lodzie można znaleźć uwiecznione bąbelki powietrza sprzed nawet 800 000 lat, a wyznaczenie stężenia zawartego w nich  $\text{CO}_2$  i  $\text{CH}_4$  pozwala oszacować średnią temperaturę powierzchni Ziemi w tak odległej przeszłości. Dostępne obecnie wyniki pokazują gwałtowny wzrost stężenia tych gazów cieplarnianych w ciągu ostatnich 250 lat:  $\text{CO}_2$  o 38%, a  $\text{CH}_4$  o 160%. Wzrost ten odróżnia się wyraźnie od długookresowych, stabilnych zmian stężenia tych substancji, jakie można zaobserwować w całym badanym okresie.

Czy opisane powyżej dane pozwalają z zadowalającą dokładnością przewidzieć, co stanie się z klimatem na Ziemi w ciągu najbliższych stu lat? Zadanie to jest niezwykle trudne, trzeba bowiem oprócz średniej temperatury uwzględnić także obieg wody w atmosferze i pamiętać, że ewentualne zmiany klimatu mogą silnie zależeć od regionu (używana w tym kontekście nazwa „globalne ocieplenie” jest więc dość myląca). Porównując przewidywania różnych symulacji, badacze wolą raczej szacować prawdopodobieństwa wystąpienia różnych zjawisk. Na przykład, prawdopodobieństwo zwiększenia średniej temperatury powierzchni Ziemi o co najmniej  $2^\circ\text{C}$  w wyniku stałej emisji gazów cieplarnianych na poziomie sprzed kilku lat (6 mln ton  $\text{CO}_2$  w 1990 roku i 8 mln ton  $\text{CO}_2$  w 2007 roku) szacuje się na 40–80%. Czy to dużo? Na to pytanie muszą sobie sami odpowiedzieć i decydenci kierujący światową gospodarką, i zwykli obywatele.

[Cytowane informacje pochodzą z wykładu T. Stockera wygłoszonego w CERN-ie we wrześniu 2009 r.]



Fiolka zawierająca ostatnie tchnienie Edisona, pobrane na łóżu śmierci, eksponowana jest na poczesnym miejscu w Muzeum Forda w Detroit.

Symulacje komputerowe wskazują, że podwojenie stężenia  $\text{CO}_2$  w atmosferze zwiększyłoby średnią temperaturę powierzchni Ziemi o  $3^\circ\text{C}$ .



## Rozwiązanie zadania F 796.

Powierzchnia wypływającej strugi cieczy tworzy kąt  $\alpha$  z poziomym promieniem światła. Z drugiej strony kąt ten jest wyznaczony przez stosunek składowej poziomej i pionowej cieczy:

$$\text{ctg } \alpha = \frac{v_{\text{pionowa}}}{v_{\text{pozioma}}} = \sqrt{\frac{r}{h}}.$$

Kąt  $\alpha$  jest kątem granicznym, jeśli  $\sin \alpha = 1/n$ , zatem:

$$h \leq \frac{r}{n^2 - 1}.$$

## Polityczne zwierzę

Krzysztof Szymborski napisał książkę „Polityczne zwierzę”. Łatwo się domyśleć, że chodzi o nas i że ta cecha „polityczności” nie dotyczy tylko intensywnych dyskutantów w parlamentach i mediach. Każdy z nas jest polityczny, bo włącza się w różne działania zmierzające do ustalenia swojego statusu społecznego, w walkę o władzę i dominację, czasami ta walka dotyczy po prostu stosunków w rodzinie.

Przypisanie zwierzętom naszych zachowań nie budzi chyba w nikim wątpliwości. Godzinami właściciele psów (przyjaciele psów) potrafią opowiadać o ich miłości, tęsknocie, inteligencji działań, wierności. . . Doszukujemy się analogii zachowań nawet u niżej stojących ewolucyjnie zwierząt, na przykład u mrówek, ryb. W ubiegłym roku jeden z polskich uczniów biorących udział w konkursie dla „młodych odkrywców” pokazał wyniki treningu dżdżownic, z których wynikało, że dżdżownice potrafią się uczyć (uważajcie, żeby po deszczu nie rozdeptać ich na drodze!).

Szymborski dużo uwagi poświęca bardziej oczywistym naszym kuzynom, szympansom. (Jest to gatunek uważany za nam najbliższy, nasz wspólny przodek żył 6 milionów lat temu, przez ten czas i my, i oni podlegaliśmy niezależnie ewolucji.) A z obserwacji szympanсів wybiera poszukiwanie odpowiedzi na pytanie o agresję wewnątrzgatunkową. Czy wojny i wzajemne zwalczanie się ludzi jest ich genetyczną i odziedziczoną po przodkach cechą, czy też wyrobiły je w nas warunki życia przez te 6 milionów lat samodzielnego ewoluowania?

Odpowiedzi na to pytanie szukali badacze szympanсів na wolności (niedawno pisałam o wizycie Jane Goodall w Polsce), ale także w dużych sztucznych rezerwach (np. wyspa otoczona fosą w Holandii). Z tych obserwacji wyniknęła wiedza o skomplikowanych politycznych grach wojennych grup szympanсів (rzadko, ale jednak zdarza się zabójstwo, często zadawanie ran), o złożonych scenariuszach walki o władzę, o powstawaniu zmiennych koalicji, które różnie się kończyły dla zainteresowanych.

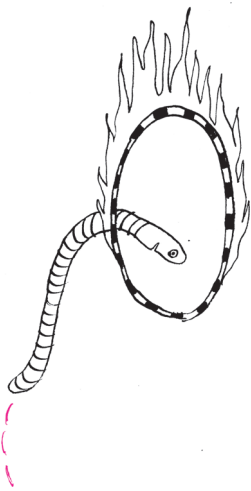
I kiedy podsumowuję za autorem książki te zachowania, to zaczynam widzieć szympansa w człowieku. Proszę, spójrzcie na charakterystykę socjalnych zachowań małp: tworzą one trwałe więzi między poszczególnymi osobnikami, rodzinne, grupowe; przejawiają zachowania agresywne, wynikające ze współzawodnictwa o pozycję w grupie; bardziej agresywni są pretendenci do władzy niż broniący swojej pozycji; wypracowały też pojednawcze rytuały łagodzenia sporów, a zachowania wzmacniające spójność grupy przeważają nad agresywnymi.

W społeczności szympanсів nie istnieje egalitaryzm, jest ona wyraźnie hierarchiczna pod względem dominacji i podporządkowania. Obowiązkiem samca alfa jest obrona społeczności przed zewnętrznym zagrożeniem. Konflikty łagodzone są przez ucieczkę lub demonstracyjne podporządkowanie. Szympanse mają zdolność do stosowania podstępów, w intencji wprowadzenia w błąd dla osiągnięcia strategicznych korzyści. Są wyraźnie zróżnicowane charakterologicznie, każdy reaguje na wydarzenia na swój sposób, co wpływa na ustalenie osobniczej pozycji i roli w społeczności.

Nie ma wątpliwości, że te cechy społeczne są wynikiem udanej, wielowiekowej adaptacji zwierząt do środowiska, tak aby przetrwać i wydać potomstwo, adaptacji powstałej, nim jeszcze pojawił się na świecie człowiek. Tyle, że one nie zdobyły umiejętności mowy i między innymi dlatego teraz w telewizji walczą na słowa ludzie, a nie szympanse.

Dla rozbawienia Czytelnika dodam, że rozmaite gatunki małp różnie pieczętują pojednanie: koczodany biorą się za ręce, bonobo odbywają stosunek seksualny, a szympanse całują się w usta.

Magdalena FIKUS



O G Ł O S Z E N I E

Z przyjemnością informujemy, że rozpoczyna się

### XIV Dolnośląski Festiwal Nauki

Imprezy odbywać się będą

16–21 września 2011

we Wrocławiu

23–24 września 2011

w Legnicy i Zgorzelcu

3–4 października 2011

w Głogowie

6–7 października 2011

w Jeleniej Górze i Bystrzycy Kłodzkiej

20–21 października 2011

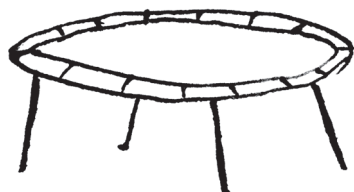
w Wałbrzychu

18–21 października 2011

w Żąbkowicach Śląskich–Dzierżoniowie

Zapraszamy w imieniu organizatorów

Redakcja

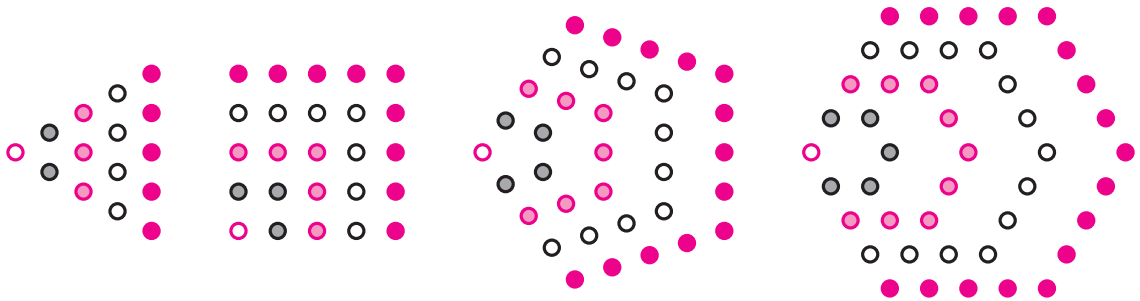


# 5

# mała delta

## Geometryczne liczby

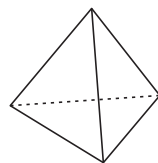
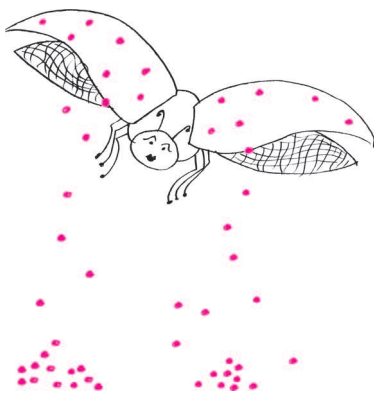
Trzy kółeczka łatwo ułożyć w trójkąt foremny (czyli równoboczny), cztery w czworokąt foremny (czyli kwadrat), pięć w pięciokąt foremny itd. Można więc 3 uważać za liczbę trójkątną, cztery za czworokątną, pięć za pięciokątną itd. Rysunki poniżej pokazują, jak można, rysując kropki, określić inne *liczby wielokątne*.



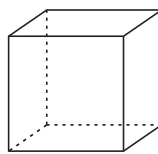
Jeśli umówimy się, że 1 jest liczbą  $n$ -kątną dla dowolnego  $n$ , to liczbami trójkątnymi będą 1, 3, 6, 10, ..., czworokątnymi 1, 4, 9, 16, ..., pięciokątnymi 1, 5, 12, 22, ..., sześciokątnymi 1, 6, 15, 28, ... Można znajdować i badać wynikające z obserwacji tych liczb prawidłowości: np.  $(n + 1)$ -szą liczbę trójkątną uzyskujemy, dodając do poprzedniej  $n + 1$ . Albo: suma  $n$  kolejnych liczb nieparzystych to  $n^2$ . W dawnych wiekach tego rodzaju spostrzeżenia dały początek pasjonującej do dziś wielu mistyków numerologii. Można też – bardziej matematycznie – znaleźć ogólny wzór na  $n$ -tą liczbę  $k$ -kątną. Może on wyglądać, na przykład,

$$\text{tak: } n + (k - 2) \cdot \frac{n(n - 1)}{2} \quad \text{lub tak: } n \cdot \frac{(k - 2)(n - 1) + 2}{2}.$$

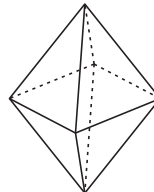
Oczywiście, w podobny sposób można układać z kuleczek wielościany. Gdybyśmy jednak chcieli trzymać się słowa *foremny*, które wystąpiło w definicji liczb wielokątnych, otrzymalibyśmy tylko pięć takich ciągów, bo istnieje tylko pięć wielościanów foremnych:



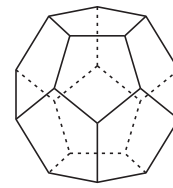
czworościan



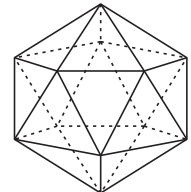
sześcian



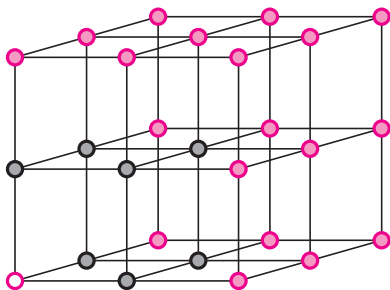
ośmiościan



dwunastościan



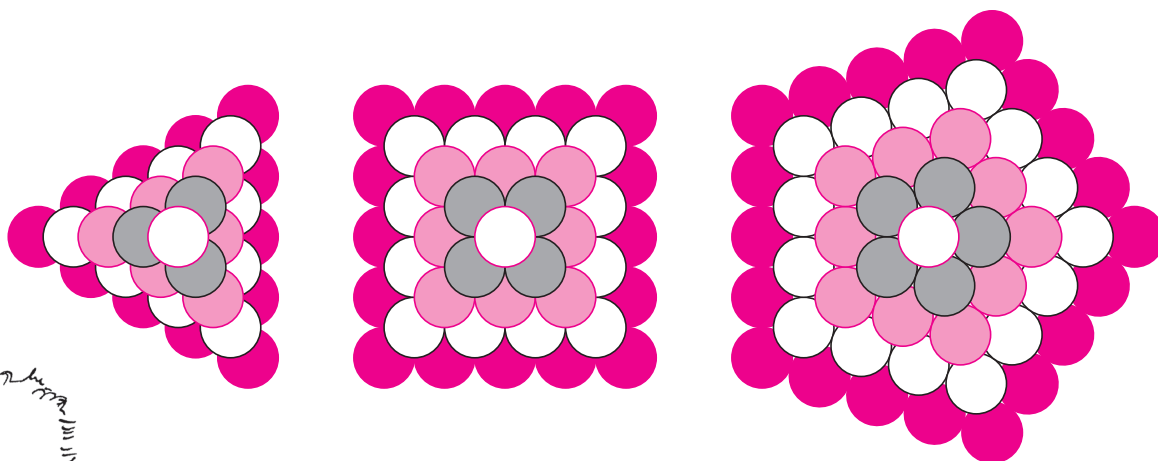
dwudziestościan



A na dodatek trudno określić, jak miałyby wyglądać kolejne wyrazy takich ciągów – zresztą proszę spróbować.

Dla sześcianu można to sobie jeszcze wyobrazić: 1, 8, 27, ... Może jeszcze dla czworościanu i ośmiościanu daje się coś wymyślić. Ale np. jak by to było dla dwudziestościanu?

Dlatego więc bardziej popularne są *liczby piramidalne*.



Jak widać na rysunkach, jest to wynik układania na kulkach reprezentujących  $n$ -tą liczbę  $k$ -kątną kulek reprezentujących  $(n - 1)$ -szą liczbę  $k$ -kątną, aż do pojedynczej kulki.

Na rysunku z lewej jest piąta liczba piramidalna trójkątna, czyli 35. Na pozostałych rysunkach można policzyć, ile kulek składa się na piątą liczbę piramidalną czworokątną i piątą liczbę piramidalną pięciokątną. Ale można też – korzystając z faktu, że  $n$ -ta liczba piramidalna  $k$ -kątna jest sumą początkowych  $n$  liczb  $k$ -kątnych – wyprowadzić sobie wzór na nią. Proszę sprawdzić, że otrzymamy

$$\frac{n(n+1) \cdot ((k-2)(n-1) + 3)}{6}$$

Dla liczb piramidalnych czworokątnych będzie to akurat suma kwadratów początkowych  $n$  liczb. A czy są tu jeszcze jakieś inne ciekawostki?

Od sytuacji dwuwymiarowej (wielokąty) przeszliśmy do sytuacji trójwymiarowej (piramidy, czyli wielościany), a co dalej? Gdy braknie nam wyobraźni, zawsze mamy jeszcze możliwość posługiwania się analogiami. Liczby piramidalne, czyli trójwymiarowe, otrzymaliśmy przez sumowanie liczb wielokątnych, czyli dwuwymiarowych. Możemy więc – przez analogię – przyjąć następującą definicję:

*$n$ -tą liczbą  $k$ -kątną  $w$ -wymiarową nazywamy liczbę będącą sumą pierwszych  $n$  liczb  $k$ -kątnych  $(w - 1)$ -wymiarowych.*

Jakie to liczby? Początek znamy:  $n$ -te liczby  $k$ -kątnie dwuwymiarowa i trójwymiarowa to (patrz wyżej)

$$\frac{n}{2}((k-2)(n-1) + 2) \quad \text{i} \quad \frac{n(n+1)}{6}((k-2)(n-1) + 3).$$

Wpadamy więc na pomysł, że może  $n$ -ta liczba  $k$ -kątna czterowymiarowa to

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{24}((k-2)(n-1) + 4).$$

Drogi Czytelniku, sprawdź, korzystając z definicji, że ten pomysł jest rzeczywiście trafny.

A dla prawdziwych Bohaterów Zmagania Rachunkowych mamy do sprawdzenia dwie postacie wzoru na  $n$ -tą liczbę  $k$ -kątną  $w$ -wymiarową

$$\binom{n+w-1}{w} \cdot \frac{(k-2) \cdot (n-1) + w}{n+w-1} = \binom{n+w-2}{n-1} \cdot \frac{(k-2) \cdot (n-1) + w}{w}.$$

Użyty obok symbol Newtona  $\binom{p}{q}$  to skrót napisu

$$\frac{p!}{q!(p-q)!}$$

\*student, Wydział Matematyki, Fizyki i Informatyki, Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie

Małą Deltę przygotował Michał KOSACKI\*



## Informatyczny kącik olimpijski (45): Wypisz napis

W tym kąciku omówimy pierwsze zadanie z finału konkursu Google Code Jam 2010. Mamy dany napis  $w[1..n]$  złożony z  $n$  liter ze zbioru  $\{A, B, C\}$ . Naszym celem jest wypisanie kolejno liter tego napisu od lewej do prawej. Mamy do dyspozycji stempel, który możemy wyobrazić sobie jako stos, umożliwiający wykonywanie trzech typów operacji: doczepienie plakietki z literą A, B lub C, odcięcie plakietki znajdującej się na wierzchu oraz przyłożenie stempla do kartki, w wyniku czego nadrukowuje się na niej litera z wierzchniej plakietki. Chcemy wypisać  $w$  za pomocą najmniejszej możliwej liczby operacji, przy czym zaczynamy i kończymy z pustym stemplem (stosem).

Jednym z pierwszych pomysłów na rozwiązanie może być programowanie dynamiczne. Wyznaczamy w nim kolejne komórki tablicy  $t[i][S]$ , oznaczające, w jakiej minimalnej liczbie operacji można wypisać początkowy fragment napisu,  $w[1..i]$ , tak aby na końcu otrzymać stos reprezentowany przez napis  $S$  (nad alfabetem  $\{A, B, C\}$ ). Wynikiem jest wówczas  $t[n][\emptyset]$ . Przy tym podejściu nieuchronnie napotykamy problem, że liczba możliwych stosów jest naprawdę duża. Zauważmy, że nigdy na stosie nie opłaca nam się trzymać więcej niż  $n$  liter, gdyż wówczas musielibyśmy łącznie wykonać ponad  $3n$  operacji, a w  $3n$  operacjach naprawdę łatwo wypisać cały napis  $w$ . Czyli mamy co najwyżej  $3^n$  różnych stosów, ale do tego jeszcze mnóstwo możliwych przejść z każdego stanu  $t[i][S]$  do stanów postaci  $t[i+1][S']$ .

Pokażemy teraz, jak trochę polepszyć to rozwiązanie. Przede wszystkim na stosie ewidentnie nie opłaca się nigdy trzymać dwóch takich samych liter pod rząd. To redukuje liczbę interesujących nas stosów do  $O(2^n)$ . Możemy też istotnie zmniejszyć liczbę rozważanych przejść, jeśli zauważymy, że w danym stanie wystarczy próbować dołożyć na stos co najwyżej jedną nową literkę. Skrótowe uzasadnienie na przykładzie: zamiast w danym stanie dokładać na stos literki AB, wystarczy dołożyć samą literkę B. Jeśli potem, po zdjęciu B, będę chciał użyć tego A, którego nie dołożyłem, to dokładam to A właśnie wtedy. Liczba operacji nie zwiększyła się, a postąpiłem jakby sprytniej. W ten sposób zmniejszyliśmy liczbę przejść z danego stanu do  $O(n)$  (dodanie co najwyżej jednej literki i usunięcie dowolnie wielu literek), co daje już rozwiązanie o koszcie czasowym  $O(2^n n^2)$ . Wyraźnie lepiej niż poprzednio, ale wciąż jakoś wolno.

Spróbujmy więc zmienić podejście do rozwiązania. Przyjrzyjmy się sytuacji początkowej. Zaczynamy od pustego stosu, a chcemy wypisać literkę  $w[1]$ , więc musimy ją włożyć na stos. Oznaczmy przez  $i$  „moment”, po którym  $w[1]$  zostanie zdjęte ze stosu, tzn. założymy, że  $w[1]$  znajduje się na spodzie stosu podczas wypisywania liter fragmentu  $w[2..i]$ , po czym zostaje zdjęte ze stosu ( $1 \leq i \leq n$ ). Podzieliliśmy zatem wyjściowy problem na dwa niezależne podproblemy, polegające na wypisaniu każdego z fragmentów  $w[2..i]$  oraz  $w[i+1..n]$ , tak aby na końcu zdjąć ze stosu wszystkie dołożone

po drodze litery. Jedyna różnica między podproblemami polega na tym, że podczas wypisywania  $w[2..i]$  możemy skorzystać z faktu, iż na stosie jest już litera  $w[1]$ .

To prowadzi nas do innego rozwiązania opartego na programowaniu dynamicznym. Przez  $q[i][j][c]$  oznaczmy minimalną liczbę operacji potrzebnych do wypisania fragmentu  $w[i..j]$ , tak aby nie pozostawić na końcu żadnych dodatkowych liter na stosie. A to wszystko przy założeniu, że na szczycie stosu przed rozważeniem tego fragmentu znajduje się literka  $c \in \{A, B, C, \emptyset\}$ ;  $\emptyset$  oznacza, że przed rozpoczęciem wypisywania  $w[i..j]$  stos był pusty. Dodajmy dla jasności, że literki  $c$ , ani niczego poniżej, nie możemy tu usunąć ze stosu. Przykładowo, wartości postaci  $q[i][j][A]$  obliczamy następująco: jeśli  $w[i] = A$ , to  $q[i][j][A] = q[i+1][j][A] + 1$ , a w przeciwnym razie

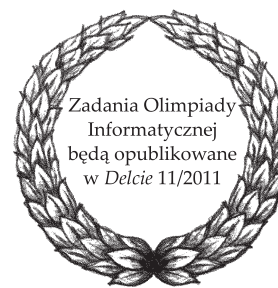
$$q[i][j][A] = \min\{q[i+1][k][w[i]] + q[k+1][j][A] + 3 : k = i, \dots, j\}.$$

Przy tym  $q[i][j][c] = 0$  dla  $i > j$ . Takie rozwiązanie ma złożoność czasową  $O(n^3)$  – pozwalało to zdobyć częściowe punkty na zawodach.

Istnieje zatem jeszcze lepsze rozwiązanie. Co ciekawe, aby je uzyskać, należy wrócić do poprzedniego, wykładniczego rozwiązania, i jeszcze dokładniej przyjrzeć się możliwym zawartościom stosu. Kluczowa obserwacja to: można nie rozważać stosów, w których występuje fragment ABA. Faktycznie, rozważmy rozwiązanie, w którym na stosie pojawia się fragment tej postaci, i przyjrzyjmy się chwili, w której umieszczamy na stosie drugą z liter A. Zróbmy jednak inaczej: zamiast umieszczać drugie A, usuńmy ze stosu literkę B. Liczba operacji nie zmieniła się, a na szczycie stosu wciąż mamy A. Dalej wykonujemy rozwiązanie bez zmian, aż do chwili, w której próbuje ono zdjąć ze stosu to drugie A, którego teraz nie ma. W zamian włóżmy na stos literkę B. Liczba operacji nie zmieniła się, układ liter na stosie również. W ten sposób pozbyliśmy się jednego wystąpienia fragmentu ABA; jeśli jest ich więcej, eliminujemy je w ten sam sposób.

Podobnie można uzasadnić, że możemy nie rozważać stosów zawierających fragment  $xyx$  dla dowolnych, różnych liter  $x$  i  $y$ . Stosów bez takich napisów jest już bardzo mało: są to tylko stosy postaci ABCABC..., BACBAC... i jeszcze czterech innych (dowolna permutacja liter A, B, C na początku). Tak oto tablica  $t$  skurczyła się nam do rozmiaru  $O(n^2)$ . Wreszcie liczbę przejść z każdego stanu możemy zmniejszyć do stałej, korzystając ze spostrzeżenia, że jeśli przy wypisywaniu  $w[i]$  decydujemy się na usuwanie liter ze stosu, to możemy to robić do chwili, gdy po raz pierwszy na szczycie stosu znajdzie się litera  $w[i]$  lub gdy stos stanie się pusty. To oznacza, że w danym stanie usuniemy ze stosu co najwyżej dwie literki (lub wszystkie) i dodamy na stos co najwyżej jedną. W ten sposób uzyskaliśmy rozwiązanie wzorcowe, o złożoności czasowej  $O(n^2)$ .

Jakub RADOSZEWSKI



# Olimpiada

## Zadania zawodów I stopnia Olimpiad: Astronomicznej, Fizycznej, Matematycznej oraz Matematycznej Gimnazjalistów 2011/2012

### LV Olimpiada Astronomiczna Informacje regulaminowe

1. Olimpiada Astronomiczna jest organizowana dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych.
2. Zawody olimpiady są trójstopniowe. W zawodach I stopnia (szkolnych) każdy uczestnik rozwiązuje dwie serie zadań, w tym zadanie obserwacyjne.
3. W pierwszej serii zadań zawodów I stopnia należy nadesłać, **do 10 października 2011 r.**, rozwiązania 3 zadań dowolnie wybranych przez uczestnika spośród zestawu zawierającego 4 zadania.
4. Uczniowie, którzy przyślą rozwiązania zadań pierwszej serii, otrzymają do końca października bieżącego roku tematy drugiej serii zadań. Zadania obydwu serii będą również umieszczane na stronie internetowej Olimpiady Astronomicznej: <http://planetarium.edu.pl/oa.htm>.
5. Rozwiązanie zadania obserwacyjnego należy przesłać wraz z rozwiązaniami zadań drugiej serii zawodów I stopnia, **do 14 listopada 2011 r.** Decyduje data stempla pocztowego. Nadesłanie rozwiązania zadania obserwacyjnego jest warunkiem koniecznym dalszego udziału w olimpiadzie.
6. W przypadku nadesłania rozwiązań większej liczby zadań z danego zestawu, do klasyfikacji zaliczane będą rozwiązania ocenione najwyżej (po trzy zadania z każdej serii i jedno zadanie obserwacyjne).
7. Rozwiązania zadań zawodów I stopnia należy przesłać za pośrednictwem szkoły pod poniższym adresem
8. Rozwiązania zadań powinny być krótkie i zwięzłe, ale z wystarczającym uzasadnieniem. W przypadku polecenia samodzielnego wyszukania danych należy podać ich źródło. Jako dane traktuje się również podręcznikowe stałe astronomiczne i fizyczne.
9. Rozwiązanie każdego zadania należy napisać na oddzielnym arkuszu papieru formatu A4. Każdy arkusz oraz wszelkie załączniki (mapki, wykresy, tabele itp.) należy podpisać imieniem i nazwiskiem. W nagłówku zadania o najniższej numeracji należy umieścić dodatkowo: pełną nazwę szkoły, jej adres, klasę i jej profil oraz adres prywatny (z kodami pocztowymi), imię i nazwisko nauczyciela fizyki. **Dodatkowo, do rozwiązań pierwszej serii zadań należy dołączyć wypełnioną ankietę uczestnika dostępną na stronie internetowej olimpiady.**
10. Zawody II stopnia odbędą się **16.01.2012 r.** Zawody III stopnia odbędą się w dniach **od 8 do 11 marca 2012 r.**
11. Powiadomienia o zakwalifikowaniu do zawodów kolejnych stopni otrzymają jedynie uczniowie awansujący.
12. O uprawnieniach w przyjmowaniu na wyższe uczelnie laureatów i finalistów olimpiady decydują senaty uczelni. Informacje na ten temat są umieszczane na ich stronach internetowych.

Komitet Główny Olimpiady Astronomicznej  
Planetarium Śląskie  
41-500 Chorzów, skr. poczt. 10

## Pierwsza seria zadań zawodów I stopnia

1. W 2008 roku doniesiono, że planetoida podwójna 2001 QW<sub>322</sub> składa się z prawie identycznych składników poruszających się wokół wspólnego środka masy. Średnia odległość między nimi wynosi około 240 tysięcy km, a okres obiegu około 27 lat. Oszacuj, jak trwałym obiektem jest ta podwójna planetoida, przyjmując, że jej orbita jest kołowa. W tym celu oblicz, ile energii trzeba dostarczyć, aby układ ten rozseparować.

2. Przedstaw graficznie zmiany długości dnia w ciągu roku w Jastrzębiej Górze i Ustrzykach Górnych. Przyjmij, że moment wschodu i zachodu Słońca następuje wtedy, gdy środek tarczy słonecznej znajduje się na wysokości  $h = -51'$ . Podaj wnioski wynikające z porównania tych wykresów. Niezbędne dane liczbowe wyszukaj samodzielnie.

3. Przyjmując dane liczbowe zamieszczone w tabelce, oblicz długość doby słonecznej na Merkury i Wenus, przy założeniu orbit kołowych obu planet.

Planeta	Okres obiegu wokół Słońca [doby]	Gwiazdowy okres rotacji [doby]
Merkury	87,969	58,647
Wenus	224,70	-243,02

*Uwaga:* Znak minus przy okresie rotacji Wenus oznacza obrót wsteczny.

4. Sztucznego satelitę Ziemi zaobserwowano w apogeum jego orbity. Wyznaczona odległość satelity od środka Ziemi wynosiła wtedy  $d$  kilometrów, a geocentryczna prędkość kątowna satelity wynosiła  $\omega$  radianów na sekundę. Zakładamy również znajomość masy Ziemi  $M_Z$ . Wyprowadź wzór pozwalający z tych danych obliczyć, po jakim czasie od momentu dokonanych pomiarów należałoby obserwować satelitę, aby prześledzić jego ruch w pobliżu perygeum. Położenie obserwatora, kształt i usytuowanie orbity umożliwiają obserwację obu tych położenia satelity na orbicie.

## Zadania obserwacyjne

*Rozwiązanie zadania obserwacyjnego powinno zawierać: dane dotyczące przyrządów użytych do obserwacji i pomiarów, opis metody i programu obserwacji, standardowe dane dotyczące przeprowadzonej obserwacji (m.in. datę, czas, współrzędne geograficzne, warunki atmosferyczne), wyniki obserwacji i ich opracowanie oraz ocenę dokładności uzyskanych rezultatów. Wykonaną obserwację astronomiczną należy odpowiednio udokumentować.*

1. Wykonaj fotografię okolicy zenitu w taki sposób, aby było możliwe określenie jego położenia. Na podstawie otrzymanej fotografii wyznacz szerokość geograficzną miejsca swojej obserwacji.

2. Dokonaj zliczeń gwiazd na kilku wykonanych przez siebie fotografiach nieba zrobionych tym samym aparatem fotograficznym. Wyznacz szacunkową liczbę gwiazd na całej sferze niebieskiej, będących w zasięgu tego aparatu. Załóż, że gwiazdy są rozłożone na niebie losowo.

3. Jako rozwiązanie zadania obserwacyjnego można również nadesłać opracowane wyniki innych własnych obserwacji prowadzonych w ostatnim roku.

**Rozwiązanie jednego zadania obserwacyjnego należy nadesłać wraz z rozwiązaniami drugiej serii zadań zawodów I stopnia – do dnia 14 listopada 2011 r.**

## Zalecana literatura

- Obowiązujące w szkołach podręczniki do przedmiotów ścisłych.
- H. Chrupała, M. T. Szczepański, *25 lat olimpiad astronomicznych*.
- H. Chrupała, *Zadania olimpiad astronomicznych XXVI–XXXV* (w dwóch częściach).
- H. Chrupała, J. M. Kreiner, M. T. Szczepański, *Zadania z astronomii z rozwiązaniami*.
- J. M. Kreiner, *Astronomia z astrofizyką*.
- J. M. Kreiner, *Ziemia i Wszechświat – astronomia nie tylko dla geografów*.
- *Słownik szkolny – Astronomia* (praca zbiorowa).
- *Encyklopedia szkolna – fizyka z astronomią* (praca zbiorowa).
- Atlas nieba. Obrotowa mapa nieba.
- Czasopisma: *Delta*, *Fizyka w Szkole*, *Świat Nauki*, *Urania – Postępy Astronomii*, *Wiedza i Życie*.
- Poradniki i kalendarze astronomiczne dla obserwatorów nieba.



# LXI Olimpiada Fizyczna

## Zadania zawodów I stopnia

Rozwiązania zadań I stopnia należy przysyłać do **Okręgowych Komitetów Olimpiady Fizycznej** w terminach:

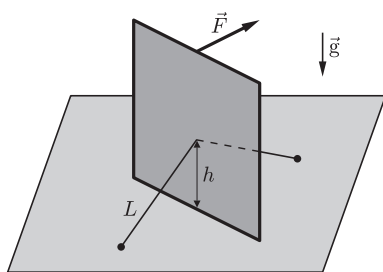
**część I – do 15 października br., część II – do 15 listopada br.**

O kwalifikacji do zawodów II stopnia będzie decydować suma punktów uzyskanych za rozwiązania zadań części I i II. Szczegóły dotyczące regulaminu oraz organizacji Olimpiady można znaleźć na stronie internetowej [www.kgof.edu.pl](http://www.kgof.edu.pl).

### Część I

**Uwaga: Rozwiązania zadań należy zamieścić w kolejności zgodnej z ich numeracją. Wszystkie strony pracy powinny być ponumerowane. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy. Na pierwszym arkuszu pracy dodatkowo należy podać nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki.**

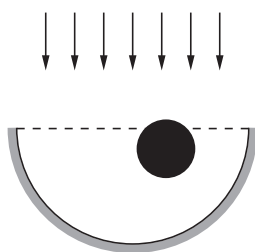
**Podaj i krótko uzasadnij odpowiedź. Za każde z 15 zadań można otrzymać maksymalnie 4 punkty.**



Rys. 1

1. Sztywna płyta stoi pionowo na podłodze. Aby unieruchomić ją w tej pozycji, postanowiono umocować ją za pomocą dwóch lin długości  $L$  każda (patrz rysunek 1). Niech  $F$  będzie prostopadłą do powierzchni płyty siłą przyłożoną do górnej krawędzi płyty, powodującą zerwanie jednej z lin. Na jakiej wysokości  $h$  liny powinny być przymocowane do płyty (dobierając przy tym odpowiednie miejsce zamocowania w podłożu), aby  $F$  było jak najmniejsze? Zakładamy, że liny są bardzo mało rozciągliwe i nie ulegają wyrwaniu ani z mocowania w podłożu, ani z mocowania w płycie. Wysokość płyty jest większa niż  $L$ , a jej dolna krawędź nie przesuwa się.

2. Mamy do dyspozycji idealne półsferyczne lustro o promieniu  $R$  (rysunek 2). Oś optyczna lustra jest ustawiona w kierunku Słońca. W którym miejscu należy umieścić czarną, metalową kulkę o promieniu  $R/4$ , aby jak najszybciej się ona nagrzała? Przyjmij, że promienie światła ze Słońca tworzą wiązkę równoległą.

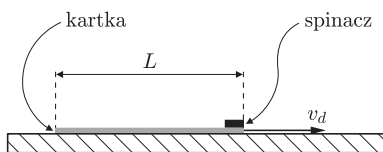


Rys. 2

3. Na poziomym, długim stole leży kartka papieru długości  $L$ , a na kartce, tuż przy jej krótszej krawędzi, leży spinacz biurowy. Współczynnik tarcia między kartką a spinaczem wynosi  $\mu$ . W pewnym momencie kartkę nadajemy (w przybliżeniu natychmiastowo) prędkość  $v_d$  (patrz rysunek 3). Ile powinno wynosić  $v_d$ , aby nadać spinaczowi jak największą prędkość względem stołu? Rozmiary spinacza są małe w porównaniu z  $L$ .

4. Wokół pewnej planety krąży wielki wąż w pozycji pionowej (wzdłuż promienia poprowadzonego do planety), na stałej wysokości nad planetą. W pewnej chwili wąż zwinął się w niewielki kłębek. Czy jego orbita będzie kołowa, czy zacznie się on oddalać od planety, czy zbliżać do niej?

5. Gdy na pewną płytkę płasko-równoległą z bezbarwnego szkła pada prostopadle wiązka światła o natężeniu  $I_0$ , to natężenie wiązki przechodzącej wynosi  $p \cdot I_0$ , a wiązki odbitej  $(1 - p) \cdot I_0$ . Jakie będzie natężenie wiązki przechodzącej przez dwie takie płytki, umieszczone równolegle jedna za drugą? W rozważanym przypadku nie występuje interferencja (wiązka nie jest koherentna).

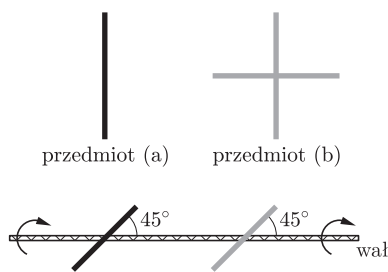


Rys. 3

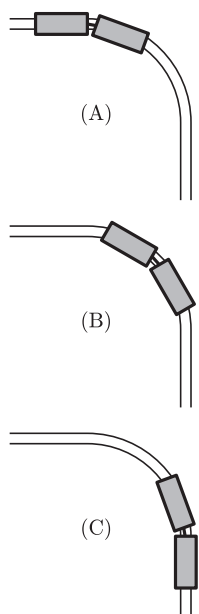
6. Czy skacząc na bungee można zwiększyć minimalną odległość, na jaką zbliżymy się do ziemi, jeśli nasza prędkość początkowa będzie niezerowa? Przyjmij, że guma bungee spełnia prawo Hooke'a i pomij opór powietrza.

7. Są ludzie, którzy twierdzą, że Elvis Presley nadal żyje. Podaj przykład obserwatora (jego odległość i prędkość wraz z kierunkiem i zwrotem), dla którego w chwili (mierzonej przez ciebie), gdy piszesz rozwiązanie tego zadania, jest to prawda. Przyjmij w przybliżeniu, że Elvis zmarł w miejscu, w którym się znajdujesz. Potrzebne dane znajdź w dostępnych ci źródłach.

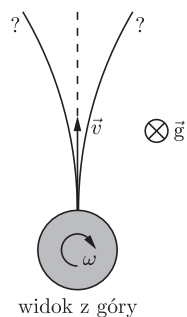
8. Działo elektromagnetyczne składa się z dwóch równoległych, odległych o  $d$ , poziomych, bardzo długich szyn, po których porusza się prostopadła do szyn, łącząca je metalowa belka o masie  $m$ . Szyny znajdują się w pionowym polu magnetycznym o natężeniu  $B$ . Jaka jest prędkość graniczna belki, jeśli do szyn podłączymy napięcie  $U$ ? Pomij opory ruchu belki.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

9. Rozważmy dwa przedmioty o takich samych masach (patrz rysunek 4): a) jednorodny pręt, b) tworzące krzyż dwa jednorodne pręty. Dla każdego z tych przedmiotów moment bezwładności względem osi przechodzącej przez jego środek i prostopadłej do niego jest taki sam. Każdy z tych przedmiotów umocowano na cienkim wale, tworzącym z nim kąt  $45^\circ$  (patrz rysunek 4), a następnie zaczęto obracać wałem (i przedmiotami) ze stałą prędkością kątową. W przypadku którego przedmiotu moment siły, z jakim działa on na wał, jest większy?

10. Wszystkie linie kolejowe w Paflagonii są kręte. Koleje Paflagońskie korzystają z tego, stosując w swoich pociągach nowatorski system napędu: silniki zginają lub wyprostowują złącza międzywagonowe. W których momentach (patrz rysunek 5) silnik powinien działać w kierunku zgięcia, a w których – w kierunku wyprostowania złącza?

11. Jaki jest maksymalny zasięg strzału na Księżycu pocisku wylatującego z działa z prędkością  $1800 \text{ m/s}$ ? Potrzebne dodatkowe dane wyszukaj w dostępnych ci źródłach.

12. W pewnej odległości od ładunku punktowego  $q$  znajduje się mała, dielektryczna kulka. Jak zmieni się (ile razy wzrośnie/zmaleje) wartość siły elektrostatycznej działającej na tę kulkę, jeśli dwukrotnie wzrośnie wartość ładunku punktowego?

13. Jednorodnemu walcowi nadano pewną prędkość kątową wokół jego osi, a następnie nadano mu prędkość  $\vec{v}$  wzdłuż podłogi (patrz rysunek 6). Zauważono, że jeśli wysokość walca nie jest mała w porównaniu z jego promieniem, to tor ruchu walca odchyła się w porównaniu z kierunkiem  $\vec{v}$ . W którą stronę i dlaczego? Podłoga jest pozioma, a walec styka się z nią podstawą. Pomiń wpływ powietrza, ale uwzględnij tarcie walca o podłogę.

14. Na małą kulkę metalową (średnicy np.  $3 \text{ mm}$ ) skierowano wiązkę światła laserowego i obserwowano cień kulki na ekranie. Jeśli ktoś twierdzi, że widział jasny punkt w środku cienia, to dlatego, że: a) uległ złudzeniu optycznemu wynikającemu z kontrastu cienia z jasnym otoczeniem, b) w kulce musiał być niewielki otworek (kanalik), c) światło lasera jest tak silne, że wiązka przenika przez kulę, d) przyczyną zjawiska są zjawiska falowe – dyfrakcja i interferencja światła, e) przyczyną zjawiska jest poprzeczny charakter fali świetlnej i przejście polaryzacji liniowej w kołową.

15. W magazynie paliwa jądrowego znajdują się kule o identycznym promieniu i identycznej wadze, zawierające pluton pokryty pochłaniającą promieniowanie powłoką z ołowiu. Niektóre kule zawierają czysty izotop  $^{238}\text{Pu}$  (okres połowicznego rozpadu  $87,7 \text{ lat}$ ), a inne – czysty izotop  $^{244}\text{Pu}$  (okres połowicznego rozpadu ponad  $80 \text{ milionów lat}$ ). Niestety, oznaczenia na kulach się zagubiły. Jaka najprostsza metoda pozwoli na odróżnienie kul bez uszkodzania ochronnej warstwy ołowiu?

## Część II

**Uwaga: Rozwiązanie każdego zadania powinno być napisane na oddzielnym arkuszu papieru podaniowego. Na każdym arkuszu należy umieścić: imię, nazwisko i adres autora pracy, nazwę i adres szkoły, klasę oraz imię i nazwisko nauczyciela fizyki. Do pracy należy dołączyć kopertę zaadresowaną do siebie.**

### Zadania teoretyczne

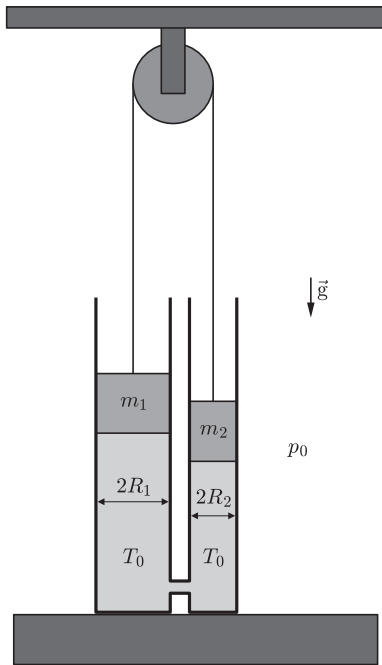
**Przesłać należy rozwiązania trzech (i tylko trzech) dowolnie wybranych zadań teoretycznych. Za każde z trzech zadań można otrzymać maksymalnie 20 punktów.**

**T1.** Dwa pionowo ustawione cylindry o promieniach wewnętrznych odpowiednio  $R_1$  oraz  $R_2$  zamknięte są od góry szczelnymi, mogącymi się swobodnie przesuwać tłokami. Cylindry połączone są rurką, a w ich wnętrzu znajduje się gaz doskonały o molowym cieple właściwym przy stałej objętości równym  $C_V$ . Tłoki połączone są linką przerzuconą przez bloczek (patrz rysunek 7).

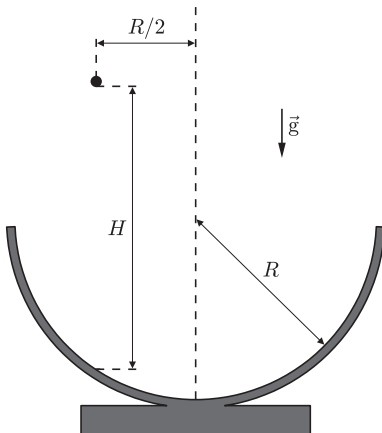
Początkowo układ jest w równowadze mechanicznej i termodynamicznej, przy czym liczba moli gazu wynosi  $n$ , jego temperatura –  $T_0$ , a linka jest napięta.

- Ile ciepła należy dostarczyć do gazu, aby jego temperatura wzrosła o  $\Delta T$ ?
- O ile przesuną się przy tym tłoki?

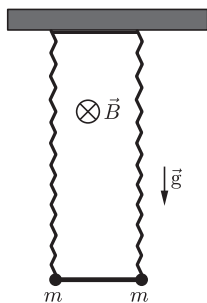
Przyjmij, że gaz nie oddaje ciepła cylindrom, tłokom, rurce ani otoczeniu. Gaz jest tak podgrzewany, że jego temperatura w obu cylindrach jest stale taka sama i zmienia się bardzo powoli. Pomiń tarcie. Na zewnątrz układu znajduje się powietrze o ciśnieniu  $p_0$ . Masy cylindrów wynoszą odpowiednio  $m_1$  oraz  $m_2$ . Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .



Rys. 7



Rys. 8



Rys. 9

Podaj wartości liczbowe szukanych wielkości dla  $\Delta T = 10 \text{ K}$ ,  $C_V = \frac{5}{2}R$ ,  $R_1 = 0,05 \text{ m}$ ,  $R_2 = 0,03 \text{ m}$ ,  $m_1 = 5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 1 \text{ kg}$ ,  $n = 0,05 \text{ mol}$ ,  $T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ ,  $g = 9,81 \text{ m/s}^2$ . Uniwersalna stała gazowa  $R = 8,3 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)}$ .

**T2.** Małą kulkę puszcza się swobodnie z pewnej wysokości do wnętrza kulistej czaszy o promieniu  $R$  (patrz rysunek 8). Odległość punktu, z którego puszcza się kulkę, od osi czaszy wynosi  $R/2$ . Po czterokrotnym odbiciu się od wnętrza czaszy, kulka powróciła do miejsca z którego została puszczone. Jaka była początkowa wysokość  $H$  kulki nad miejscem jej pierwszego odbicia?

Odbicia są doskonale sprężyste. Pomiń opór powietrza i ruch obrotowy kulki. Przyspieszenie ziemskie wynosi  $g$ .

**T3.** Na dwóch identycznych, metalowych sprężynach o współczynnikach sprężystości  $k$  wiszą dwa identyczne ciężarki o masie  $m$  każdy. Sprężyny znajdują się w odległości  $l$  od siebie, a ich dolne końce połączone są sztywnym, metalowym prętem o pomijalnie małej masie. Sprężyny połączone są w punkcie zawieszenia przewodem elektrycznym. Cały układ znajduje się w prostokątnym do jego płaszczyzny jednorodnym polu magnetycznym o indukcji  $B$  (patrz rysunek 9). Całkowity opór elektryczny obwodu wynosi  $R$ .

Wyznacz stosunek ciepła wytwarzanego w obwodzie w trakcie jednego drgania do energii mechanicznej układu, jeśli w chwili początkowej ciężarki spoczywają w odległościach odpowiednio  $z_1$  oraz  $z_2$  poniżej ich położenia równowagi, gdzie:

- $z_1 = d$ ,  $z_2 = d$ ;
- $z_1 = -d$ ,  $z_2 = d$ ;
- $z_1 = 0$ ,  $z_2 = d$ .

Dla każdego z rozpatrywanych przypadków opisz ruch układu po bardzo długim czasie.

Pole magnetyczne wytwarzane przez obwód jest pomijalnie małe w porównaniu z  $B$ . Pomiń też opór powietrza i masy sprężyn. Przyjmij, że sprężyny pozostają stałe pionowe ( $d \ll l$ ), nie wyginają się, a ich rozmiary poprzeczne (szerokość nawinięcia) są małe w porównaniu z  $d$ . Załóż, że ciepło wydzielane w obwodzie w trakcie jednego drgania jest bardzo małe w porównaniu z energią mechaniczną układu (ale całkowite ciepło wydzielone po rozpatrywaniu w drugim poleceniu bardzo długim czasie jest porównywalne z tą energią).

Dla każdego z rozpatrywanych przypadków podaj wartość liczbową szukanego współczynnika dla  $B = 0,05 \text{ T}$ ,  $l = 0,2 \text{ m}$ ,  $R = 0,1 \Omega$ ,  $k = 100 \text{ N/m}$ ,  $m = 0,1 \text{ kg}$ ,  $d = 0,01 \text{ m}$ .

**T4 (numeryczne).** Rozważmy ośrodek optyczny o współczynniku załamania zależnym od współrzędnej  $y$

$$n(x, y) = n_0 + by^2,$$

gdzie  $n_0 = 10$ ,  $b = -10 \frac{1}{\text{m}^2}$ . Będziemy rozważali bieg promieni światła w płaszczyźnie  $(x, y)$ .

a) Przedstaw na wykresie biegi promieni, które wylatują z punktu  $x = 0$ ,  $y = 0$  dla kątów  $\alpha_0$ , jakie te promienie tworzą z osią  $y$  w punkcie początkowym, równych  $10^\circ$ ,  $20^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $55^\circ$ ,  $65^\circ$ ,  $70^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $80^\circ$ ,  $85^\circ$ ,  $86^\circ$ ,  $87^\circ$ ,  $88^\circ$ ,  $89^\circ$ ,  $90^\circ$ .

Skalę i wielkość wykresu dobierz tak, by był na nim widoczny przebieg każdego z wymienionych promieni, z wyjątkiem odpowiadającego  $\alpha_0 = 90^\circ$ , od punktu początkowego aż do przecięcia z osią  $y = 0$ .

b) Czy na podstawie wykresu z punktu a) można przyjąć, że dla pewnego zakresu kątów  $\alpha_0$  promienie ogniskują się w przybliżeniu w jednym miejscu (ognisku)? Jeśli tak, podaj położenie tego ogniska.

*Wskazówka:* Z prawa załamania wynika, że w rozważanym przypadku kąt, jaki promień tworzy promień z osią  $y$ , jest wyznaczony przez współrzędną  $y$  i warunki początkowe. Na tej podstawie można określić schemat postępowania pozwalający wyznaczyć bieg promienia:

- ustawiamy „foton” w punkcie początkowym;
- przesuwamy „foton” o małą odległość  $d$  zgodnie z kierunkiem promienia;
- na podstawie prawa załamania wyznaczamy w nowym położeniu nowy kierunek promienia.

Punkty 1 i 2 powtarzamy, aż nasz foton osiągnie oczekiwane miejsce. Odległość  $d$  powinna być tak dobrana, aby jej zmniejszenie nie powodowało widocznej na rysunku zmiany biegu promienia.

*Uwaga:* Prawo załamania nie zawsze jednoznacznie określa dalszy bieg promienia, bo  $\sin \theta = \sin(\pi - \theta)$  – np. w przypadku odbicia sinus kąta padania jest równy sinusowi kąta załamania i dalszy bieg promienia wyznaczamy na podstawie dodatkowych rozważań.

## Zadania doświadczalne

Przesłać należy rozwiązania dwóch (i tylko dwóch) dowolnie wybranych zadań doświadczalnych. Za każde zadanie można otrzymać maksymalnie 40 punktów.

**D1.** W najprostszym przybliżeniu optyki geometrycznej soczewka skupiająca ogniskuje równoległą wiązkę światła w punkcie. Jednak w rzeczywistości w ognisku soczewki wiązka ma skończone rozmiary, które zależą od parametrów wiązki przed soczewką (np. jej średnicy), kształtu soczewki i długości fali światła. Okazuje się, że skupiająca soczewka płasko-wypukła inaczej ogniskuje światło, jeśli wiązka pada od płaskiej strony soczewki, a inaczej jeśli od strony wypukłej. Jest to związane z tym, że w pierwszym przypadku promienie załamują się tylko na jednej powierzchni soczewki, zaś w drugim na obu powierzchniach. Mając do dyspozycji

- płasko-wypukłą soczewkę o ogniskowej 15–25 centymetrów,
  - wskaźnik laserowy,
  - ekran do oglądania wiązki (najlepsza jest gładka, czarna powierzchnia),
  - kamerę internetową z możliwością regulacji ostrości podłączoną do komputera albo aparat cyfrowy,
  - program do obróbki plików graficznych (np. GIMP, <http://www.gimp.org/>),
- zbadaj rozmiary ogniska, gdy wiązka światła pada
- od strony płaskiej soczewki,
  - od strony wypukłej soczewki.

Oszacuj stosunek rozmiarów ogniska przy obu ustawieniach soczewki.

*Uwaga 1:* Światło laserowe ze wskaźnika może uszkodzić wzrok! Uważaj, by nie świecić wiązką laserową, również odbitą, w oko. Jeśli uznasz za konieczne, możesz użyć płaskich płytek szklanych (np. mikroskopowych szkiełek podstawowych) w celu zmniejszenia natężenia wiązki.

*Uwaga 2:* Wskaźnik laserowy powinien być ustawiony w takiej odległości od soczewki, aby średnica padającej na soczewkę wiązki światła wynosiła około 1 centymetra.

*Uwaga 3:* Aby zarejestrować obraz ogniska z dużym powiększeniem, potrzebna jest kamera lub aparat z możliwością regulacji ostrości, mogące wykonywać ostre zdjęcia z małej odległości (kilka centymetrów).

*Uwaga 4:* W typowej kamerze cyfrowej stosuje się korekcję skali natężenia: można przyjąć, że zapisywana do pliku wartość sygnału  $I_{\text{PLIK}}$  ma się do rzeczywistego natężenia światła padającego na piksel kamery  $I_{\text{KAMERA}}$  zgodnie z formułą  $I_{\text{PLIK}} = I_{\text{KAMERA}}^{0,7}$ .

**D2.** Wyobraźmy sobie, że rejestrujemy pewne przypadkowe, powtarzające się zdarzenia, może to być na przykład przejazd samochodu ulicą albo zaobserwowanie meteoru na niebie. Przyjmijmy, że zdarzenia te są niezależne, to znaczy żadne z nich nie wpływa na wystąpienie innego. Prawdopodobieństwo  $p(n)$  wystąpienia  $n$  takich zdarzeń w ustalonym przedziale czasu jest równe  $p(n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$ , gdzie  $\lambda$  jest średnią liczbą zdarzeń w przedziale czasu. Taka zależność  $p(n)$  nazywana jest rozkładem Poissona. Rozkład Poissona opisuje bardzo wiele procesów w fizyce, np. rozpady jądrowe czy rejestrację fotonów z lasera. Mając do dyspozycji:

- arkusz folii naciągniętej na sztywną ramę albo blachę o powierzchni kilku-kilkunastu decymetrów kwadratowych,
- dyktafon cyfrowy, komputer z kartą dźwiękową i mikrofonem albo telefon komórkowy z możliwością zapisu dźwięku,
- komputer z programem pozwalającym analizować pliki dźwiękowe (np. Audacity, <http://audacity.sourceforge.net/>),

zbadaj, czy podczas deszczu liczba kropli spadających w ustalonym przedziale czasu (np. 1 sekundy) na ustaloną powierzchnię opisana jest rozkładem Poissona. Wykonaj pomiary dla kilku różnych wartości średniej  $\lambda$  w zakresie  $[0,5, 5]$ . Sprawdź, czy zmierzone rozkłady są zgodne z rozkładem Poissona dla wybranych wartości średniej  $\lambda$ . W przypadku braku naturalnego deszczu możesz posłużyć się prysznicem albo ogrodowym węzłem.

**D3.** Mając do dyspozycji

- dwa jednakowe baloniki,
- papier milimetryowy,
- zegar,
- dwutlenek węgla,
- centymetr krawiecki,
- kamerę internetową,

sprawdź, czy dla zawiązanego szczelnie balonika wypełnionego  $\text{CO}_2$  zależność objętości gazu w baloniku w funkcji czasu można opisać funkcją  $V(t) = Ae^{-t/t_0} + V_0$ . Jeśli tak, to wyznacz czas charakterystyczny szybkości dyfuzji dwutlenku węgla  $t_0$ . Porównaj zależność  $V(t)$  zaobserwowaną dla balonika wypełnionego  $\text{CO}_2$  ze zmianą objętości takiego samego balonika wypełnionego powietrzem.

*Uwaga:* W warunkach domowych dwutlenek węgla można uzyskać z napoju gazowanego lub w wyniku reakcji sody oczyszczonej z kwasem cytrynowym.



# LXIII Olimpiada Matematyczna

Rozwiązania zadań (każde na osobnym arkuszu, pisane jednostronnie) należy wysłać listem poleconym pod adresem komitetu okręgowego Olimpiady właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia

**3 października 2011 r. – I seria,**

**3 listopada 2011 r. – II seria,**

**5 grudnia 2011 r. – III seria**

(decyduje data stempla pocztowego). Rozwiązania przesłane w terminie późniejszym nie będą rozpatrywane.

Adresy Komitetów Okręgowych oraz bieżące informacje, a także zadania z poprzednich Olimpiad Matematycznych można znaleźć w Internecie pod adresem: [www.om.edu.pl](http://www.om.edu.pl)



## Zadania konkursowe zawodów stopnia pierwszego

**I seria** 1. Rozwiązać w liczbach rzeczywistych układ równań

$$\begin{cases} (x+y)^3 = 8z, \\ (y+z)^3 = 8x, \\ (z+x)^3 = 8y. \end{cases}$$

2. Znaleźć wszystkie takie pary dodatnich liczb całkowitych  $(x, y)$ , że liczba  $2^x + 5^y$  jest kwadratem liczby całkowitej.

3. W trójkącie ostrokątnym  $ABC$  punkt  $D$  jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka  $C$ . Punkty  $E$  i  $F$  leżą odpowiednio na bokach  $AC$  i  $BC$ , przy czym  $AE = AD$  i  $BF = BD$ . Punkt  $S$  jest symetryczny do punktu  $C$  względem środka okręgu opisanego na trójkącie  $ABC$ . Wykazać, że  $SE = SF$ .

4. Dana jest liczba całkowita  $n \geq 1$ . Dla niepustego podzbioru  $X$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  niech  $a$  i  $b$  oznaczają odpowiednio najmniejszy i największy element zbioru  $X$  oraz niech

$$f(X) = \frac{1}{n - (b - a)}.$$

Wyznaczyć, w zależności od  $n$ , sumę liczb  $f(X)$  dla wszystkich niepustych podzbiorów  $X$  zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

**II seria** 5. Znaleźć wszystkie takie ciągi  $(a_1, a_2, \dots, a_{63})$  złożone z różnych dodatnich liczb całkowitych, że dla  $i = 1, 2, \dots, 62$  liczba  $a_i$  jest dzielnikiem liczby  $1 + a_{i+1}$ , zaś liczba  $a_{63}$  jest dzielnikiem liczby  $1 + a_1$ .

6. W czworokącie wypukłym  $ABCD$  zachodzi równość

$$\sphericalangle DAB + 2\sphericalangle BCD = 180^\circ.$$

Okrąg wpisany w trójkąt  $ABD$  jest styczny do boków  $AB$  i  $AD$  odpowiednio w punktach  $K$  i  $L$ . Wykazać, że okręgi opisane na trójkątach  $AKL$  i  $BCD$  są styczne.

7. Znaleźć wszystkie pary dodatnich liczb całkowitych  $(m, n)$ , dla których prostokąt o wymiarach  $m \times n$  można zbudować z następujących klocków utworzonych z 6 kwadratów jednostkowych: Klocki wolno obracać i odwracać na drugą stronę.



8. Wyznaczyć wszystkie takie funkcje  $f$  określone na zbiorze liczb rzeczywistych i przyjmujące wartości rzeczywiste, że dla dowolnych liczb rzeczywistych  $x, y$  prawdziwa jest równość

$$f(x + f(x + y)) = f(x - y) + f(x)^2.$$

**III seria** 9. Wyznaczyć wszystkie takie liczby całkowite  $n \geq 1$ , że liczba  $1 + 2^{n+1} + 4^{n+1}$  jest podzielna przez liczbę  $1 + 2^n + 4^n$ .

10. Znaleźć wszystkie takie liczby całkowite  $n \geq 2$ , że istnieje zbiór  $n$  punktów na płaszczyźnie, z których każdy leży na zewnątrz pewnego koła, zawierającego wszystkie pozostałe punkty i mającego środek w jednym z nich.

11. W ostrosłupie o podstawie  $ABC$  i wierzchołku  $S$  wysokości  $AA', BB', CC', SS'$  przecinają się w jednym punkcie, leżącym wewnątrz ostrosłupa. Punkt  $O$  jest środkiem sfery opisanej na danym ostrosłupie. Dowieść, że jeśli prosta  $SO$  jest prostopadła do płaszczyzny  $A'B'C'$ , to ostrosłup  $ABCS$  jest prawidłowy.

12. Mając dany skończony ciąg liczb, tworzymy z niego nowy ciąg, wstawiając pomiędzy każdą parę kolejnych wyrazów nowy wyraz, równy ich sumie. Rozpoczynamy od ciągu  $(1, 1)$  i wykonujemy wielokrotnie tę operację, otrzymując w pierwszym kroku ciąg  $(1, 2, 1)$ , w drugim kroku ciąg  $(1, 3, 2, 3, 1)$  itd.

Dla każdego  $n \geq 1$  obliczyć sumę sześcianów wyrazów ciągu otrzymanego w  $n$ -tym kroku.



# VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

Zawody stopnia pierwszego

1 września 2011 r. – 24 października 2011 r.

Rozwiązania poniższych zadań należy zapisywać **jednostronnie** na **oddzielnych** arkuszach formatu A4. Na każdej kartce z rozwiązaniem należy podać następujące informacje:

- w prawym górnym rogu numer zadania,
- w lewym górnym rogu dane uczestnika: imię i nazwisko, numer PESEL, adres domowy, nazwa i adres szkoły, klasa.

Rozwiązania zadań należy przesłać do Komitetu Okręgowego, właściwego terytorialnie dla szkoły, najpóźniej dnia 24 października 2011 r. (decyduje data stempla pocztowego). Adresy Komitetów Okręgowych, informacje o kwalifikacji do zawodów stopnia drugiego, terminy kolejnych etapów OMG oraz inne bieżące informacje można znaleźć w Internecie pod adresem [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

**Uwaga:** W roku szkolnym 2011/2012 Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów zostanie przeprowadzona w nowej, eksperymentalnej formule. Zawody stopnia pierwszego, odbywające się dotychczas wyłącznie w systemie korespondencyjnym, zostaną w bieżącej edycji rozbudowane o część testową. Więcej informacji na stronie [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).

1. Czy istnieją takie liczby rzeczywiste  $x, y$ , dla których

$$\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{y^2 + 1} = x + y?$$

Odpowiedź uzasadnij.

2. Dany jest trójkąt  $ABC$ , w którym  $AC = BC$ . Punkt  $D$  leży na boku  $AB$ , przy czym  $BD = 2AD$ , a kąt  $BCD$  jest prosty. Wyznacz miarę kąta  $BAC$ .

3. Dane są dwa prostokąty o równych polach i o równych obwodach. Wykaż, że długości przekątnych obu prostokątów także są równe.

4. Każda spośród pewnych 99 liczb naturalnych ma w zapisie dziesiętnym 10 jedynek, 20 dwójek oraz pewną liczbę zer. Udowodnij, że liczb tych nie można rozdzielić na dwie grupy w taki sposób, aby iloczyn liczb z pierwszej grupy był równy iloczynowi liczb z drugiej grupy.

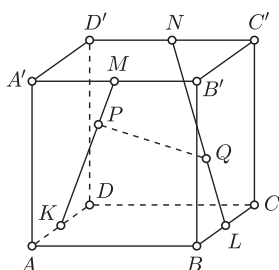
5. W pięciokącie wypukłym  $ABCDE$  kąty przy wierzchołkach  $B$  i  $D$  są proste. Wykaż, że obwód trójkąta  $ACE$  jest nie mniejszy od  $2BD$ .

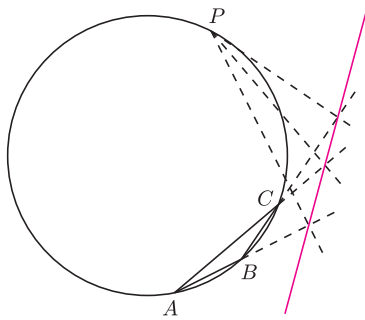
6. Dane są takie dodatnie liczby wymierne  $a$  i  $b$ , dla których liczba

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{ab}$$

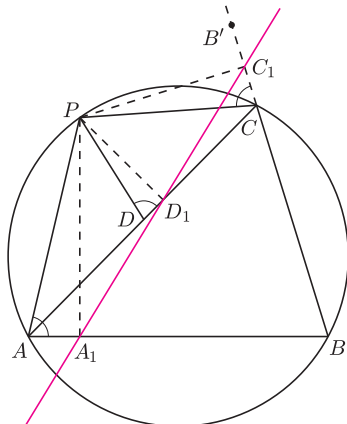
jest wymierna. Wykaż, że liczby  $\sqrt{a}$  oraz  $\sqrt{b}$  także są wymierne.

7. Niech  $ABCD A' B' C' D'$  będzie sześcianem, jak na rysunku. Punkty  $K, L, M, N$  są odpowiednio środkami krawędzi  $AD, BC, A' B', C' D'$ . Punkty  $P$  i  $Q$  leżą odpowiednio na odcinkach  $KM$  i  $LN$ . Krawędź sześcianu jest równa 2. Udowodnij, że  $PQ \geq \sqrt{2}$ .

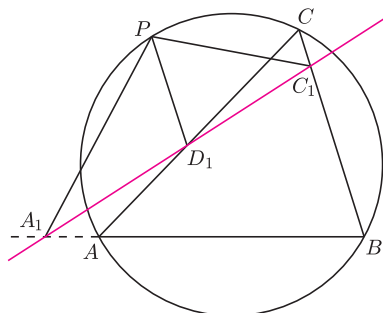




Rys. 1. Jedna z bardziej egzotycznych konfiguracji.



Rys. 2



Rys. 3



### Rozwiązanie zadania F 795.

Rozważmy kulę o środku w źródle światła i promieniu  $r$ . Kulę dzielimy za pomocą współśrodkowych sfer na  $N$  części o jednakowej grubości  $\frac{r}{N}$ . W  $k$ -tej części, licząc od środka, znajduje się  $m = 4\pi \left(\frac{kr}{N}\right)^2 \cdot \frac{r}{N} \cdot n$  drobin pyłu, które zasłaniają powierzchnię  $mA$ , czyli  $\frac{nA}{N}$  całości powierzchni sfery. Drobin w różnych warstwach ustawione są przypadkowo i niezależnie od siebie, więc całkowita niezasłonięta powierzchnia to  $\left(1 - \frac{nA}{N}\right)^N$  całej sfery, co po przejściu do granicy  $N \rightarrow \infty$  daje  $e^{-r/nA}$ . Po podzieleniu na jednostkę powierzchni otrzymujemy

$$I = \frac{I_0}{r^2} e^{-r/nA}.$$

[1] Event Horizon Telescope, <http://www.haystack.mit.edu/ast/uvlbi/mm/eht.html>

## O prostej Simsona raz jeszcze

Myślę, że niemal każdy Czytelnik miał okazję się z nią spotkać. Załóżmy, że mamy dany trójkąt, i wybierzmy dowolny punkt  $P$  z okręgu na nim opisanego. Wówczas rzuty prostokątne punktu  $P$  na proste zawierające boki danego trójkąta leżą na jednej prostej zwanej *prostą Simsona*. Chyba najbardziej typowym dowodem tego faktu jest rachunek na kątach. Jednakże rozumowanie to ma pewną wadę: istnieje wiele możliwych konfiguracji (np. ta na rysunku 1, dość egzotyczna) i, aby je objąć jednym rachunkiem, trzeba uciec się do kątów skierowanych, co bywa nieczytelne dla osób niewprawionych w tego typu rozumowaniach. Istnieje jednak bardzo sprytny, krótki i przejrzysty dowód tego faktu, niewymagający ani kątów czy odcinków skierowanych, ani pracochłonnego rozważania wielu konfiguracji – oto on.

Przyjmijmy, że punkt  $P$  leży na łuku  $AC$  niezawierającym punktu  $B$  okręgu opisanego na danym trójkącie  $ABC$ . Jeśli  $B'$  jest punktem leżącym na prostej  $BC$  po przeciwnej stronie punktu  $C$  niż punkt  $B$ , to zachodzi równość  $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PCB' = \alpha$ . Niech  $D$  będzie takim punktem na prostej  $AC$ , że  $\sphericalangle PDC = \alpha$ . Oznaczając odpowiednio przez  $A_1, D_1, C_1$  rzuty prostokątne punktu  $P$  na proste  $AB, AC, BC$ , stwierdzamy, że trójkąty prostokątne  $APA_1, DPD_1, CPC_1$  są podobne (rys. 2). Mają więc taki sam kąt przy wierzchołku  $P$  równy  $\beta$  i stosunek przyprostokątnej przy wierzchołku  $P$  do przeciwprostokątnej równy  $\cos \beta$ . Rozważmy przekształcenie będące złożeniem obrotu względem  $P$  o kąt  $\beta$  (w kierunku od przeciwprostokątnej do przyprostokątnej) z jednokładnością o skali  $\cos \beta$  i środkiem w tym samym punkcie. Przekształcenie to jest podobieństwem, więc w szczególności obrazem każdej prostej jest prosta. Skoro punkty  $A, D$  i  $C$  są współliniowe, to ich obrazy  $A_1, D_1$  i  $C_1$  również, co kończy dowód.

Czytelnik Wnikliwy bez trudu zauważy, że jeśli zamiast rzutów prostokątnych weźmiemy „rzuty pod kątem  $\gamma$ ” (wszystkie kąty tak samo zorientowane, zobacz rysunek 3), to one również będą leżały na jednej prostej i powyższy dowód bez trudu przenosi się na uogólnione zadanie.

Michał KIEZA

## Prosto z nieba: Gromada galaktyk w Pannie

Astronomowie zajmują się badaniem nie tylko tego, co widzialne, ale również, a może przede wszystkim, tego, czego nie da się w prosty sposób dostrzec gołym okiem na nieboskłonie. We wrześniu Słońce znajduje się w okolicach gwiazdozbioru Panny, największego z zodiakalnych gwiazdozbiorów i drugiego co do wielkości na niebie. Okres najlepszej widoczności Panny w Polsce przypada co prawda na wiosnę, wspominamy o tym gwiazdozbiorze obecnie dlatego, że oprócz wielu ciekawych gwiazd widocznych gołym okiem (jak np. Spica,  $\alpha$  Virginis) zawiera również obiekty słabo widoczne, lecz bardzo interesujące – na styku gwiazdozbiorów Panny i Warkocza Bereniki znajduje się np. gromada galaktyk, zwana gromadą Virgo. Wspólnie z Lokalną Gromadą galaktyk, do której należy nasza Droga Mleczna, są składnikami tak zwanej Supergromady galaktyk. Gromada Virgo znajduje się w odległości około 20 Mpc od Drogi Mlecznej, składa się z paru tysięcy galaktyk, których całkowita masa szacowana jest na  $10^{15} M_{\odot}$ . Jest głównym celem poszukiwaczy fal grawitacyjnych, oczekujących nadejścia ekstremalnie małych zaburzeń czasoprzestrzeni za pomocą kilometrowej długości interferometrów, amerykańskiego LIGO i europejskiego Virgo. Detektory są obecnie w okresie dynamicznego rozwoju i przebudowy, która ma znacząco poprawić ich czułość – w ciągu następnych pięciu lat spodziewamy się zatem wielu bezpośrednich detekcji fal grawitacyjnych pochodzących ze zlewających się układów podwójnych gwiazd neutronowych lub czarnych dziur.

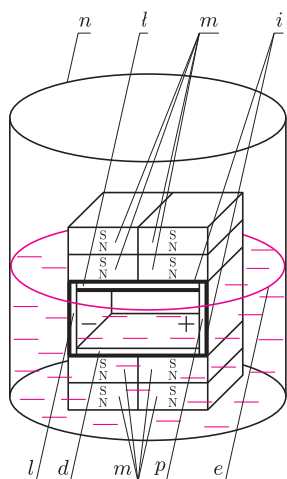
Oprócz ekscytującej przyszłości otwierającej się przed badaczami czasoprzestrzeni, gromada w Pannie oferuje również inne atrakcje: galaktyka M87 (Messier 87, zwana Virgo A) zawiera wg ostatnich pomiarów najmasywniejszą znaną galaktyczną czarną dziurę:  $6,6 \cdot 10^9 M_{\odot}$ . Obliczywszy rozmiar jej horyzontu, czyli promień Schwarzschilda ( $r_s = 2GM/c^2$ ), można przekonać się, że bez trudu pomieściłaby w swoim wnętrzu cały Układ Słoneczny. Jest ona tak okazała, że wydaje się teoretycznie możliwe zaobserwowanie jej obrysu za pomocą sieci radioteleskopów [1], rozmieszczonych na powierzchni Ziemi. Osiągnięcie wymaganej rozdzielczości (rzędu mikrosekundy łuku) i obserwacja „cienia” czarnej dziury byłoby jednocześnie wielkim sukcesem inżynieryjnym i ogromnym sukcesem ogólnej teorii względności – pierwszą **bezpośrednią** obserwacją horyzontu.

Michał BEJGER

## Samozasilające się silniki magneto hydrodynamiczne

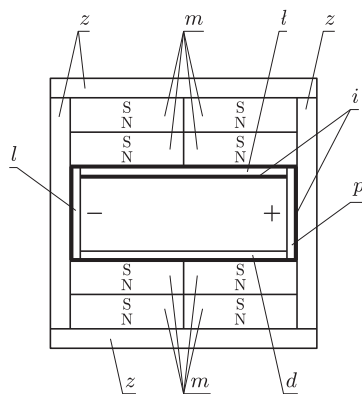
Stanisław BEDNAREK

W tym odcinku będziemy kontynuować badanie magneto hydrodynamicznych silników – tym razem działających... bez przyłączenia źródła zasilania. Niemożliwe? Wszak działanie silnika, który wykonywałby pracę bez pobierania energii, jest sprzeczne z podstawowym prawem przyrody – zasadą zachowania energii. Praca naszych silników nie będzie naruszała tej zasady, bowiem energia konieczna do działania silnika nie zawsze musi być pobierana z zewnątrz. Może ona pochodzić także z elementów silnika. Oczywiście, silnik taki nie będzie perpetuum mobile, ponieważ elementy te ulegną zużyciu i źródło energii się wyczerpie.



Rys. 1. Konstrukcja liniowego silnika magneto hydrodynamicznego z wewnętrznym zasilaniem; p – elektroda miedziana, l – elektroda cynkowa, d – przekładka dystansowa, i – izolacja, l – łącznik, e – elektrolit, n – słoik, m – magnes, N, S – bieguny magnesu.

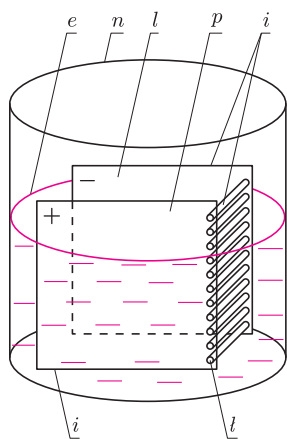
Konstrukcję jednego z silników, w którym zachodzi postępowy ruch elektrolitu, przedstawia rysunek 1. Zbudujemy ten silnik z dwóch kwadratowych płytek, z których jedna, wycięta z blachy miedzianej, będzie łącznikiem, druga zaś – izolacyjną przekładką dystansową. Rozmiary obu płytek powinny umożliwiać ich swobodne włożenie do słoika. Przygotujemy ponadto dwie prostokątne elektrody o długości równej długości boku kwadratowych płytek. Pierwszą elektrodę wycinamy z blachy miedzianej, a drugą z blachy cynkowej. Brzegi obu elektrod przylutowujemy do łącznika, po przeciwnej zaś stronie wklejamy między elektrody przekładkę dystansową, stosując do tego klej cyjanoakrylowy. Otrzymujemy w ten sposób prostopadłościenne, otwarte z obu stron pudełko. Wewnętrzną powierzchnię łącznika pokrywamy warstwą izolacyjną, uzyskaną przez posmarowanie silikonem do uszczelnień lub przyklejenie kawałków taśmy izolacyjnej. Zewnętrzne powierzchnie pudełka też owijamy taśmą izolacyjną. Spowoduje to ukierunkowanie prądu, przepływającego w elektrolicie, prostopadle do elektrod i zapobiegnie tworzeniu się tzw. prądów błądzących. Do zewnętrznych powierzchni łącznika i przekładki przyklejamy klejem cyjanoakrylowym prostopadłościenne magnesy. Powinny one być ułożone obok siebie i zorientowane biegunami jednoimiennymi w tę samą stronę. Dzięki temu magnesy wytworzą pole magnetyczne, którego wektor indukcji między elektrodami będzie prostopadły do łącznika, czyli do kierunku przepływu prądu. Żeby uzyskać większą wartość indukcji pola, wskazane jest zastosowanie dwóch lub trzech warstw magnesów. Układ elektrod wraz z magnesami wkładamy do słoika, zalewamy elektrolitem, który powinien sięgać poniżej górnych krawędzi elektrod, posypujemy jego powierzchnię odrobiną sproszkowanego korka lub pieprzu i obserwujemy uważnie, co dzieje się z elektrolitem. Zauważamy jego powolne wypływanie w pobliżu jednego końca elektrod i wpływanie w pobliżu drugiego.



Rys. 2. Wygląd ulepszonej wersji liniowego silnika magneto hydrodynamicznego z magnetowodem stalowym; z – płytka stalowa, pozostałe oznaczenia jak na rysunku 1.

W zbudowanych silnikach znaczna część linii pola magnetycznego rozpraszala się w powietrzu, co powodowało zmniejszenie wartości indukcji pola w elektrolicie i niewielką szybkość jego ruchu. Szybkość tę można zwiększyć, zamykając obwód magnetyczny dzięki użyciu magnetowodu (rys. 2), złożonego z czterech prostokątnych płytek, wyciętych z blachy stalowej. Po dopasowaniu wymiarów płytek, tak żeby przylegały bez szczelin, sklejamy je klejem cyjanoakrylowym. Zastosowanie płytek powoduje, że strumień magnetyczny nie rozprasza się w powietrzu na zewnątrz silnika, lecz koncentruje się w ferromagnetycznych płytkach i napotyka mniejszy opór magnetyczny. Dzięki temu można osiągnąć większą wartość indukcji magnetycznej w elektrolicie i jego szybszy ruch.

Najprostszy i najbardziej zadziwiający model magneto hydrodynamicznego silnika z wewnętrznym zasilaniem przedstawiony jest na rysunku 3. Zastosowano w nim dwie kwadratowe lub prostokątne elektrody, wykonane z miedzi oraz cynku i połączone w pobliżu jednej z ich pionowych krawędzi szeregiem grubych, przewodzących drutów, służących jako łączniki. Silnik taki można wykonać małym nakładem pracy, wycinając elektrody z odpowiednich metali i wywiercając w dokładnie nałożonych na siebie elektrodach szereg otworów



Rys. 3. Konstrukcja liniowego silnika magnetohydrodynamicznego bez magnesów trwałych; oznaczenia takie same, jak na rysunku 1.

o średnicy równej grubości posiadanego drutu miedzianego. Następnie w otwory te wciska się końce przyciętych kawałków drutu o średnicy 2 mm i długości około 1,5 cm i otwory te zalutowuje. Zewnętrzne powierzchnie elektrod i łączników należy pokryć warstwą izolacyjną silikonu do uszczelnień, co zapobiegnie przepływowi prądów błądzących. Zasada działania tego silnika jest taka sama, jak poprzednio opisanych silników liniowych. Pole magnetyczne, niezbędne do pracy silnika, jest wytwarzane przez prąd elektryczny płynący w łącznikach.

Konstrukcję opisanych silników magnetohydrodynamicznych można dalej ulepszać, łatwo także wykonać silniki powodujące wirowy ruch elektrolitu. Szczegóły praktyczne można znaleźć na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl).

Już kilkanaście lat temu autor tego artykułu zbudował modele silników magnetohydrodynamicznych z wewnętrznym zasilaniem (zob. S. Bednarek, *American Journal of Physics* **64**(1996)90) i uzyskał kilka patentów na ich konstrukcje. Koncepcja napędu jednostek pływających za darmo, przez bardzo proste i ciche silniki bez ruchomych części, pobierające energię wprost ze słonecznej wody, jest niezwykle atrakcyjna. Na drodze do jej wdrożenia stoją jednak trudności związane głównie z uzyskaniem dostatecznie dużej mocy i wpływem na środowisko morskie produktów reakcji chemicznych, wytwarzanych podczas pracy silników. Czas pokaże, czy te trudności uda się pokonać.



## Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1324.** Niech  $(a, b, c)$  będzie trójką liczb całkowitych dodatnich spełniających równanie  $a^2 + b^2 = c^2$ . Udowodnić, że nie istnieje liczba naturalna  $n > 0$ , dla której liczba  $(\frac{c}{a} + \frac{c}{b})^n$  byłaby całkowita.

Rozwiązanie na str. 7

**M 1325.** Dwa okręgi  $o_1$  i  $o_2$ , styczne zewnętrznie w punkcie  $P$ , są styczne do prostej  $\ell$  w punktach  $A$  i  $B$  odpowiednio. Prosta  $BP$  przecina okrąg  $o_1$  w punkcie  $C$ , różnym od  $P$ . Udowodnić, że proste  $AC$  i  $\ell$  są prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 2

**M 1326.** Każda ze 100 osób wysłała listy do pewnych 50 spośród pozostałych (nikt nie wysłał dwóch listów do tej samej osoby). Udowodnić, że istnieją takie dwie osoby  $A$  i  $B$ , iż osoba  $A$  wysłała list do osoby  $B$  i osoba  $B$  wysłała list do osoby  $A$ .

Rozwiązanie na str. 22

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 795.** Natężenie światła w czystym powietrzu maleje według wzoru  $I(r) = I_0/r^2$ . Jak zmienia się ta zależność, gdy w powietrzu znajduje się pochłaniający światło pył o koncentracji  $n$  i polu powierzchni drobiny  $A$ ?  
Rozwiązanie na str. 17

**F 796.** W bocznej ścianie naczynia wypełnionego cieczą o współczynniku załamania  $n$  wykonano niewielki otworek o promieniu  $r$ . Wzdłuż osi otworka rozchodzi się cienki promień światła. Jaki musi być poziom cieczy  $h$  nad otworkiem, aby promień mógł wyjść ze strugi cieczy, ani razu nie dokonując całkowicie wewnętrznego odbicia? Założyć, że współczynnik załamania  $n$  cieczy jest dostatecznie duży. Pominąć zmianę przekroju poprzecznego cieczy.  
Rozwiązanie na str. 4

## Kolejny postęp w badaniu CMB...

... właśnie się dokonał [1]. Żeby o tym opowiedzieć, musimy zacząć od przypomnienia obecnej sytuacji.

Dwa główne, doświadczalne podejścia do kosmologii to badanie kosmicznego mikrofalowego relikтового promieniowania tła (CMB – *cosmic microwave background*), w którym zamrożony jest rozkład energii Wszechświata z epoki rekombinacji plazmy w atomy wodoru i helu (czyli niecałe 400 tysięcy lat po Wielkim Wybuchu), oraz badanie soczewkowania grawitacyjnego, czyli obserwowanie, jak światło z odległych pradawnych źródeł było uginane przez mijane skupiska energii (masy).

Badanie korelacji kątowych CMB wraz z konstatacją rosnącego tempa ucieczki galaktyk (wynikająca z analizy zależności przesunięcia ku podczerwieni widma odległych supernowych typu Ia od ich odległości; jest to możliwe, bo supernowe te są jednymi z najmocniejszych tzw. świec standardowych) oraz zmierzenie średniej gęstości zwykłej materii (tzw. materii barionowej) umożliwiło powstanie modelu  $\Lambda$ CDM (ang. *Lambda Cold Dark Matter*), według którego całkowita gęstość energii Wszechświata jest zgodna z hipotezą jego euklidesowości (czyli zerowej krzywizny), ale około 70% tej gęstości przypada na ciemną energię (reprezentowaną przez człon  $\Lambda$  w teorii grawitacji Einsteina), a około jednej czwartej na ciemną materię (złożoną z nieznanymi cząstek), która jest „zimna” (czyli cząstki te poruszają się z prędkościami nierelatywistycznymi). Model ten jest obecnie punktem odniesienia wszystkich rozważań kosmologicznych. Ponieważ jednak odwołuje się do bytów hipotetycznych i w dodatku – zwłaszcza jeżeli chodzi o ciemną energię – słabo zrozumiałych (niektórzy twierdzą, że kompletnie niezrozumiałych), więc jest pod stałą presją tak ze strony teorii, jak i ze strony doświadczenia.

Nowym źródłem informacji jest połączenie dwóch wspomnianych podstawowych metod kosmologii doświadczalnej w jedną, czyli badanie soczewkowania grawitacyjnego promieniowania tła [1]. W tym celu trzeba zacząć od umieszczenia instrumentu badawczego w miejscu, do którego docierające z kosmosu promieniowanie mikrofalowe jest jak najmniej stłumione, czyli tam, gdzie warstwa atmosfery ponad urządzeniem badawczym jest jak najcieńsza. Działanie tłumiące mają gazy cieplarniane, czyli głównie para wodna. Jeżeli, z powodów technicznych albo finansowych, nie jest możliwe umieszczenie instrumentu na orbicie (tak jak słynnych COBE czy WMAP), dobrze znaleźć miejsce jak najsuchsze i jak najwyżej położone. Pod tym względem idealne są szczyty znajdujące się na pustyni Atacama w Chile. Pod jednym z nich, wygasłym wulkanem Cerro Toco (grające wzgórze), na wysokości 5190 m n.p.m., zbudowano sześciometrowej średnicy Atacama Cosmology Telescope. Jego bolometryczna „źrenica” (tak naprawdę ma ich trzy, wrażliwe na pasma 148, 217 i 277 GHz) jest utrzymywana w temperaturze pół kelwina.

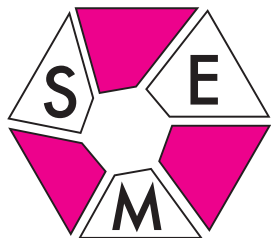
Między innymi dzięki swej wielkości instrument ten ma bardzo dobrą kątową zdolność rozdzielczą około 1,5'. Pozwała to na obserwację efektów soczewkowania, które powinny powodować odchylenia na poziomie 3'. Pomiar jest bardzo trudny, bo chodzi o odwikłanie minimalnych zmian gaussowskiego rozkładu spektrum promieniowania powodowanych przez, również gaussowski, rozkład materii. Dlatego niegaussowski sygnał jest możliwy do odczytania dopiero poprzez badanie czteropunktowej funkcji korelacji (dla porównania, standardowe badanie fluktuacji CMB polega na badaniu korelacji dwupunktowych). To, czego się oczekuje, to rozmycie fluktuacji dla korelacji między punktami odległymi o mniej niż 2°. Właśnie taki, statystycznie istotny, sygnał udało się zaobserwować po raz pierwszy dzięki ACT [2].

Nowe narzędzie, które znalazło się w rękach kosmologów, zostało natychmiast wykorzystane. Do tej pory badanie samego mikrofalowego promieniowania relikowego (CMB) nie pozwalało na wyznaczenie wszystkich parametrów modelu kosmologicznego. Było to spowodowane tzw. geometryczną degeneracją, która uniemożliwiała jednoczesne wyznaczenie krzywizny Wszechświata i tempa jego ekspansji, za pomocą pomiaru kąтового rozmiaru struktury o znanej wielkości w momencie rekombinacji. Mniej więcej taki sam wynik otrzymywano dla modelu  $\Lambda$ CDM z zerową krzywizną i wkładem ciemnej energii do gęstości  $\Omega_{\Lambda} = 0,73$  oraz wiekiem rzędu 13 miliardów lat, jak dla „młodszego” Wszechświata z jeszcze większym wkładem ciemnej energii lub dla odpowiednio „starego” Wszechświata w ogóle bez ciemnej energii. Badanie soczewkowania CMB pozwala na zniesienie degeneracji, bo efekt zależy od tego, jak struktury materii rozwijały się w czasie ewolucji Wszechświata. Informacja taka została już, co prawda, na wiele sposobów wydobyta z Kosmosu, ale wyciągnięcie jej z samego CMB byłoby zapowiedzią możliwości, które tkwią w analizowaniu promieniowania tła i powinny być w zasięgu oczekiwanych instrumentów nowej generacji.

Połączenie informacji zdobytych za pomocą WMAP [3] z wynikiem ACT [2] pozwoliło na odrzucenie hipotezy zerowego wkładu ciemnej energii na poziomie 3,2  $\sigma$  po raz pierwszy za pomocą badania wyłącznie CMB [4] i, na pewno, nie jest to kres możliwości badania Wszechświata za pomocą CMB.

Piotr ZALEWSKI

- [1] S. Boughn, *A distorted view of the early universe*, DOI: 10.1103/Physics.4.53.
- [2] S. Das, B.D. Sherwin i inni, *Detection of the Power Spectrum of Cosmic Microwave Background Lensing by the Atacama Cosmology Telescope*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 021301.
- [3] D. Larson i inni, *Seven-Year Wilkinson Microwave Anisotropy Probe (WMAP) Observations: Power Spectra and WMAP-Derived Parameters*, Astrophys. J. Suppl. **192** (2011) 16, arXiv:1001.4635.
- [4] B.D. Sherwin, J. Dunkley, S. Das i inni, *Evidence for Dark Energy from the Cosmic Microwave Background Alone Using the Atacama Cosmology Telescope Lensing Measurements*, Phys. Rev. Lett. **107** (2011) 021302.

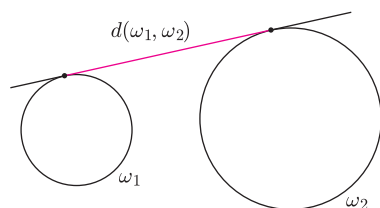


W grudniu 2010 roku ukazał się drugi tom serii wydawniczej *Biblioteczka Stowarzyszenia na rzecz Edukacji Matematycznej* zatytułowany *Matematyka. Poszukuję – odkrywam*. Materiały w nim zawarte stanowią opracowania referatów wygłoszonych w ramach konferencji *Konkursy matematyczne w Polsce*, zorganizowanej w 2008 roku przez Uniwersytet Warszawski we współpracy ze Stowarzyszeniem na rzecz Edukacji Matematycznej.

Ze zbioru *Matematyka. Poszukuję – odkrywam* dowiemy się między innymi:

- w jaki sposób dobra znajomość *wzorów skróconego mnożenia* oraz technik ich stosowania może pomóc w rozwiązywaniu zadań olimpijskich,
- jak grać, żeby wygrać, czyli jak rozstrzygnąć, czy dla opisanej w zadaniu gry któryś z graczy ma strategię wygrywającą,
- jak sobie radzić z *dowodzeniem nierówności*, gdy domyślamy się idei rozwiązania, ale problemy następcza ustalenie szczegółów,
- z jakich faktów warto korzystać, wykazując, że *zadane cztery punkty leżą na jednym okręgu*.

W publikacji znajdziemy ponadto pierwszy plakat wydany przez Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej *Równe sumy pól* wraz z omówieniem zawierającym dowody przedstawionych na nim zależności, a także ciekawe uogólnienie twierdzenia Ptolemeusza, którego najprostszą wersję przytaczam poniżej, zachęcając jednocześnie Czytelników do zapoznania się ze szczegółami zawartymi w broszurze.



Rys. 1

Twierdzenie Ptolemeusza głosi: *w czworokącie wypukłym wpisanym w okrąg iloczyn długości przekątnych jest równy sumie iloczynów długości przeciwległych boków*.

Zdefiniujemy *odległość styczną*  $d(\omega_1, \omega_2)$  pary okręgów jako odległość punktów styczności tych okręgów do ich wspólnej stycznej zewnętrznej (rys. 1).

Rozważmy okręgi  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  wszystkie styczne wewnętrznie (lub wszystkie styczne zewnętrznie) do okręgu  $\omega$  w wierzchołkach czworokąta wypukłego  $ABCD$  (rys. 2).

Spełniona jest wówczas następująca równość:

$$d(\omega_A, \omega_C) \cdot d(\omega_B, \omega_D) = d(\omega_A, \omega_B) \cdot d(\omega_C, \omega_D) + d(\omega_B, \omega_C) \cdot d(\omega_A, \omega_D).$$

Zauważmy, że twierdzenie Ptolemeusza jest rzeczywiście jej szczególnym przypadkiem, który zachodzi, gdy okręgi  $\omega_A, \omega_B, \omega_C, \omega_D$  są punktami, czyli okręgami zdegenerowanymi.

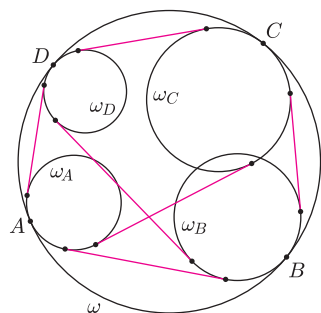
Powyższe twierdzenie, zwane *twierdzeniem Caseya*, pozwala w wielu przypadkach podać bardzo krótkie dowody użytecznych faktów. Zobaczmy, jak możemy je wykorzystać do rozwiązania następującego zadania:

*W koło o okręgu  $\omega$  wpisano trójkąt równoramienny  $ABC$ , w którym  $AC = BC$ . W odcinek koła wyznaczony przez cięciwę  $AB$ , do którego nie należy punkt  $C$ , wpisano okrąg  $\omega_1$ . Z punktu  $C$  poprowadzono prostą styczną do okręgu  $\omega_1$  w punkcie  $K$ . Wykaż, że długość odcinka  $CK$  nie zależy od wyboru okręgu  $\omega_1$ .*

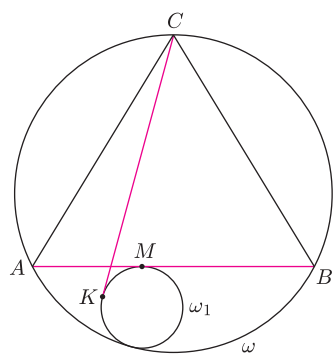
Oznaczmy przez  $M$  punkt styczności okręgu  $\omega_1$  z prostą  $AB$  (rys. 3).

Zastosujmy twierdzenie Caseya do okręgów zdegenerowanych  $B, C, A$  i okręgu  $\omega_1$ . Korzystając z tego, że  $d(A, \omega_1) = AM$ ,  $d(B, \omega_1) = BM$  oraz  $d(C, \omega_1) = CK$ , otrzymujemy równość  $AB \cdot CK = AC \cdot BM + BC \cdot AM$ . Stąd  $AB \cdot CK = AB \cdot AC$ , czyli  $CK = AC$ , co kończy rozwiązanie zadania.

Więcej o broszurze *Matematyka. Poszukuję – odkrywam* można przeczytać na stronie internetowej [www.omg.edu.pl](http://www.omg.edu.pl).



Rys. 2

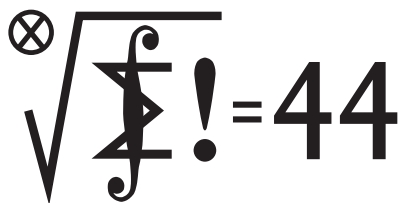


Rys. 3

Joanna OCHREMIAK

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2011

### Zadania z matematyki nr 625, 626

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**625.** Okręgi o środkach  $P$  i  $Q$  przecinają się w punktach  $A$  i  $B$ ; promienie  $PA$  i  $QA$  nie są prostopadłe. Okrąg opisany na trójkącie  $APQ$  przecina te dwa okręgi w punktach  $D$  i  $E$  (różnych od  $A$ ) oraz przecina prostą  $AB$  w punkcie  $C$  (różnym od  $A$ ). Dowieść, że okrąg opisany na trójkącie  $BDE$  ma środek w punkcie  $C$ .

**626.** Dana jest liczba  $a > 0$ . Określamy ciągi  $(x_n)$  oraz  $(y_n)$ :

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right) \quad \text{dla } n \geq 1; \quad y_n = x_1^{1/2} x_2^{1/4} \dots x_n^{1/2^n}.$$

Wykazać zbieżność i obliczyć granicę ciągu  $(y_n)$ .

Zadanie 626 zaproponował pan Jerzy Cisło z Wrocławia.

### Rozwiązania zadań z numeru 5/2011

Przypominamy treść zadań:

**621.** W nierównoramiennym trójkącie  $ABC$  punkt  $I$  jest środkiem okręgu wpisanego, stycznego do boków  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$  odpowiednio w punktach  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Proste  $BC$  i  $YZ$  przecinają się w punkcie  $P$ . Dowieść, że proste  $IP$  i  $AX$  są prostopadłe.

**622.** Udowodnić nierówność

$$\frac{x+y}{1+x+y} + \frac{x+z}{1+x+z} \geq \frac{x}{1+x} + \frac{y+z}{1+y+z}$$

dla liczb  $x, y, z \geq 0$ .

**621.** Prosty rachunek na wektorach: styczna do okręgu jest prostopadła do promienia w punkcie styczności, więc  $\vec{IX} \cdot \vec{XP} = 0$ ,  $\vec{IY} \cdot \vec{YA} = 0$ . Punkt  $P$  leży na prostej  $YZ$ , prostopadłej do  $IA$ ; zatem  $\vec{YP} \cdot \vec{IA} = 0$ .

Chcemy wykazać, że wektory  $\vec{IP}$  i  $\vec{AX}$  są prostopadłe. Obliczamy ich iloczyn skalarny:

$$\begin{aligned} \vec{IP} \cdot \vec{AX} &= \vec{IP} \cdot (\vec{IX} - \vec{IA}) = \vec{IP} \cdot \vec{IX} - (\vec{IY} + \vec{YP}) \cdot \vec{IA} = \vec{IP} \cdot \vec{IX} - \vec{IY} \cdot \vec{IA} = \\ &= (\vec{IX} + \vec{XP}) \cdot \vec{IX} - \vec{IY} \cdot (\vec{IY} + \vec{YA}) = |\vec{IX}|^2 - |\vec{IY}|^2 = 0. \end{aligned}$$

Tak więc  $IP \perp AX$ .

**622.** Ponieważ  $\frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$ , nierówność dana do udowodnienia jest równoważna następującej:

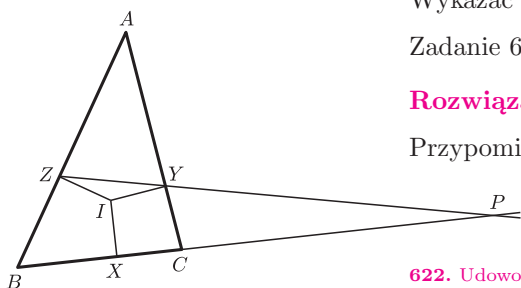
$$\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} \geq \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+y+z}.$$

Bez straty ogólności przyjmijmy, że  $y \leq z$ .

Jeżeli  $x \geq y$ , to w ostatniej nierówności lewa strona jest nieujemna, prawa jest niedodatnia i nie ma czego dowodzić.

Gdy zaś  $x < y$ , możemy tak przekształcać lewą stronę i szacować ją z dołu, by uzyskać wyrażenie widoczne po prawej stronie:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+x+y} &= \frac{y}{(1+x)(1+x+y)} > \\ &> \frac{y}{(1+x+z)(1+x+y)} > \frac{y}{(1+x+z)(1+z+y)} \geq \\ &\geq \frac{y-x}{(1+x+z)(1+z+y)} = \frac{1}{1+x+z} - \frac{1}{1+z+y}. \end{aligned}$$



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 613 ( $WT = 2,66$ ) i 614 ( $WT = 1,53$ ) z numeru 1/2011

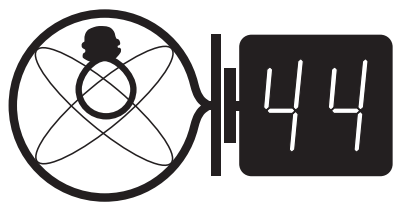
Bartłomiej Dyda	Wrocław	41,34
Paweł Najman	Kraków	37,76
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Piotr Sobczak	Łódź	34,73
Paweł Kubit	Kraków	32,79



### Rozwiązanie zadania M 1326.

Każdemu listowi przypisujemy dwuelementowy zbiór osób, złożony z nadawcy i adresata. Jest  $\binom{100}{2} = 50 \cdot 99 = 4950$  takich zbiorów i  $100 \cdot 50 = 5000$  wysłanych listów. Ponieważ  $5000 > 4950$ , więc pewnym dwóm listom przypiszemy ten sam zbiór. Te listy muszą mieć różnych nadawców, więc powstaje sytuacja opisana w treści zadania.

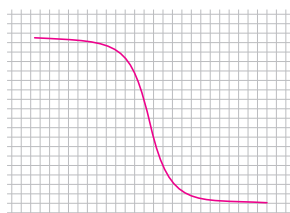
## Klub 44



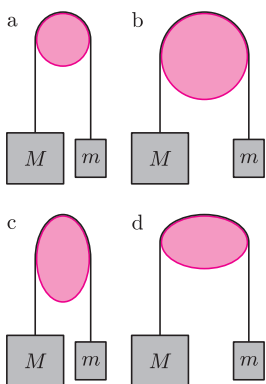
Termin nadsyłania rozwiązań: 30 XI 2011

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**  
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań  
514 ( $WT = 1,15$ ) i 515 ( $WT = 3,35$ )  
z numeru 3/2011

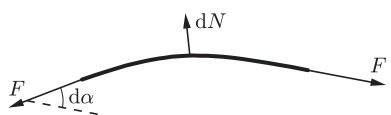
Jerzy Witkowski	Radlin	42,61
Andrzej Idzik	Bolesławiec	39,01
Marian Łupieżowiec	Gliwice	37,70
Tomasz Wietecha	Tarnów	35,78
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	33,19
Michał Koźlik	Gliwice	22,98



Rys. 2



Rys. 3

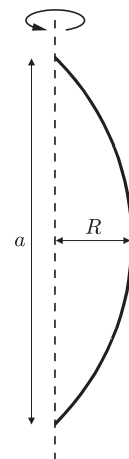


Rys. 4

## Zadania z fizyki nr 522, 523

Redaguje Jerzy B. BROJAN

**522.** Linka o długości  $l = 1,5$  m i masie  $m = 0,2$  kg (jednorodnie rozłożonej) jest zamocowana końcami w dwóch punktach odległych o  $a = 1$  m (rys. 1). Linka obraca się wokół osi przechodzącej przez punkty zamocowania z prędkością kątową  $\omega = 100$  rad/s i względem tego obracającego się układu odniesienia pozostaje nieruchoma. Pomijając efekty siły ciężkości, obliczyć numerycznie odległość  $R$  środkowego punktu linki od osi obrotu.



Rys. 1

**523.** Dwie cienkie współosiowe soczewki o ogniskowych  $f_1$  i  $f_2$  są odległe o  $d$  i wykonane z tego samego szkła. Jaki warunek muszą spełniać podane parametry, aby ogniskowa zespołu nie zależała od długości fali (aby układ był achromatyczny)? Zmiany współczynnika załamania są niewielkie.

Ogólnie definiuje się ogniskową w sposób następujący: gdy na układ pada promień równoległy do osi i odległy od niej o niewielki odcinek  $h$ , a wychodząc z układu przecina oś pod kątem  $\alpha$ , to ogniskowa wynosi  $f = h/\alpha$ .

## Rozwiązania zadań z numeru 5/2011

Przypominamy treść zadań:

**518.** Źródło dźwięku o stałej częstotliwości poruszało się ruchem jednostajnym po linii prostej przebiegającej w pewnej odległości od nieruchomego mikrofonu. Wykonano staranny pomiar zależności częstotliwości rejestrowanej przez mikrofon od czasu odebrania sygnału i zapisano wykres  $f(t)$  na papierze milimetrowym. Niestety, zapomniano oznaczyć osie, wskutek czego arkusz papieru mógł zostać obrócony. Czy wykres jest symetryczny względem obrotu o  $180^\circ$ ? Jeśli nie, to czy można rozstrzygnąć, czy jest on prawidłowy w danej postaci, czy też należy go obrócić? Załączony rysunek 2 jest tylko ilustracją problemu, a nie informacją o dokładnym przebiegu wykresu.

**519.** Na lince zawieszono ciężar o masie  $M$ , a linkę przełożono przez nieruchomy walec o promieniu  $R$ . Na drugim końcu linki zawieszono najmniejszy ciężar  $m$  wystarczający do tego, aby większy ciężar nie ześlizgnął się w dół (rys. 3a). Jeśli ten sam ciężar  $M$  zawiesić na:

- 1) walca o większym promieniu (rys. 3b),
- 2) podporze, której przekrój jest elipsą wydłużoną wzdłuż osi pionowej (rys. 3c) lub poziomej (rys. 3d), to czy niezbędny ciężar  $m$  będzie mniejszy niż na rysunku a, większy, czy taki sam? Współczynnik tarcia linki o podporę jest w każdym przypadku jednakowy.

**518.** Niech  $v$  będzie prędkością źródła,  $f_0$  – jego częstotliwością,  $c$  – prędkością dźwięku,  $t$  – czasem odebrania dźwięku,  $t'$  – czasem jego wysłania ( $t' = 0$  odpowiada chwili, gdy źródło jest najbliżej mikrofonu),  $h$  – minimalną odległością od mikrofonu. Czasy  $t$  i  $t'$  są powiązane wzorem

$$(1) \quad t = t' + \frac{1}{c} \sqrt{h^2 + (vt')^2}.$$

Częstotliwość odebrana przez mikrofon jest zmieniona wskutek zjawiska Dopplera, tzn.

$$(2) \quad f(t) = \frac{f_0 c}{c + v'},$$

gdzie  $v'$  jest rzutem prędkości źródła na kierunek do mikrofonu (dodatnim, gdy zwrot jest przeciwny), czyli

$$(3) \quad v' = \frac{v}{\sqrt{1 + (h/vt')^2}} \cdot \text{sgn}(t') = \frac{v^2 t'}{c(t - t')}.$$

Rozwiązując równanie (1) ze względu na  $t'$  i podstawiając do (3) i (2), można (po dość pracochłonnych przekształceniach) sprawdzić, że

$$(4) \quad f(t) + f(-t) = \frac{2f_0 c^2}{c^2 - v^2}.$$

Oznacza to, że wykres jest symetryczny względem punktu o współrzędnych  $t = 0$ ,  $f = \frac{f_0 c^2}{c^2 - v^2}$  – nieodróżnialny od wykresu obróconego.

**519.** Rozważmy niewielki fragment linki napięty siłą  $F$  i wygięty o kąt  $d\alpha$  (rys. 4). Wypadkowa dwóch sił  $F$  jest równoważona przez siłę reakcji podpory  $dN$ , zatem maksymalna siła tarcia (będąca przyrostem siły napięcia) jest równa

$$dF = f dN = f F d\alpha,$$

gdzie  $f$  jest współczynnikiem tarcia. Sumując (całkując) przyrosty  $dF$ , stwierdzamy, że przy ustalonym  $f$  i ustalonej sile napięcia na jednym końcu linki wartość  $F$  na drugim końcu zależy tylko od kąta między stycznymi do końców linki, czyli dla wszystkich przypadków a-d jest ona jednakowa.



## Wrzesień

Choć ciągle mamy lato, wielkimi krokami zbliża się już jesień, o czym świadczy coraz niżej pojawiający się po zachodniej stronie nieba Trójkąt Letni. Ale noce – przynajmniej na początku września ciepłe – sprzyjają podziwianiu nieba.

Wciąż, tak jak w poprzednim miesiącu, obserwować możemy planety-olbrzymy. Już wczesnym wieczorem, choć nisko nad wschodnim horyzontem, zobaczymy jasnego ( $-2,7$  mag) Jowisza w Baranie. Dalej w kierunku południowym, trochę wyżej nad horyzontem, znajdziemy niezbyt jasnego Urana ( $+5,7$  mag) w Rybach, a podążając dalej na południe, natrafimy na słabego ( $+7,8$  mag) Neptuna w Wodniku. Ten jednak będzie zachodził już coraz wcześniej, by pod koniec miesiąca zniknąć pod horyzontem niedługo po północy. W drugiej połowie nocy na północnym wschodzie, w Bliźniętach, wschodzić będzie Mars ( $+1,4$  mag), by wędrować niezbyt wysoko nad horyzontem na południe. W blasku wschodzącego Słońca możemy próbować odszukać na wschodzie Merkurego we Lwie.

Na wrześniowym niebie królują znajdujące się niemal w zenicie: Kasjopea, Andromeda, Pegaz, Cefeusz i Łabędź. Warto jednak spojrzeć trochę niżej, na znajdujące się nad wschodnim horyzontem Perseusza i bardzo niepozorny Trójkąt. Ten ostatni to malutki, ubogi w jasne gwiazdy gwiazdozbiór. Należy do 48 pierwotnych gwiazdozbiórów greckich, które zachowały się do dziś. Leży pomiędzy Andromedą a Baranem.

To właśnie w gwiazdozbiórze Trójkąta leży druga pod względem jasności galaktyka, M33 (NGC 598). W sprzyjających warunkach można ją dostrzec nawet gołym okiem, jej jasność bowiem wynosi  $+5,8$  mag. Jest jedną z bliżej położonych dużych galaktyk, gdyż oddalona jest od nas jedynie o 2,8 mln lat świetlnych. Jest trzecią co do wielkości galaktyką należącą – obok Andromedy i Drogi Mlecznej – do Grupy Lokalnej.

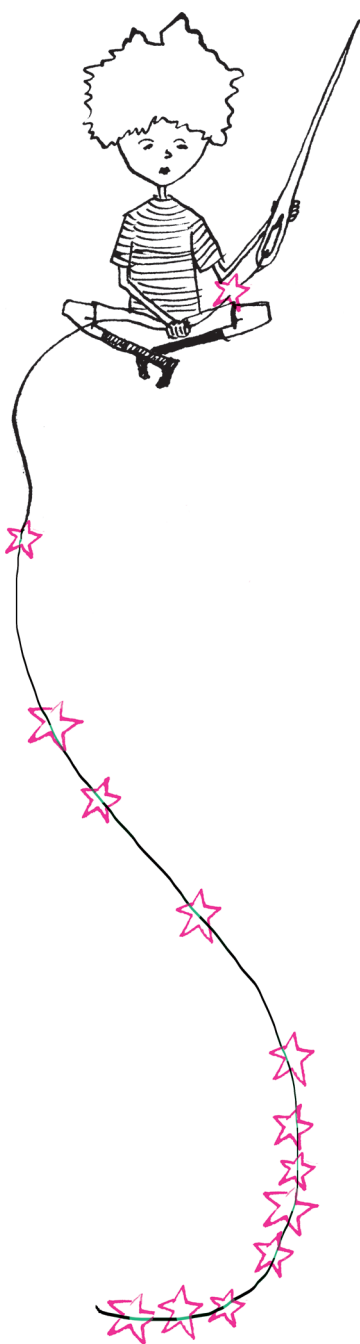
Patrząc na północny wschód od gwiazdozbioru Trójkąta, poniżej Andromedy natrafimy na gwiazdozbiór Perseusza. Jest to okazały gwiazdozbiór, przez który przechodzi Droga Mleczna. Od niego też wzięło nazwę jedno z ramion Naszej Galaktyki – ramię Perseusza.

Druga pod względem jasności gwiazda tej konstelacji,  $\beta$  Per, czyli Algol (co po arabsku znaczy „głowa demona pustyni” albo „głowa diabła”), jest pierwszą, znaną już w starożytności, gwiazdą zmienną. Jej jasność zmienia się od 2,12 do 3,32 mag w czasie niecałych trzech dni (2,867 d). Algol jest układem podwójnym tak ustawionym w przestrzeni, że widzimy wzajemne przesłanianie się składników. Stanowi prototyp licznej grupy gwiazd zaćmieniowych zwanych algolami. To idealna gwiazda dla tych, którzy chcieliby zacząć obserwacje gwiazd zmiennych.

Patrząc od Algola w kierunku Kasjopei (mniej więcej wzdłuż linii łączącej  $\alpha - \gamma - \eta$  Per), natrafimy na dwie piękne, blisko położone (dzieli je 28 minut łuku), gromady otwarte  $h$  i  $\chi$  Persei (NGC 869 i NGC 884). Są bardzo jasne ( $h$  Per ma  $+4,3$ , a  $\chi$   $+4,4$  mag), można więc za miastem, w pogodną noc, zobaczyć je nawet gołym okiem. Już przy użyciu lornetki warto obejrzeć gromady otwarte M37 ( $+5,2$  mag) i NGC 1342 lub NGC 1528 (obie po około  $+6,5$  mag).

23 września o 9:05 Słońce znajdzie się w Pannie, a więc rozpocznie się jesień. Na początku miesiąca swe maksima będą miały niezbyt obfite roje Alfa Aurigidów, Wrześniowych Perseidów i Aries-triangulidów. Ich radianty leżą na tyle wysoko, że przy odrobinie szczęścia czy wytrwałości zobaczymy „spadającą gwiazdę”. Pozostałe wrześniowe roje nie tylko są mało aktywne, ale też mają radianty bardzo nisko nad horyzontem, a więc szansa na zobaczenie z nich meteorów będzie bardzo mała. Pełnia Księżyca przypada 12 IX, a now 27 IX. A więc czyste nieba!

Agnieszka MAJCZYNA

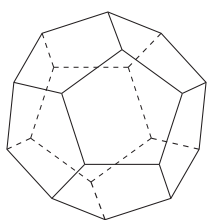


Niektóre zadania z geometrii płaskiej łatwiej najpierw rozwiązać w przestrzeni, a później dopiero z powrotem je „spłaszczyć”. Liczne przykłady pojawiły się w *deltoidach* 17 i 18. Oto jeszcze dwa tego rodzaju problemy.

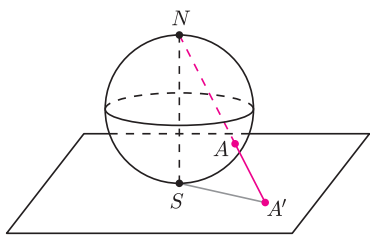
1. Znajdź na płaszczyźnie skończenie wiele okręgów o rozłącznych wnętrzach i takich, że każdy jest styczny do dokładnie pięciu z pozostałych.
2. 32 proste dzielą koło o promieniu 10 cm na pewną liczbę części. Udowodnij, że w jednej z nich da się zmieścić okrągły guzik o promieniu 3 mm.

### Rozwiązania

**R1.** Każdy z okręgów wpisanych w ściany dwunastościanu foremego (rys. 1) jest styczny do pięciu z pozostałych. Jak „spłaszczyć” tę konfigurację, aby okręgi pozostały okręgami i spełniały żądane własności?



Rys. 1

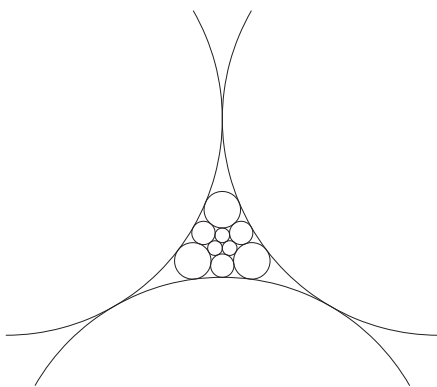


Rys. 2

**Dygresja.** Na nieograniczonym stole stoi przezroczysta sfera. W „najwyższym” punkcie  $N$  tej sfery, przeciwległym do punktu  $S$  styczności ze stołem, zapalamy żarówkę. Zaznaczamy na powierzchni sfery dowolny punkt  $A \neq N$ , a na stole jego cień  $A'$ . Taki  $A'$  nazywamy *rzutem stereograficznym* punktu  $A$  (rys. 2). Rzut ten działa na punktach rozważanej sfery tak, jak inwersja o środku  $N$  i promieniu  $NS$ .

Rzut stereograficzny ma mnóstwo sympatycznych własności. Na przykład okręgi nieprzechodzące przez  $N$  przeprowadza na okręgi oraz zachowuje styczność.

**Wracając do rozwiązania zadania,** zauważmy, że każdy z naszych 12 okręgów leży na powierzchni sfery wpisanej w krawędzie wyjściowego dwunastościanu. Sfera ta jest bowiem styczna do każdej krawędzi w jej środku, a przekrój sfery płaszczyzną ściany to właśnie okrąg wpisany w tę ścianę.



Rys. 3 (wykonał Wojciech Guzicki)

Niech  $N$  będzie dowolnym z punktów sfery, leżących na zewnątrz wszystkich okręgów. Rzut stereograficzny z  $N$  przeprowadza naszą przestrzenną konfigurację na szukaną płaską konfigurację okręgów (rys. 3).  $\square$

Nieco inne rozwiązanie zadania 1 opisano w *Klubie 44 M* w *Delcie* 5/2011.

**R2.** Zaznaczmy wzdłuż każdej z danych 32 prostych kolorowy pas o szerokości 3 mm w każdą stronę:



Środek guzika nie może należeć do żadnego z pasów (dlaczego?). Podobnie środek guzika nie może być w odległości mniejszej niż 3 mm od brzegu koła. Zamiast danego koła rozważajmy więc mniejsze koło  $K$ , współśrodkowe z nim, o promieniu 97 mm. Czy jest możliwe, aby kolorowe pasy pokryły całe koło  $K$ ? Jeśli nie, to dowolny z niepokrytych punktów „nadaje się” jako środek guzika. Jak oszacować pole powierzchni koła przykrytej przez pasy?

**Dygresja. Lemat o pomarańczy.** Jeśli pomarańczę (kulę o promieniu  $r$ ) pokrojono na plastry jednakowej grubości  $h$ , to każdy z nich ma taką samą powierzchnię skórki ( $2\pi rh$ ).

Dowód znaleźć można np. w *Delcie* nr 3/2006.

**Wracając do rozwiązania zadania,** spójrzmy na nasze koło  $K$  z pasami jako na rzut (widok z góry) pewnej kuli, wtedy pasy te odpowiadają plasterom. Wobec tego łączne pole 32 pasów na powierzchni kuli równe jest co najwyżej  $32 \cdot 2\pi \cdot 97 \cdot 6$ . Tymczasem powierzchnia kuli o promieniu 97 mm równa jest  $4\pi \cdot 97^2$ , czyli więcej. Zatem pasy nie pokrywają całej kuli, więc ich rzuty nie pokrywają całego koła  $K$  i w dowolnym z niepokrytych punktów możemy umieścić środek guzika o promieniu 3 mm, co kończy dowód.  $\square$

**Uwaga.** Suma szerokości 32 pasów z powyższego rozwiązania równa jest 192 mm, więc ułożone równolegle obok siebie nie wystarczyłyby do pokrycia koła  $K$  o promieniu 97 mm. Dowiedliśmy, że żadne inne ich ułożenie też nie wystarcza. W 1932 r. A. Tarski postawił ogólniejszy problem: *Figura wypukła ma w najwęższym miejscu szerokość  $d$ . Czy da się ją przykryć pasami o sumie szerokości mniejszej od  $d$ ?* W 1951 r. T. Bang wykazał, że odpowiedź jest negatywna.