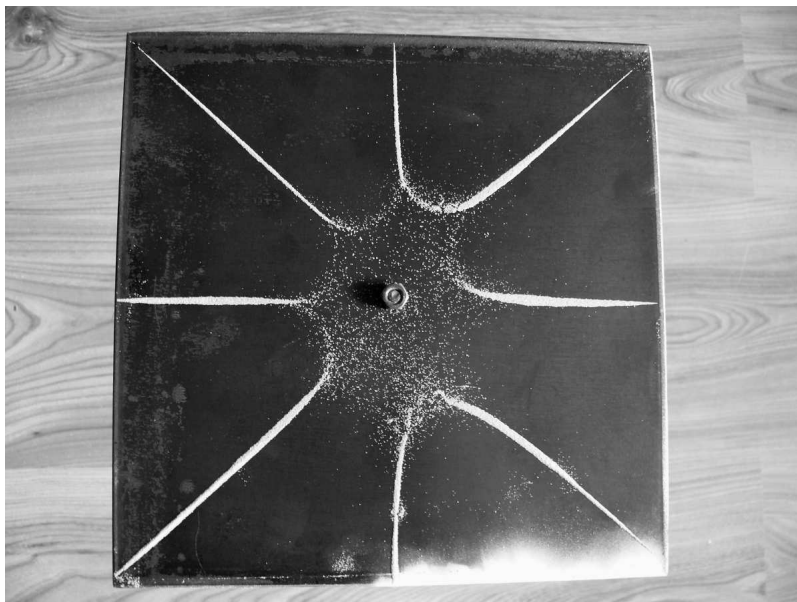


W następnym numerze polecamy



figury Chłodniego

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (451)

Jak złapać terrorystę? <i>Marian Marek Kędziński</i>	str. 1
Mandaty z urny <i>Andrzej Dąbrowski</i>	str. 4
O kapeluszach i pewnym pewniku <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 7
Prosto z nieba: Czerń nocnego nieba <i>Michał Bejger</i>	str. 9
Ze śmiertelnego zimna... <i>Magdalena Fikus</i>	str.10
O wieszaniu bombek na choince <i>Krzysztof Rudnik</i>	str.11
Kopernik i co dalej <i>Bronisława Średniawa</i>	str.12
Kąćik przestrzenny (10): Trzy rozwiązania pewnego zadania <i>Michał Kieza</i>	str.16
XXXIII Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.17
XXVIII Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str.17
Jak zrobić magiczną soczewkę? <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
Zadania	str.19
Aktualności	str.20
Obóz naukowy OMG <i>Urszula Świaniewicz</i>	str.21
Informatyczny kąćik olimpijski (47): Godzilla <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.22
Klub 44	str.23
Grudzień <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.24
Środek ciężkości II <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Krzysztof Diks, prof. dr hab. Jerzy Ginter, dr Piotr Goldstein, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Emilia Bojańczyk, Diana Gawronkiewicz / Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

- 1. Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; www.prenumerata.ruch.com.pl
- 2. Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 01-248 Warszawa, ul. Jana Kazimierza 31/33 Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; www.ruch.pol.pl
- 3. Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:
SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;
w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;
w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;
kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

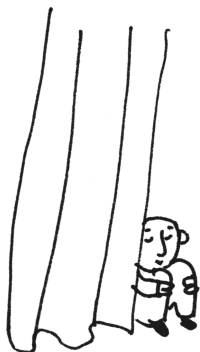
Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Jak złapać terrorystę?

Marian Marek KĘDZIERSKI*



Oczywiście, stwierdzenie to wywoła gwałtowny protest wielu samotnych fizyków. Fakt faktem, nie mogą oni w to uwierzyć, dopóki sami nie zostaną rodzicami.

Któż z nas nie bawił się jako dziecko w chowanego? Zabawa ta sprawia dzieciom wiele radości, mimo że z algorytmicznego punktu widzenia jest bardzo prosta. Jeżeli bowiem wszyscy ukrywający się czekają uczciwie w swoich kryjówkach, to zawsze uda się ich znaleźć – wystarczy, jeżeli szukający przejrzy wszystkie miejsca.

Sytuacja jednak komplikuje się, kiedy ukryte osoby mogą zmieniać swoje kryjówki w czasie poszukiwań. Okazuje się, że wtedy szala trudności przechyla się w drugą stronę. O ile w oryginalnym sformułowaniu wiele osób ukrywało się i wystarczyła jedna, aby je znaleźć, o tyle teraz do znalezienia nawet jednej osoby zwykle potrzeba wielu szukających.

Poszukiwania stają się jeszcze trudniejsze, jeżeli nie znamy ograniczenia na prędkość uciekiniera. Zapewne sytuacja ta jest dobrze znana rodzicom próbującym znaleźć swoje pociechy – dobrze wiedzą, że dzieci potrafią się poruszać z dowolną prędkością, niekoniecznie ograniczoną przez prędkość światła.

Problem. Spróbujmy sformalizować nasze zadanie. Zastanawiamy się nad kwestią przeszukiwania spójnego grafu nieskierowanego, np. reprezentującego budynek, w którym ukrywa się terrorysta. Nie wiemy, gdzie on jest, jak się będzie poruszał ani nawet jak szybko będzie w stanie to robić. Interesuje nas minimalna liczba policjantów potrzebnych do przeszukania grafu i złapania terrorysty bez względu na jego sposób poruszania się.

To zadanie ma wiele wersji, więc potrzebujemy uściślić pewne założenia. W naszym przypadku zakładamy, że terrorysta zostanie złapany, jeżeli w danym momencie spotka policjanta w tym samym wierzchołku bądź w tym samym punkcie krawędzi. Innymi słowy, stojąc w dowolnym wierzchołku, policjant widzi jedynie ten wierzchołek (bez krawędzi z niego wychodzących) i podobnie, stojąc w krawędzi, widzi tylko ten jej punkt, w którym sam się znajduje, a nie całą krawędź.

Szukana liczba policjantów jest parametrem grafu. Nazwijmy ją *liczbą policyjną* grafu.

Rozpatrzmy kilka przykładów (patrz rys. 1):

- Dla grafu będącego ścieżką liczba policyjna wynosi 1, bo wystarczy, że jedna osoba przejdzie graf od początku do końca.
- Dla cyklu potrzebne są już dwie osoby, bo jeżeli jeden policjant porusza się po cyklu, to terrorysta może np. zawsze ukrywać się w wierzchołku sąsiednim do tego, w którym jest policjant, i poruszać się tak samo, jak on. Dwóch policjantów już może przeszukać cykl – wystarczy, jeżeli jeden poczeka w pewnym wierzchołku, a drugi przejdzie cały cykl.
- Dla gwiazdy (czyli grafu, w którym pewien wierzchołek v jest połączony ze wszystkimi pozostałymi, a każda krawędź jest incydentna z v) potrzeba dwóch przeszukujących, bo w czasie, kiedy jeden odwiedza pewien wierzchołek różny od v , terrorysta może przemieszczać się dowolnie po pozostałych wierzchołkach (pod warunkiem, że wszystkich wierzchołków jest co najmniej 4). Dwóch policjantów wystarczy, bo jeden może stanąć w wierzchołku v , a drugi w tym czasie może przejrzeć cały graf.

Pierwsze próby rozwiązania. Zastanówmy się nad jakimiś ograniczeniami na liczbę szukających. Oczywiście, zawsze wystarczy $|V| + 1$ policjantów, gdzie V jest zbiorem wierzchołków grafu, ponieważ możemy w każdym wierzchołku postawić strażnika i jednym dodatkowym policjantem przeszukać wszystkie krawędzie.

Rys. 1. Wyznaczanie liczby policyjnej a) ścieżki, b) cyklu, c) gwiazdy. Kolorowy punkt z literą T oznacza terrorystę, pozostałe punkty oznaczają policjantów. Kolorowe strzałki pokazują strategię policjantów.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Jest to jednak bardzo zgrubne ograniczenie, zwykle liczba policyjna będzie znacznie mniejsza. Wiemy jednak dzięki niemu, że rząd rozwiązania to $O(|V|)$.

Możemy też dla danego grafu G wykonywać pewne redukcje do mniejszych instancji zadania (choć nie wszystkie zachowują dokładne rozwiązanie):

- Możemy z grafu usunąć każdy wierzchołek stopnia 2, łącząc przy tym incydentne z nim krawędzie w jedną.
- Możemy umieścić kilku (powiedzmy k) strażników w pewnym podzbiorze wierzchołków, którego usunięcie spowodowałoby rozspójnienie grafu (możemy np. wybrać do tego punkty artykulacji). Następnie możemy znaleźć rozwiązanie dla każdej z powstałych spójnych składowych oddzielnie. Powiedzmy, że znalezione dla nich liczby policyjne to a_1, a_2, \dots, a_m ; wtedy dostateczną (choć niekoniecznie minimalną) liczbą jest $k + \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$. Odpowiada to strategii, w której zespół k policjantów pilnuje przejścia między otrzymanymi spójnymi składowymi, natomiast zespół pozostałych przeszukuje po kolei wszystkie składowe.
- Możemy z grafu usunąć wszystkie wierzchołki o stopniu 1 (incydentne z dokładnie jedną krawędzią – nazwijmy je *liśćmi*), otrzymując graf G' . Jeżeli obliczymy liczbę policyjną l dla grafu G' , to do przeszukania oryginalnego grafu G wystarczy nam $l + 1$ policjantów, ponieważ możemy przy pomocy l policjantów przeszukiwać podgraf G' i dla każdego liścia v całego grafu G zatrzymać tych l policjantów w momencie, kiedy jedyny sąsiad u liścia v zostaje po raz ostatni odwiedzony w strategii przeszukiwania G' . W tym momencie może wkroczyć do akcji dodatkowy policjant, który przybiegnie do u i z niego przejdzie do v . W ten sposób wierzchołek v oraz incydentna z nim krawędź $u-v$ zostaną przeszukane i nigdy więcej terrorysta nie będzie mógł się tam znaleźć.

Punktem artykulacji grafu nazywamy pojedynczy wierzchołek, którego usunięcie powoduje rozpad pewnej spójnej składowej grafu na kilka mniejszych.



Niestety, powyższe redukcje (oprócz pierwszej) nie są dokładne, tzn. pozwalają jedynie na znalezienie pewnej dostatecznej liczby policjantów, ale niekoniecznie minimalnej.

Okazuje się, że problem wyznaczenia liczby policyjnej grafu jest NP-trudny. Znaczący to, że ludzkość nie zna żadnego rozwiązania o wielomianowej złożoności czasowej. Jednak w przypadku tego problemu nie jest nawet jasne, w jaki sposób rozwiązać go w czasie wykładniczym lub nawet $O(n!)$, co dla większości NP-trudnych problemów jest oczywiste.

Postaramy się więc znaleźć rozwiązanie działające w czasie wykładniczym.

Algorytm. Znamy już pewne sposoby ograniczania liczby policyjnej z góry. Żeby jednak móc analizować jej ograniczenia z dołu, potrzebujemy jakiegoś opisu wszystkich możliwych rozwiązań. Do skonstruowania tego opisu będzie nam pomocny następujący

Fakt 1. Liczba policyjna grafu nie zmienia się przy przyjęciu ograniczenia, że policjanci poruszają się po kolei, tzn. w każdym kroku jeden z nich przesuwa się do sąsiedniego wierzchołka.

Dzięki temu stwierdzeniu możemy podzielić cały czas przeszukiwania na dyskretne momenty. To pozwala nam w pewien sposób opisać i usystematyzować możliwe strategie jako sekwencje dyskretnych ruchów policjantów.

Jeżeli znalibyśmy jeszcze górne ograniczenia na czas przeszukiwania w takiej strategii, to moglibyśmy już podać pewien „brutalny” algorytm przeszukujący wszystkie możliwe sekwencje ruchów. Złożoność takiego podejścia byłaby trudna do oszacowania, jednak prawdopodobnie istotnie przekraczałaby złożoność wykładniczą.



Rozwiązanie zadania M 1334.

Zauważmy, że dla dowolnej liczby całkowitej k liczby k i k^3 dają tę samą resztę z dzielenia przez 3 (wystarczy to sprawdzić dla $k \in \{0, 1, 2\}$). Zatem liczby k, k^3, k^5, k^7, \dots dają tę samą resztę z dzielenia przez 3. Stąd

$$m^{m+1}, m^{m+7}, (m+6)^{m+7}$$

dają tę samą resztę z dzielenia przez 3.

Ciąg reszt z dzielenia przez 3 liczb

$1^2, 2^3, 3^4, \dots$ jest więc okresowy

o okresie 6 i zaczyna się od 1, 2, 0, 1, 1, 0.

Ponieważ $2011 = 335 \cdot 6 + 1$, więc S_{2011}

daje przy dzieleniu przez 3 tę samą resztę

co $2 \cdot 335 + 1$, czyli 2. Stąd S_{2011}, S_{2010}

nie są podzielne przez 3, zaś S_{2008} już jest.

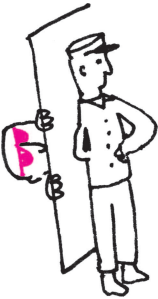
Zadanie upraszcza się, jeżeli spojrzymy na nie z innej strony. Otóż zamiast zastanawiać się nad różnymi strategiami, przyjrzyjmy się możliwym kolejnościom przeszukiwania krawędzi.



Jeżeli założymy, że w każdym ruchu pewien policjant przechodzi z pewnego wierzchołka do sąsiedniego, to w naturalny sposób pojawią się pojęcia *krawędzi skażonej* i *krawędzi czystej*, czyli odpowiednio takiej, w której może być terrorysta, i takiej, w której na pewno terrorysty w danym momencie nie ma.

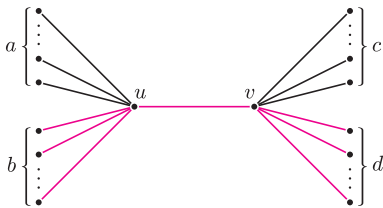
Teraz będzie nam potrzebny jeszcze jeden, nietrywialny fakt.

Fakt 2. *Istnieje optymalna strategia monotoniczna, tzn. taka, w której zbiór krawędzi czystych rośnie (czyli jeśli jakaś krawędź jest czysta w danym momencie, to już do końca przeszukiwania taka będzie).*



Tak więc, zamiast badać, czy dana strategia przeszukuje wszystkie krawędzie, pomyślmy nad dowolną sekwencją oczyszczania krawędzi i obliczmy, ilu potrzeba policjantów, aby ją zrealizować. Jeżeli następnie zbadamy to dla wszystkich możliwych kolejności przeszukiwania krawędzi, to minimum z otrzymanych wyników będzie równe liczbie policyjnej grafu.

Jak dla danej kolejności przeszukiwania krawędzi wyznaczyć liczbę potrzebnych policjantów? Rozważmy zbiory czystych krawędzi w kolejnych momentach. Zauważmy, że do blokowania czystego podzbioru krawędzi potrzeba dokładnie tylu policjantów, ile jest w grafie wierzchołków incydentnych zarówno z krawędzią czystą, jak i z krawędzią skażoną. To jednak nie wystarczy. Musimy jeszcze rozważyć sposób przeszukiwania każdej krawędzi – może się bowiem zdarzyć, że w czasie jej przeszukiwania potrzebnych jest więcej osób niż potrzeba strażników bezpośrednio przed i bezpośrednio po operacji.



Rys. 2. Moment przeszukiwania krawędzi $u-v$; kolorowe linie oznaczają krawędzie skażone.

Rozważmy więc samą operację oczyszczenia pewnej krawędzi $u-v$. Załóżmy, że przed jej oczyszczeniem u jest incydentne z a krawędziami czystymi i b krawędziami skażonymi (nie licząc $u-v$), natomiast v z c czystymi i z d skażonymi (również nie licząc $u-v$). Sytuację przedstawia rysunek 2.

Niech x będzie liczbą policjantów potrzebnych do pilnowania krawędzi tuż przed oczyszczeniem $u-v$, natomiast y – tuż po jej oczyszczeniu. Oczyszczenie krawędzi $u-v$ wymaga $\max(x, y) + 1$ policjantów w sytuacji, gdy spełniony jest następujący warunek:

$$(a = b = 0 \text{ lub } a > 0, b > 0) \text{ oraz } (c = d = 0 \text{ lub } c > 0, d > 0).$$

We wszystkich innych przypadkach potrzeba dokładnie $\max(x, y)$ policjantów.

Koszt przeszukiwania grafu przy zadanej kolejności krawędzi jest równy maksimum z zapotrzebowań na policjantów we wszystkich momentach.

Otrzymujemy więc algorytm o złożoności $O^*(|E|!)$, czyli działający w czasie $O(|E|!)$ z dokładnością do czynnika wielomianowego (E to zbiór krawędzi grafu).

Możemy jednak tę złożoność zmniejszyć do $O^*(2^{|E|})$, jeżeli posłużymy się programowaniem dynamicznym – możemy obliczać dla każdego podzbioru krawędzi minimalną liczbę policjantów potrzebną do uzyskania danego podzbioru krawędzi czystych. Jeżeli będziemy generowali te wyniki dla coraz większych podzbiórów krawędzi, to dla każdego z nich możemy obliczyć wynik w czasie wielomianowym, korzystając z wyników dla mniejszych zbiorów.

Dokładną specyfikację tego algorytmu pozostawiam jako ćwiczenie dla Czytelnika.



Rozwiązanie zadania F 801. Warunek równowagi bańki mydlanej to $P_1 = p_1 + 4\sigma/r$, gdzie P_1 jest ciśnieniem wewnątrz bańki. Po zmniejszeniu promienia bańki o połowę ciśnienie wywierane przez zakrzywioną powierzchnię bańki zwiększy się do $8\sigma/r$. Skoro temperatura układu jest stała, to ciśnienie powietrza wewnątrz bańki, odwrotnie proporcjonalnie do jej objętości, wzrośnie 8 razy, $8P_1 = p_2 + 8\sigma/r$. Z otrzymanych dwóch równań wyznaczamy

$$p_2 = 8p_1 + \frac{24\sigma}{r}.$$

Mandaty z urny

Andrzej DĄBROWSKI*

*Wydział Matematyki i Informatyki,
Uniwersytet Wrocławski

W Polsce i w wielu krajach wybory do parlamentu są proporcjonalne. Oznacza to, że liczba mandatów przypadających na jeden głos powinna być taka sama dla każdej partii. Gdy w państwie XY oddano 15 głosów na partię A, 7 na partię B i 1 na partię C i do obsadzenia były 23 mandaty – ich przydział jest niezwykle prosty. Gdyby jednak do podziału było 15 mandatów, powstaje problem: partia A powinna dostać $15 \cdot \frac{15}{23} \approx 9,78$ mandatu, partia B uzyskać $7 \cdot \frac{15}{23} \approx 4,57$ mandatu, partia C otrzymać $1 \cdot \frac{15}{23} \approx 0,65$ mandatu.

W rzeczywistych wyborach nigdy nie zdarza się, aby liczba mandatów, uzyskana z proporcjonalnego przydziału, była liczbą całkowitą. Komisja wyborcza jest zobowiązana jednak przydzielić całkowitą liczbę mandatów. W wyborach 2007 roku w Polsce oddano na partie, które przekroczyły próg 5%, 15 445 106 głosów. Partia PSL, która zdobyła 1 437 638 głosów, otrzymała 31 mandatów zamiast proporcjonalnie 42,72. Dlaczego?

W wyborach do Sejmu¹ podziałem mandatów rządzi system D'Hondta². Liczby głosów oddanych na każdą partię dzieli się przez kolejne liczby naturalne 1, 2, ... i mandaty przydziela się według wielkości uzyskanych ilorazów, aż do ich wyczerpania.

15 największych ilorazów w wyborach w XY (system D'Hondta)

dzielnik	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
A	15,00	7,50	5,00	3,75	3,00	2,50	2,14	1,88	1,67	1,50
B	7,00	3,50	2,33	1,75	1,40	1,17	1,00	0,88	0,78	0,70
C	1,00	0,50	0,33	0,25	0,20	0,17	0,14	0,13	0,11	0,10

daje wynik: A – 10 mandatów, B – 5 mandatów i C – 0 mandatów.

Czy taka procedura ma jakieś racjonalne uzasadnienie? A może inna procedura jest lepsza? W Niemczech³ stosowana jest metoda Sainte-Laguë⁴, w której głosy dzieli się przez kolejne liczby nieparzyste.

15 największych ilorazów w wyborach w XY (system Sainte-Laguë)

dzielnik	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19
A	15,00	5,00	3,00	2,14	1,67	1,36	1,15	1,00	0,88	0,79
B	7,00	2,33	1,40	1,00	0,78	0,64	0,54	0,47	0,41	0,37
C	1,00	0,33	0,20	0,14	0,11	0,09	0,08	0,07	0,06	0,05

daje wynik: A – 10 mandatów, B – 4 mandaty i C – 1 mandat.

W Stanach Zjednoczonych obowiązuje⁵ przy podziale mandatów do Izby Reprezentantów dla poszczególnych stanów system Huntingtona–Hilla. Polega on na dzieleniu liczby mieszkańców stanów przez $\sqrt{1 \cdot 2}$, $\sqrt{2 \cdot 3}$, $\sqrt{3 \cdot 4}$, ... i przydziale kolejnych mandatów według wielkości ilorazu⁶. Co łączy te i inne⁷ systemy przydziału mandatów? Który z nich jest najlepszy? Pierwszy system przydziału mandatów pochodzi z roku 1852 (system Hamiltona). Niech P_k będzie liczbą głosów oddanych na partię k , S – liczbą mandatów do podziału, $P = \sum_k P_k$ – łączną liczbą oddanych głosów, $S_k = \lfloor P_k \frac{S}{P} \rfloor$ – liczbą mandatów przydzielonych partii k według zasady proporcjonalności⁸. Wtedy $\sum_k S_k \leq S$. Gdy $\sum_k S_k < S$, brakujące mandaty przydziela się według kolejności reszt $P_k \frac{S}{P} - S_k$.

Metoda ta uważana była za niezawodną, dopóki w 1880 roku nie pojawił się paradoks Alabamy. Po zwiększeniu liczby miejsc w Izbie Reprezentantów Alabama straciła mandaty, które miała przy mniejszej liczebności Izby. Oto prosty przykład, że w systemie Hamiltona jest to możliwe. Na partię A oddano 5 głosów, na B – 3 i na C – 1 głos. Przy 4 mandatach partie otrzymają, według systemu Hamiltona, 2, 1, 1 mandatów⁹. Gdy liczba mandatów zwiększy się do 5, partie otrzymają 3, 2, 0 mandatów, a więc partia C straci mandat...

System Hamiltona nie zachowuje też monotoniczności względem liczby głosów: partia A mogła stracić mandaty, a partia B – nie stracić, mimo że A zwiększyła, a B zmniejszyła liczbę głosów:

	Pierwsze głosowanie		Drugie głosowanie	
	głosy	mandaty	głosy	mandaty
A	16	2	17	1
B	29	3	28	3
C	55	5	59	6
razem	100	10	104	10

Zacząto więc poszukiwać systemu przydziału mandatów bez tych wad.

¹ ale również w wyborach do samorządu terytorialnego i Parlamentu Europejskiego.

² Victor D'Hondt (1841–1901), belgijski prawnik, profesor prawa cywilnego i matematyki.

³ również m.in. w Danii, Szwecji, Norwegii i w 2001 roku w Polsce.

⁴ André Sainte-Laguë (1882–1950), francuski matematyk, pionier teorii grafów.

⁵ wprowadzony przez prezydenta Roosevelta w 1941 roku; raport o optymalności tej metody przygotowali matematycy: H.M. Morse, L. Eisenhart i J. von Neumann.

⁶ po uprzednim przydzieleniu każdemu stanowi po jednym mandacie (wymóg konstytucyjny).

⁷ Adamsa, Deana, logarytmiczny, identyczny, duński, imperiali, zmodyfikowany D'Hondta...

⁸ w zaokrągleniu do liczby całkowitej.

⁹ $5 \cdot \frac{4}{9} = \frac{20}{9}$, $3 \cdot \frac{4}{9} = \frac{12}{9}$, $1 \cdot \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$.

Idealny system podziału S_1, S_2, \dots, S_l ($\sum_{k=1}^l S_k = S$) powinien spełniać warunek

1. $\lfloor P_k \frac{S}{P} \rfloor \leq S_k \leq \lfloor P_k \frac{S}{P} \rfloor + 1$ (**doskonały podział**).

Ponadto, dla dwóch głosowań, odpowiednio z liczbą głosów P_1, P_2, \dots, P_l i $P_1^*, P_2^*, \dots, P_l^*$ oraz z liczbą mandatów S_1, S_2, \dots, S_l i $S_1^*, S_2^*, \dots, S_l^*$, powinny być spełnione warunki

2. Dla każdego k , jeśli $S^* > S$ i $P_k^* = P_k$, to $S_k^* \geq S_k$

(**monotoniczność względem mandatów** – to wyklucza paradoks Alabamy);

3. Jeśli $S = S^*$, $P_i < P_i^*$, $P_j > P_j^*$ oraz $S_j \leq S_j^*$, to $S_i \leq S_i^*$

(**monotoniczność względem głosów**).

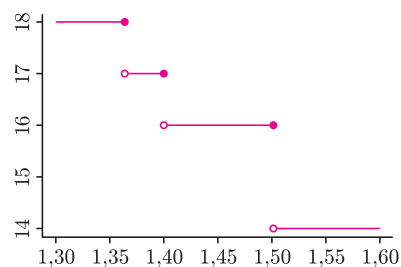
Metoda Hamiltona oparta jest na podziale $S_k = \lfloor P_k \frac{S}{P} \rfloor$. Niestety, zazwyczaj $\sum_k S_k < S$, a przydział brakujących mandatów według największej reszty jest źródłem paradoksów.

Naturalnym uogólnieniem metody Hamiltona jest metoda dzielnikowa. Partii k przydziela się liczbę mandatów według wzoru $S_k = \lfloor \frac{P_k}{x} \rfloor$. Skala x jest tak dobrana, że

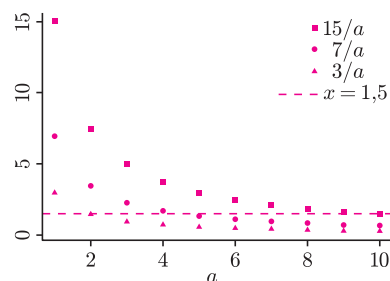
$$(*) \quad \left\lfloor \frac{P_1}{x} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{P_2}{x} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{P_l}{x} \right\rfloor = S.$$

Metoda dzielnikowa, jeśli może być stosowana, spełnia postulaty monotoniczności 2 i 3.

$\lfloor \frac{15}{1,4} \rfloor + \lfloor \frac{7}{1,4} \rfloor + \lfloor \frac{3}{1,4} \rfloor = 10 + 5 + 0 = 15$. Łatwo zauważyć, że w metodzie podziałowej jest to jedyny układ mandatów (10, 5, 0). Skala x nie jest jednak jednoznaczna: $\frac{15}{11} < x \leq \frac{7}{5}$.



Dla $x \leq 1,5$ funkcja $\lfloor \frac{15}{x} \rfloor + \lfloor \frac{7}{x} \rfloor + \lfloor \frac{3}{x} \rfloor$ ma wartość co najmniej 16, a dla $x > 1,5$ – co najwyżej 14.



W wyborach XY z 15 mandatami, jeśli przyjąć skalę $x = 1,4$, partie A, B, C otrzymają 10, 5, 0 mandatów. Niestety, równanie (*) nie zawsze ma rozwiązanie. Na przykład, nie ma rozwiązania równanie $\lfloor \frac{15}{x} \rfloor + \lfloor \frac{7}{x} \rfloor + \lfloor \frac{3}{x} \rfloor = 15$ (patrz rysunek).

Metodę podziałową można uratować, wprowadzając funkcję $\langle u \rangle$ o wartościach całkowitych, bliskich $\lfloor u \rfloor$, taką, aby każde równanie

$$\left\langle \frac{P_1}{x} \right\rangle + \left\langle \frac{P_2}{x} \right\rangle + \dots + \left\langle \frac{P_l}{x} \right\rangle = S$$

miało rozwiązanie.

Niech $\langle u \rangle = a$ dla $a \leq u \leq a + 1$.¹⁰ Wtedy $\langle u \rangle$ ma takie same wartości jak $\lfloor u \rfloor$, z wyjątkiem dwukrotnych wartości dla liczb całkowitych: $\langle a \rangle = a$ lub $\langle a \rangle = a - 1$.

Ponieważ $\langle \frac{Q}{x} \rangle = a$ dla $\frac{Q}{a+1} \leq x \leq \frac{Q}{a}$, więc wartość a jest liczbą kolejnych ilorazów $\frac{Q}{1}, \frac{Q}{2}, \frac{Q}{3}, \dots$ co najmniej równych x .

Podział 15 mandatów między 3 partie, które uzyskały 15, 7 i 3 głosy, polega na znalezieniu takiej wartości x , że dla naturalnych S_1, S_2, S_3 znajdą warunki

$$\frac{15}{S_1 + 1} \leq x \leq \frac{15}{S_1}, \quad \frac{7}{S_2 + 1} \leq x \leq \frac{7}{S_2}, \quad \frac{3}{S_3 + 1} \leq x \leq \frac{3}{S_3}, \quad S_1 + S_2 + S_3 = 15,$$

a więc szukamy kolejnych ilorazów $\frac{15}{1}, \frac{7}{1}, \frac{3}{1}, \frac{15}{2}, \frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{15}{3}, \frac{7}{3}, \frac{3}{3}, \dots$, co najmniej równych takiej wartości x , aby liczba tych ilorazów była równa 15. Najlepiej uporządkować je nierosnąco: $\frac{15}{1}, \frac{15}{2}, \frac{7}{1}, \frac{15}{3}, \frac{15}{4}, \frac{7}{2}, \dots$. Problem niejednoznaczności powstaje przy kolejnej parze ilorazów: $\frac{15}{5}, \frac{3}{1}$. Gdy liczba oddanych głosów na każdą partię jest inna¹¹, to można się umówić, że pierwszeństwo ma iloraz o mniejszym mianowniku. Ilorazy 15 i 16 to $\frac{3}{2}$ i $\frac{15}{10}$. Ostatni mandat zostanie przydzielony partii C zgodnie z zasadą mniejszego mianownika. Partia A otrzyma 9 mandatów, B dostanie 4 mandaty i C uzyska 2 mandaty. Uważny Czytelnik zauważy, że algorytm oparty na tej modyfikacji funkcji $\lfloor u \rfloor$ jest metodą D'Hondta¹². I skala x nie jest do niczego potrzebna!

Metodę D'Hondta można w naturalny sposób uogólnić:

$$\langle u \rangle = a \quad \text{dla} \quad d(a-1) \leq u \leq d(a), \quad \text{gdzie} \quad a \leq d(a) \leq a + 1.¹³$$

Jeśli $d(a)$ jest średnią arytmetyczną z a i $a + 1$, czyli gdy $d(a) = a + \frac{1}{2}$, wtedy $\langle u \rangle$ jest zaokrągleniem u do najbliższej liczby naturalnej.¹⁴ Przydział mandatów odbywa się, podobnie jak w metodzie D'Hondta, poprzez podzielenie liczby głosów kolejno przez $\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ i wybranie S pierwszych największych ilorazów.¹⁵ Taki sam rezultat otrzymamy, dzieląc przez 1, 3, 5, \dots , co prowadzi do metody Sainte-Laguë. Dla liczby głosów 15, 7, 1 podział mandatów w metodzie D'Hondta jest jak 10 : 5 : 0, w metodzie zaś Sainte-Laguë jak 10 : 4 : 1. Metoda ta sprzyja małym partiom, gdyż dzielnik $d(a) = a + 1$ dla metody D'Hondta jest większy od dzielnika $d(a) = a + \frac{1}{2}$ dla metody Sainte-Laguë. Z kolei średnia geometryczna $d(a) = \sqrt{a(a+1)}$ jest podstawą metody Huntingtona-Hilla, która jeszcze bardziej sprzyja małym partiom, gdyż, jak wiadomo, $\sqrt{a(a+1)} < a + \frac{1}{2} < a + 1$. Nie dziwi więc, że różne propozycje metod podziału mandatów związane są z różnymi średnimi z a i $a + 1$.

¹⁰ dla takiego $\langle u \rangle$ równanie

$$\left\langle \frac{15}{x} \right\rangle + \left\langle \frac{7}{x} \right\rangle + \left\langle \frac{3}{x} \right\rangle = 15$$

ma rozwiązanie $x = \frac{3}{2}$.

¹¹ w praktyce zawsze się tak zdarza.

¹² w Stanach Zjednoczonych nazywaną metodą Jeffersona.

¹³ w metodzie D'Hondta $d(a) = a + 1$.

¹⁴ trzeba przyjąć $d(-1) = 0$.

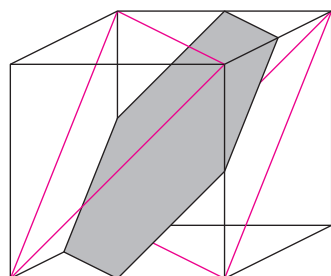
¹⁵ z przyjęciem zasady mniejszego mianownika w przypadku równych ilorazów.

Oto lista niektórych metod, od najbardziej do najmniej sprzyjających małym partiom.

Metoda	Adamsa	duńska	Deana	Hilla	Sainte-Laguë	D'Hondta
$d(a)$	a	$\frac{2}{3}a + \frac{1}{3}(a+1)$	$\frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1}}$	$\sqrt{a(a+1)}$	$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}(a+1)$	$a+1$
średnia	minimum	ważona	harmoniczna	geometryczna	arytmetyczna	maksimum

Metoda duńska jest równoważna serii podzielników 1, 4, 7, 10, ..., a Sainte-Laguë serii 1, 3, 5, 7, ...

Średnia minimum wyznacza $\lfloor u \rfloor$, a maksimum $\lceil u \rceil$; średnia ważona jest z wagami $2/3$ i $1/3$.



Sześcian ma talie.

Głosy oddane na partie dzieli się kolejno przez $d(0), d(1), d(2), \dots$, a mandaty przydziela się według kolejnych ilorazów.¹⁶

Podziałowe metody przydziału mandatów spełniają oba postulaty monotoniczności, ale nie spełniają postulatu doskonałego podziału.¹⁷

Nie ma, niestety, jednoznacznego kryterium pozwalającego wybrać metodę przydziału mandatów. **Wszystkie metody są prawie idealnie proporcjonalne**, ale każda w innym rozumieniu sformułowania „prawie idealne”, co prowadzi do innego podziału mandatów.

Niech S_j będzie liczbą mandatów przydzielonych partii j za pomocą danej metody ($j = 1, 2, \dots, l$). Dla ustalonego k niech $S_1^*, \dots, S_{k-1}^*, S_{k+1}^*, \dots, S_l^*$ będzie dowolnym podziałem mandatów wśród pozostałych partii. Wtedy niezależnie od k , dla każdego $j \neq k$

- dla metody D'Hondta: $\left| S_k - P_k \frac{S_j}{P_j} \right| \leq \left| S_k - P_k \frac{S_j^*}{P_j} \right|$

(przydział mandatów dla dowolnej partii j wyznacza najlepszy proporcjonalnie przydział mandatów dla partii k),

- dla metody Adamsa: $\left| S_j - P_j \frac{S_k}{P_k} \right| \leq \left| S_j^* - P_j \frac{S_k}{P_k} \right|$

(przydział mandatów dla partii k wyznacza najlepszy proporcjonalnie przydział mandatów dla każdej partii),

- dla metody Sainte-Laguë: $\left| \frac{S_k}{P_k} - \frac{S_j}{P_j} \right| \leq \left| \frac{S_k}{P_k} - \frac{S_j^*}{P_j} \right|$

(liczba mandatów przypadających na jeden głos oddany na dowolną partię j leży najbliżej liczby mandatów przypadających na jeden głos oddany na partię k),

- dla metody Deana: $\left| \frac{P_k}{S_k} - \frac{P_j}{S_j} \right| \leq \left| \frac{P_k}{S_k} - \frac{P_j}{S_j^*} \right|$

(liczba głosów przypadających na jeden mandat dla partii j leży najbliżej liczby głosów przypadających na jeden mandat dla partii k),

- dla metody Huntingtona-Hilla: $\left| \frac{\frac{S_k}{P_k}}{\frac{S_j}{P_j}} - 1 \right| \leq \left| \frac{\frac{S_k}{P_k}}{\frac{S_j^*}{P_j}} - 1 \right|$

(iloraz liczby mandatów¹⁸ przypadających na jeden głos oddany na partię k i liczby mandatów przypadających na jeden głos oddany na dowolną partię j jest najbardziej wyrównany¹⁹).

Metody Adamsa i D'Hondta mają jeszcze dwie ciekawe własności. Liczba $\max \left\{ \frac{S_1}{P_1}, \frac{S_2}{P_2}, \dots, \frac{S_l}{P_l} \right\}$ wskazuje liczbę mandatów przypadających na jeden głos dla partii najbardziej wyróżnionej w systemie.²⁰ System D'Hondta gwarantuje, że ta przewaga jest najmniejsza. Liczba $\max \left\{ \frac{P_1}{S_1}, \frac{P_2}{S_2}, \dots, \frac{P_l}{S_l} \right\}$ wskazuje liczbę głosów przypadających na jeden mandat dla partii najmniej wyróżnionej w systemie.²¹ System Adamsa gwarantuje, że ten wskaźnik ma wartość najmniejszą.

Metoda D'Hondta sprzyja tworzeniu koalicji – suma mandatów dla dwóch partii jest mniejsza lub równa liczbie mandatów po połączeniu tych partii. Metoda Adamsa sprzyja podziałowi partii – liczba mandatów dla partii jest mniejsza lub równa sumie mandatów dla dwóch nowych partii po jej rozdzieleniu.

Epilog

W ostatnich wyborach parlamentarnych z 9 października 2011 roku próg 5% przekroczyło 5 partii. Poniższa tabela przedstawia rozkład głosów i podział 459 mandatów²² w skali ogólnopolskiej według różnych metod.

partia	głosy	%	podział %	Hamiltona	Adamsa	duńska	Deana	Hilla	Sainte-Laguë	D'Hondta
PO	5629773	40,9	187,9	188	188	188	188	188	188	188
PiS	4295016	31,2	143,4	143	143	143	143	143	143	144
RP	1439490	10,5	48,1	48	48	48	48	48	48	48
PSL	1201628	8,7	40,1	40	40	40	40	40	40	40
SLD	1184303	8,6	39,5	40	40	40	40	40	40	39

¹⁶ Przy równych ilorazach mandat przydziela się partii o mniejszym mianowniku w ilorazie. Gdy $d(0) = 0$, wszystkim partiom przydziela się po jednym mandacie.

¹⁷ patrz przytoczony na początku artykułu wynik PSL w wyborach 2007 roku.

¹⁸ nazywamy stosunkiem szans (ang. *odds ratio*).

¹⁹ dlatego metoda Huntingtona-Hilla nazywa się metodą równych proporcji.

²⁰ w wyborach 2007 roku taką partią był PiS z 3,2 mandatu na 100 tys. głosów.

²¹ w wyborach 2007 roku taką partią był PSL z 46 tys. głosów na jeden mandat.

²² jeden mandat przypadł Mniejszości Niemieckiej.

Jak widać, nie ma istotnej różnicy. Jedyna i to nieznaczna różnica występuje w metodzie D'Hondta.

Zaskoczonych różnicami między zawartością tabeli a składem Sejmu spieszymy poinformować, że zgodnie z obowiązującymi przepisami, mandaty rozdziela się w komisjach wyborczych.²³ Oto jak wygląda ten podział według różnych metod:

partia	Metoda					
	Adamsa	duńska	Deana	Hilla	Sainte-Laguë	D'Hondta
PO	185	191	191	191	198	207
PiS	147	153	153	154	153	157
RP	58	52	52	52	48	40
PSL	36	32	32	32	32	28
SLD	33	31	31	30	28	27

Różnica między metodą najbardziej²⁴ a najmniej²⁵ sprzyjającą małym partiom jest znaczna: PO i PiS zyskują na obowiązującej metodzie 22 i 10 mandatów, a RP, PSL i SLD tracą 18, 8 i 6 mandatów.

Metody: duńska, Deana i Hilla dają praktycznie te same rezultaty.

Istotnie inny podział mandatów przedstawia umiarkowanie sprzyjająca małym partiom metoda Sainte-Laguë.

Ciekawym parametrem jest efektywność głosowania, wyrażona liczbą mandatów uzyskanych ze 100 tys. oddanych głosów.

partia	głosy	metoda D'Hondta	efektywność
PO	5629773	207	3,68
PiS	4295016	157	3,66
RP	1439490	40	2,78
PSL	1201628	28	2,33
SLD	1184303	27	2,28

²³ w tych wyborach było 41 komisji.

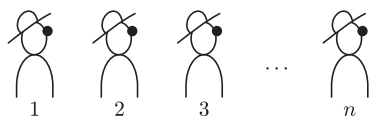
²⁴ metoda Adamsa.

²⁵ metoda D'Hondta, obowiązująca w Polsce.

Jak wiadomo, metoda D'Hondta minimalizuje różnicę między największą a najmniejszą efektywnością.

O kapeluszach i pewnym pewniku

Tomasz IDZIASZEK



O ciekawych problemach związanych z kapeluszami pisaliśmy już w *Delcie* nie raz, ale że dobrego nigdy za wiele, napiszemy też i w tym numerze, tyle że inaczej. Sytuacja jest następująca: w rzędzie stoi n osób i każdej z nich nałożony został na głowę biały lub czarny kapelusz. Każda widzi kapelusze tych osób, które stoją przed nim, zatem pierwsza osoba widzi kapelusze wszystkich pozostałych, natomiast ostatnia osoba nie widzi żadnego (rysunek). Oczywiście, nikt nie widzi swojego kapelusza i w tym cała zabawa, gdyż zadaniem każdej z osób jest odgadnięcie, jakiego koloru kapelusz ma na głowie. Uczestnicy zabawy odgadują po kolei, poczynawszy od pierwszej osoby w rzędzie, i każdy słyszy odpowiedzi poprzedników. Uznajemy, że się udało, jeśli błędnej odpowiedzi udzieliła nie więcej niż jedna osoba. A jak to z zabawami bywa, warto, by były udane. Z tego też powodu uczestnicy, przed nałożeniem kapeluszy na ich głowy, mogą się naradzić i ustalić wspólną strategię postępowania.

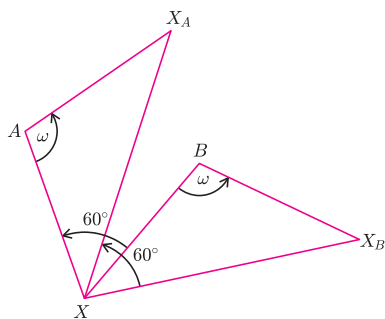
W tym momencie zachęcamy Czytelników do przerywania lektury i zastanowienia się, dla jakich n istnieje strategia gwarantująca wygraną.

Spróbujmy w następujący sposób: pierwsza osoba, nieważne, jak będzie się starać, ma 50% szans na odgadnięcie koloru swojego kapelusza. W pesymistycznym przypadku musimy więc założyć, że udzieli błędnej odpowiedzi i tym samym wykorzysta cały dostępny limit pomyłek.

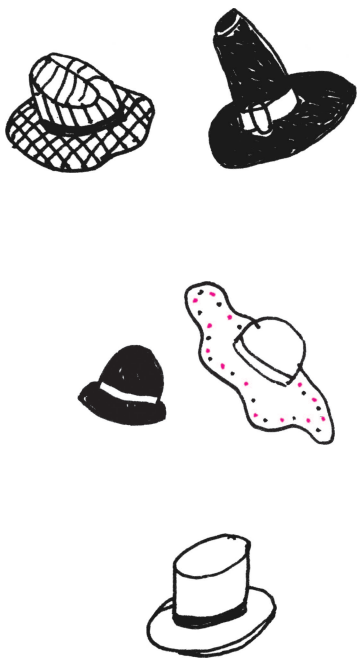


Rozwiązanie zadania M 1333.

Zalóżmy najpierw, że punkt X jest taki, że trójkąt $XX_A X_B$ jest równoboczny. Wówczas trójkąty AXX_A i BXX_B są przystające, gdyż są podobne i $XX_A = XX_B$. Ponieważ obrazem odcinka XX_B przy obrocie o kąt 60° (skierowany zgodnie z kątem ω) względem punktu X jest odcinek XX_A , więc obrazem trójkąta BXX_B jest trójkąt AXX_A . Zatem kąt AXB ma miarę 60° , a ponadto $XA = XB$, więc trójkąt AXB jest równoboczny.



Są dwa punkty X , dla których trójkąt AXB jest równoboczny. Łatwo sprawdzić, że dla nich trójkąt $AXX_A X_B$ jest też równoboczny. Zatem są to wszystkie szukane punkty.



O liczbach porządkowych można przeczytać na naszej stronie deltami.edu.pl w artykułach Andrzeja Mostowskiego.

Pogodzeni z tym faktem, spróbujemy w jej odpowiedzi przemycić bit informacji dla pozostałych uczestników. Oznaczmy przez k_i kolor kapelusza i -tej osoby ($k_i = 0$, jeśli jest to biały kapelusz, i $k_i = 1$, jeśli kapelusz jest czarny), a przez c_i liczbę czarnych kapeluszy, które i -ta osoba widzi przed sobą.

Zrobimy teraz tak: pierwsza osoba mówi „biały”, jeśli c_1 jest parzyste, a w przeciwnym przypadku mówi „czarny”. Co nam z tego przyjdzie? Ano tyle, że ta informacja wystarczy, by druga osoba bezbłędnie odgadła kolor swojego kapelusza. W istocie, ponieważ $c_1 \equiv k_2 + c_2 \pmod{2}$, zatem usłyszawszy przed chwilą wartość $c_1 \pmod{2}$, bez trudu wyznaczy ona k_2 . Co więcej, każda kolejna osoba może postąpić podobnie, korzystając z faktu, że

$$c_1 \equiv k_2 + k_3 + \dots + k_i + c_i \pmod{2},$$

oraz z tego, że zna wartości $k_2, k_3, \dots, k_{i-1}, c_i$ oraz $c_1 \pmod{2}$.

Potrąfimy więc znaleźć strategię dla dowolnie dużego n . I tu nasuwa się pytanie: a co, jeśli n byłoby nieskończone? Innymi słowy, mamy nieskończony rząd osób, w którym i -ta osoba widzi kapelusze wszystkich osób o większych numerach (jest ich, oczywiście, nieskończenie wiele). Czy i tym razem będzie istniała strategia? Podkreślmy, że nie osłabiamy żadnej z reguł zabawy, zatem nadal dopuszczamy tylko jedną pomyłkę. Zauważmy też, że nasza strategia dla skończonego n nie będzie tu działać, gdyż c_1 może nie być liczbą naturalną.

Odpowiedź jest nieco zaskakująca: strategia istnieje. Po raz drugi zachęcamy Czytelników, aby przez (być może dłuższą) chwilę zmierzili się z tym zadaniem samodzielnie.

Nieskończony ciąg (k_1, k_2, \dots) kolorów kapeluszy oznaczać będziemy przez k . Powiemy, że dwa nieskończone ciągi k i k' są w relacji \sim , jeśli różnią się na skończenie wielu pozycjach. Piszemy więc $k \sim k'$, jeśli zbiór $\{i \mid k_i \neq k'_i\}$ jest skończony. Łatwo przekonać się, że tak zdefiniowana relacja \sim jest relacją równoważności. I teraz z pomocą przychodzi nam wspomniany w tytule pewien pewnik, a konkretnie pewnik wyboru – nieocenione źródło matematycznych paradoksów. Dzięki niemu możemy dla każdej klasy abstrakcji relacji \sim wybrać jej reprezentanta i poinformować wszystkich o tym, który został wybrany. Innymi słowy, istnieje taka funkcja f , określona na zbiorze wszystkich ciągów kolorowań kapeluszy, która dla dowolnego k spełnia $f(k) \sim k$ oraz dla dowolnych k, k' , jeśli $k \sim k'$, to $f(k) = f(k')$. Zauważmy teraz, że jeśli uczestnicy porozumieją się co do wyboru funkcji f , to każdy z nich będzie mógł obliczyć ten sam ciąg $\ell := f(k)$, gdyż nie zna on tylko skończonej liczby wyrazów ciągu k . Zauważmy też, że jeśli teraz i -ty zawodnik odpowie ℓ_i (nawet nie czekając na odpowiedzi poprzedników), to ponieważ $k \sim \ell$, więc będziemy mieli tylko skończoną liczbę pomyłek.

W tym momencie spróbujemy wyeliminować te pomyłki metodą analogiczną jak w przypadku skończonym. Oznaczmy przez I zbiór numerów osób (poza pierwszą), których kolory kapeluszy k_i nie zgadzają się z kolorami w ciągu $\ell = f(k)$, czyli $I := \{i \geq 2 \mid k_i \neq \ell_i\}$. Skoro $k \sim \ell$, to zbiór I jest skończony. Niech c'_i będzie liczbą osób ze zbioru I , które widzi osoba i . Niech też $\chi_i = 1$, jeśli $i \in I$, oraz $\chi_i = 0$, gdy $i \notin I$. Każda z osób (poza pierwszą) musi zdecydować, czy nie należy do zbioru I , i wtedy odpowiada zgodnie z ℓ_i , czy też należy (i wtedy musi odpowiedzieć przeciwnie). Pierwsza osoba podaje $c'_1 \pmod{2}$. Druga osoba wie, że $c'_1 \equiv \chi_2 + c'_2 \pmod{2}$, jest więc w stanie wyznaczyć χ_2 , stwierdzić, czy należy do I , i odpowiedzieć poprawnie. Analogicznie i -ta osoba oblicza χ_i z zależności

$$c'_1 \equiv \chi_2 + \chi_3 + \dots + \chi_i + c'_i \pmod{2}$$

oraz z faktu, że χ_j dla $j < i$ jest równe 1 wtedy i tylko wtedy, gdy j -ta osoba udzieliła odpowiedzi niezgodnej z wartością ℓ_j .

I to by było na tyle, gdyby nie to, że pokazując istnienie strategii dla $n = 1, 2, \dots, \omega$, otwieramy drogę kolejnym pytaniom: a co, jeśli n jest liczbą porządkową większą niż ω ? Zastanówmy się więc nad istnieniem strategii w przypadku $\omega + 1$ (czyli za nieskończonym rządem osób stoi jeszcze jeden

uczestnik o numerze ω , który odpowiada na samym końcu). Czytelnik znów zdecyduje, na jak długo przerwać w tym miejscu lekturę.

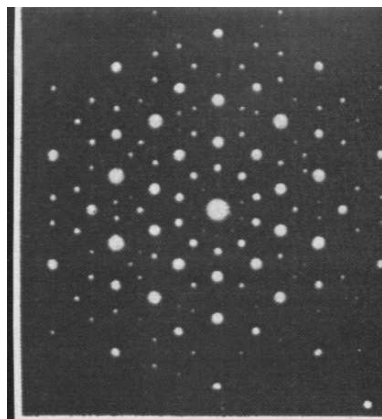
Wydawać by się mogło, że nie da się uniknąć co najmniej dwóch pomyłek, gdyż osoba ω , nie widząc nikogo innego, musi wprost otrzymać kolor swojego kapelusza, co wymagałoby przekazania dodatkowego bitu informacji. Jednak nie należy zapominać o tym, że usłyszała ona odpowiedzi wszystkich pozostałych uczestników, zatem zna kolory kapeluszy k_2, k_3, \dots (wszak ci uczestnicy odpowiadali poprawnie). Jest zatem w stanie obliczyć ciąg ℓ i tym samym zbiór I . W tym momencie łatwo już jest zmodyfikować strategię: pierwsza osoba zamiast c'_1 podaje $c''_1 := (c'_1 + k_\omega) \bmod 2$. Pozostałe osoby o numerach naturalnych, widząc k_ω , są w stanie odzyskać c'_1 i grać jak poprzednio. Natomiast uczestnik ω , znając c'_1 , bez trudu oblicza k_ω .

Łatwo wskazać, jak zmodyfikować powyższą strategię, by działała w przypadku $\omega + 2, \omega + 3$, a nawet $\omega + \omega$. A jaką strategię zastosować dla ω^2 ? A ω^ω ? A może dla każdej liczby porządkowej można wskazać analogiczną strategię? Wreszcie, co w przypadku, gdy mamy więcej kolorów kapeluszy?



Od razu wiedzieliśmy

Nagrodę Nobla z chemii w bieżącym roku uzyskał Daniel Shechtman z Hajfy (Izrael). O jego odkryciu pisaliśmy w *Delcie* 8/1986, publikując oryginalny obraz dyfrakcji elektronów na kryształach gwałtownie schłodzonego stopu Al_6Mn . Oto on.



Wyraźnie widać dziesięciokątną symetrię. Jak wiadomo, nie ma kryształów o symetrii będącej wielokrotnością liczby 5. Bo też nie jest to kryształ, tylko faza metastabilna stopu złożonego z 86% glinu i 14% manganu. Jest trwała w temperaturze pokojowej i niknie przy podgrzaniu do 400°C , gdy następuje restrukturyzacja do „zwykłego” kryształu Al_6Mn .

Od tego – pozornie tylko metalurgicznego – odkrycia zaczęła się ważna epoka badań kwazikryształów.

Wiedzieliśmy o tym już wtedy, pisząc, że odkrycie Shechtmana to *początek wielkiej naukowej sensacji*.

Red.

Prosto z nieba: Czerń nocnego nieba

Astronom w swojej pracy koncentruje się zazwyczaj na badaniu konkretnych obiektów nocnego nieba, stosownie do swojej, dość wąskiej zazwyczaj, specjalizacji. Używając coraz bardziej technicznie wyrafinowanych instrumentów, wykrywa (bądź nie) subtelne efekty przewidziane przez coraz bardziej złożone teorie. Stosunkowo rzadko natomiast obserwacja, którą każdy z nas może przeprowadzić gołym okiem, staje się przedmiotem poważnych rozważań. Przykładem takiego spostrzeżenia o doniosłych konsekwencjach jest stwierdzenie, że niebo nocą jest ciemne. Na pierwszy rzut oka obserwacja ta może wydać się banalna, rozmyślali jednak o niej m.in. Johannes Kepler i Edmond Halley. Dzięki Heinrichowi Olbersowi, dziewiętnastowiecznemu niemieckiemu lekarzowi i astronomowi-amatorowi, szybko urosła ona do rangi doniosłego problemu, któremu uwagę poświęcał później m.in. Kelvin. Cóż jednak niezwyklego może kryć się w mroku nocnego nieba?

Paradoks, kojarzony dziś z nazwiskiem Olbersa, jest bardzo prosty. Przypuśćmy, że Wszechświat miałby być nieskończony, wieczny i statyczny, a koncentracja gwiazd we Wszechświecie – stała. Wówczas przy spoglądaniu w dowolnym kierunku wzrok nasz powinien natrafić na tarczę jakiejś gwiazdy. Ponadto osłabienie natężenia promieniowania odległych gwiazd o czynnik proporcjonalny do kwadratu odległości jest równoważone przez fakt, że liczba gwiazd na jednostkę odległości od Ziemi rośnie o taki sam czynnik. W rezultacie nieboskłon powinien świecić z jasnością Słońca. Nie świeci.

Można zaryzykować tezę, że próby rozwiązania paradoksu Olbersa trwale zmieniły oblicze kosmologii. Odkrycie ucieczki galaktyk przez Edwina Hubble’a doprowadziło do powstania teorii Wielkiego Wybuchu, określenia wieku Wszechświata, pomiarów jego rozmiaru, gęstości, składu i innych własności. Dokładny opis ewolucji Wszechświata od chwil, kiedy był on bardzo gęsty i gorący, wymagał użycia ogólnej teorii względności, fizyki jądrowej oraz fizyki cząstek elementarnych. Obecnie wiemy, że pokolenia gwiazd istnieją jedynie przez ułamek wieku Wszechświata. Fakt, że prędkość światła jest skończona, w połączeniu z rozszerzaniem się Wszechświata oznacza, że istnieje *horyzont cząstek*, na zewnątrz którego znajduje się obszar zawierający obiekty, od których światło jeszcze do nas nie dotarło (i być może nigdy nie dotrze).

Całkiem niezłe, jak na tak „niskobudżetową” obserwację. Pozostaje tylko życzyć formułowania podobnie prostych pytań prowadzących do równie ważnych co niespodziewanych odpowiedzi!

Michał BEJGER

Ze śmiertelnego zimna...

Bardzo znana anegdota głosi, że Fleming (bałaganiarz) nie umył płytek z zakończonym mikrobiologicznym doświadczeniem i po kilku dniach zauważył, że tam, gdzie na płytce w okolicy badanych przez niego stafilocoków pojawiło się zanieczyszczenie grzybem, tam stafilocoki zaczęły wymierać. Po bliższym zbadaniu zjawiska (Fleming może nie od razu sprzątał po sobie, ale nie zostawiał niewyjaśnionych spraw niewyjaśnionymi) okazało się, że zabijała bakterie nieznana uprzednio substancja, wydzielana przez zanieczyszczającego grzyba, później zidentyfikowanego jako *Penicillium notatum*. Tak to podobno odkryto pierwszy antybiotyk – penicylinę. Od 60 lat przemysł produkujący różne antybiotyki rozwinął się niesłychanie, choć odkrywcom życie skomplikowały cechy bakterii i ewolucja: wśród miliardów bakterii zabijanych przez dany antybiotyk zawsze znajdzie się taki dziwoląg (genetycy mówią *mutant*), który jest na ten antybiotyk niewrażliwy, mutant mnoży się i mnoży, a jego wrażliwi „rodzice” giną i w końcu konkretny antybiotyk staje się w leczeniu konkretnej choroby bezużyteczny.

Po odkryciu Fleminga wielu starych ludzi przypomniało sobie o leczniczym działaniu pleśni przykładanej na rany, a uczeni o tym, że pleśni – według zapisów – używali starożytni Grecy i Hindusi do leczenia zakażeń.

Zjawisko rozpowszechniania się oporności na antybiotyki wśród szczepów szpitalnych odkryli po II wojnie światowej badacze japońscy, którzy bez umiaru stosowali antybiotyki i coraz częściej przekonywali się o zaniku ich aktywności. Przenoszenie się jednego genu oporności nie byłoby jeszcze takim nieszczęściem, lecz staje się nim pojawienie się zespołów genów oporności przeciw kilku różnym antybiotynom, przenoszonych jednocześnie. Stąd szczepy bakterii (gronkowiec złocisty), których nie zwalczą żaden znany antybiotyk.

Transfer genów między bakteriami warunkowany jest istnieniem bardzo szczególnych mechanizmów, częstych wśród bakterii i wirusów, usilnie poszukuje się ich w organizmach wyższych. Obszar badań tzw. horyzontalnego przekazywania genów, który odkryliśmy nie tak dawno, dziś spędza sen z oczu badaczy ewolucji świata mikroorganizmów. W tym świecie główną przyczyną ewolucji nie są powolne mutacje genów, lecz przenoszenie się genów. Ewolucjonistom dzisiejszym coraz trudniej postulować, która bakteria jest ewolucyjnie starsza, a która młodsza.

Okazało się także, że zjawisko rosnącej liczby przykładów oporności na antybiotyki w medycynie wywołały warunki terapii, brak wiedzy o mechanizmach tych zjawisk zarówno wśród lekarzy jak i pacjentów. Natomiast oporność taka wśród bakterii glebowych i w zbiornikach wodnych jest normą! To nie dziwi – wszak wiele pierwotnie stosowanych antybiotyków wytwarzają mikroorganizmy, rośliny, bezkręgowce i wydzielają je do środowiska – czemu nie miałyby tam selekcjonować opornych na nie bakterii?

Za sensacyjne jednak należy uznać znalezienie przez kanadyjskich mikrobiologów w próbkach wiecznej zmarzliny bakterii sprzed 30 000 lat, a w nich genów oporności na kilka antybiotyków, takich jak kodujący β -laktamazę (oporność na penicylinę i jej pochodne laktamowe antybiotyki), gen *tetM* chroniący przed tetracykliną i zespół trzech genów nadających oporność na wankomycynę: *vanH-vanA-vanX*. Przy tak starożytnym życiorysie nie mamy także pewności, czy i 30 tysięcy lat temu geny te przeciwstawiały się antybiotynom, czy też miały inną, nieznaną nam funkcję.

Magdalena FIKUS

Doświadczenia myślowe

O wieszaniu bombek na choince

Krzysztof RUDNIK

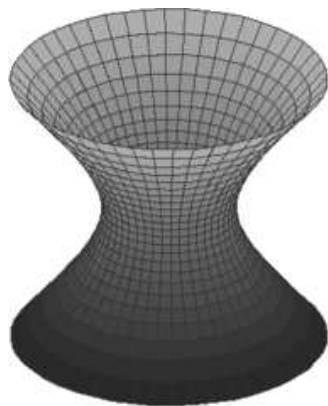
Święta za pasem, więc poeksperymentujmy z wieszaniem bombek na choince.

Nasze bombki są kuliste – nie mają zaczepów, haczyków itp. Będziemy je wieszać za pomocą sztywnych obręczy z drutu w kształcie okręgu. Gdy bombkę uda się opasać obręczą w taki sposób, że nie można jej zsunąć, to cel będzie osiągnięty.

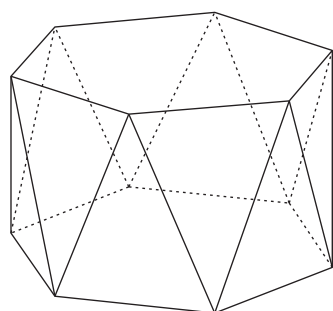
Niestety, bombce brakuje **talii** (jaką ma np. hiperboloida jednowłokowa), wokół której da się ją skutecznie opasać. Możemy, oczywiście, wyciąć w bombce hiperboloidalną talię, nawet tak małą, że nikt ze świątecznych gości tego nie zauważy. Byłoby to jednak oszustwo, bo hiperboloidalna talia nie jest wypukła. Bombka z taką talią też by nie była, a na to nie chcemy się zgodzić!

Czy da się tak zdeformować bombkę, żeby pozostała wypukła i dała się skutecznie opasać? **Czy istnieją wypukłe talie?** Nie ufaj, Czytelniku, intuicji, jeśli podpowiada Ci, że nie, bo...

Figura jest wypukła, jeśli zawiera każdy odcinek o końcach do niej należących.



Hiperboloida jednowłokowa ma talię, ale nie jest wypukła.



Antygraniastosłup

Talia może być wypukła

Do wykonania wypukłej talii potrzebne nam będzie potężne, ale proste w użyciu narzędzie teorii zbiorów wypukłych – **operacja uwypuklenia**, która każdemu zbiorowi B w przestrzeni przyporządkowuje zbiór $\text{Conv}(B)$, czyli najmniejszy zbiór wypukły zawierający B . Uwypukleniem skończonego zbioru punktów jest wielościan (wypukły, oczywiście).

Zbudujmy graniastosłup prawidłowy n -kątny o podstawach W_n i W'_n ($n \geq 3$). Obróćmy podstawę W'_n o kąt π/n wokół osi graniastosłupa, otrzymując wielokąt W''_n , i przyjrzyjmy się zbiorowi $T_n = \text{Conv}(W_n \cup W''_n)$. Otrzymaliśmy wielościan wypukły, którego ścianami bocznymi są trójkąty równoramienne. Jeśli ściany boczne są trójkątami równobocznymi, to wielościan jest **antygraniastosłupem**. Środki jego krawędzi bocznych są wierzchołkami $2n$ -kąta foremnego i leżą wewnątrz walca wyznaczonego przez podstawy W_n i W''_n (dlaczego?), a zatem okrąg na nich opisany ma krótszy promień niż promienie okręgów opisanych na podstawach wielościanu. To zaś oznacza, że skonstruowaliśmy **wypukłą talię!**

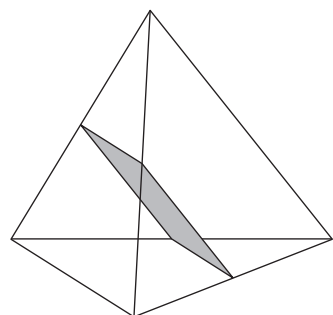
Wykonanie wypukłej bombki z talią jest teraz proste. Wystarczy wyciąć jej cienki plasterk z okolic równika, umiejętnie wkleić w to miejsce odpowiednią talię i uwypuklić to, co powstało! Jeśli dobrze dobierzemy parametry talii (wysokość i głębokość wcięcia), to otrzymamy bryłę bardzo podobną do kuli. Będzie, co prawda, kanciasta, ale przecież nie można mieć (albo nie mieć) wszystkiego naraz...

A teraz... zagadka z niespodzianką

Przy konstrukcjach geometrycznych, w których występują sparametryzowane obiekty, warto się czasem zastanowić, co się stanie, gdy parametry przyjmą wartości graniczne. Np. co będzie, gdy okrąg skurczy się do punktu ($r = 0$) lub się wyprostuje ($r = \infty$). W przypadku konstrukcji talii parametrem jest liczba n ($3 \leq n < \infty$) wierzchołków jej podstawy. Gdy $n \rightarrow \infty$, to talia T_n coraz bardziej przypomina walec i traci swoją taliowatość, by ją w granicy stracić całkowicie. Z tej strony zakresu parametrów nie znajdziemy nic ciekawego.

W talii T_3 też nie ma nic szczególnego. Może się jednak zdarzyć, że stosunek długości krawędzi podstawy do krawędzi bocznej jest równy $\sqrt{2}$. Dolepmy wtedy do podstaw ostrosłupa, których krawędzie boczne mają długość krawędzi bocznej talii. Otrzymany w ten sposób wielościan wypukły z talią widzisz, Czytelniku, codziennie. **Co to za bryła?** (rysunek w numerze).

To była zagadka, a gdzie jest niespodzianka? Żeby ją znaleźć, trzeba przekroczyć granicę. Wyobraźmy sobie, że $n = 2$, tzn. konstrukcję talii zaczynamy od „dwukątów” (czyli odcinków). Jeśli odległość odcinków dobraliśmy w taki sposób, że T_2 jest antygraniastosłupem, to jest to wielościan wypukły z talią o sześciu krawędziach równej długości... Oto obiecana niespodzianka na Święta – czworościan foremny ma talię, która ma kwadratowy przekrój (dlaczego?)!



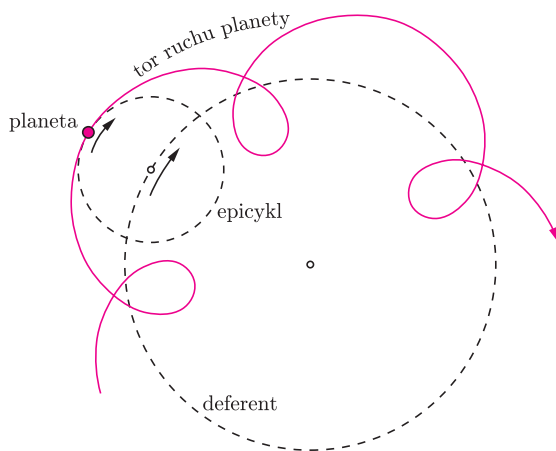
Czworościan foremny też ma talię.

Kopernik i co dalej

„Wstrzymał Słońce, ruszył Ziemię...”, fundamentalne odkrycie Kopernika nie zakończyło dyskusji na temat budowy i ruchów w Układzie Słonecznym. Wręcz przeciwnie, jeszcze dobrych kilka stuleci najwięksi uczeni musieli się mocno nagłować nad tym zagadnieniem.

Ziemia – pępek świata. Starożytni Grecy wyobrażali sobie, że Wszechświat jest kulisty i skończony. Arystoteles dzielił go na dwa światy, „podksiężycowy”, na który składała się Ziemia wraz z jej bliskim otoczeniem, oraz „nadksiężycowy” – obejmujący Księżyc, planety i Słońce, a kończący się na sferze gwiazd stałych. W każdym z obu światów rządziła inna fizyka; świat nadksiężycowy, w przeciwieństwie do podksiężycowego, uznawano za niezmienny i obowiązywał w nim ruch kołowy jednostajny. Według greckich filozofów Układ Słoneczny to nieruchoma Ziemia znajdująca się w środku Wszechświata oraz poruszające się wokół niej, po kolejnych sferach, Księżyc, Merkury,

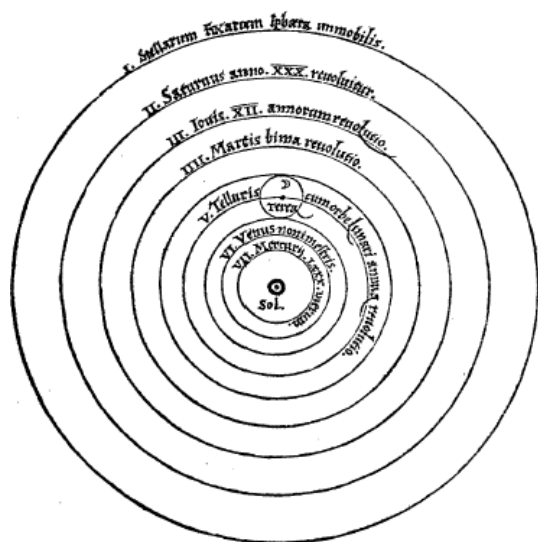
Wenus, Słońce, Mars, Jowisz i Saturn, ostatnia znana wówczas planeta. Postulowana jednostajność i kolistość ruchów w Kosmosie nie zawsze zgadzała się z obserwacjami. Ścisłej Słońce i Księżyc prawie się jej podporządkowały, ale Merkury, Wenus, Mars, Jowisz i Saturn wyraźnie nie. Jednostajność biegu po okręgach starano się ratować, twierdząc, że poruszanie się danej planety jest zestawieniem kilku ruchów kołowych. Tak wprowadzono „deferenty” – niewspółśrodkowe koła, po których jednostajnie przesuwały się środki mniejszych kółek – „epicykli” i po tych epicyklach dopiero krążyły planety (rys. 1). Dla dokładności wymyślono jeszcze coś takiego, jak „punkty wyrównujące” – „ekwenty”. W taki sposób udało się dojść do wiernego opisu rzeczywistego biegu planet, chociaż – jak widać – mechanizmy ruchu w modelu geocentrycznym były bardzo skomplikowane.



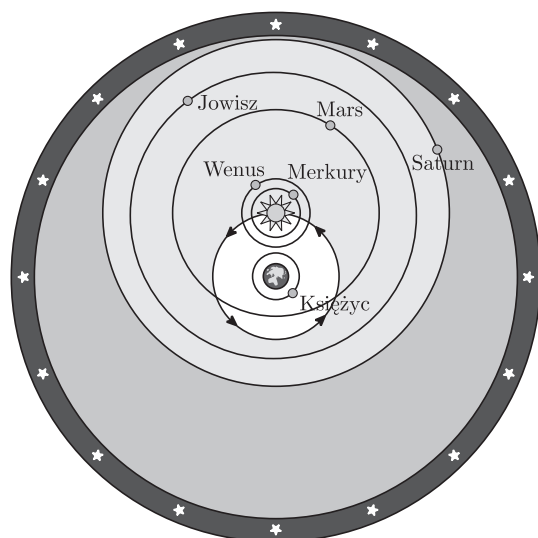
Rys. 1. Ruch planety w systemie geocentrycznym, przedstawiony za pomocą epicyklu i deferentu.

Jednak ruchy Merkurego i Wenus (będących zgodnie z naszą dzisiejszą wiedzą bliżej Słońca niż Ziemia) oraz Marsa, Jowisza i Saturna (dalej od Ziemi) wykazywały cechy wspólne, co w podejściu geocentrycznym nie łączyło się w logiczną całość. Należy jeszcze dodać, że w przypadku zagadnienia odległości Księżyca od Ziemi rachunki prowadzone na podstawie tego modelu dawały prawie dwukrotne zmiany tej odległości, chociaż widoczny rozmiar kątowy średnicy tarczy Srebrnego Globu nie zmienia się wiele więcej niż 10%. Nie mogło to ująć uwagi tak dobrym obserwatorom, jak antyczni astronomowie. Co więcej, warto zwrócić uwagę na to, że w starożytności także obserwowano, na przykład, przemieszczające się komety czy rozbłyski gwiazd, które dziś uznawane są za wybuchy supernowych. Z powodu przeświadczenia o niezmienności świata nadksiężycowego zjawiska te sklasyfikowano wówczas, co może nas zadziwić, jako meteorologiczne, to znaczy występujące w świecie podksiężycowym.

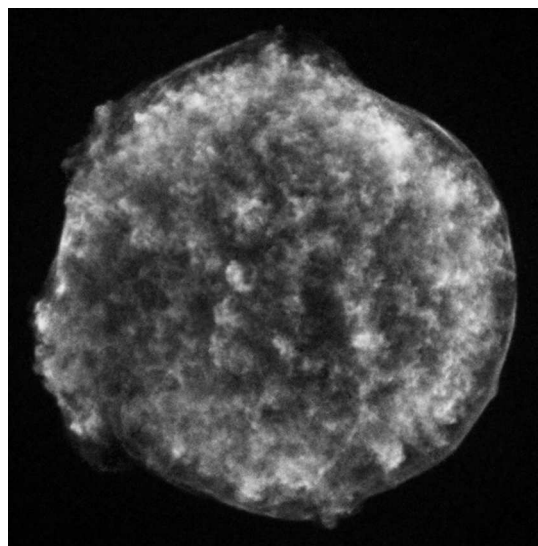
Pomimo tego, że takie podejście do budowy i mechanizmów ruchów we Wszechświecie nie okazało się właściwe, nie można zapominać o osiągnięciach całych pokoleń uczonych i astronomów starożytnych. Ich dokonania, poglądy i zaobserwowane fakty astronomiczne zebrał Ptolemeusz (II wiek n.e.) w dziele, które znane jest nam dzięki arabskiemu przekładowi pod nazwą *Almagest*. Właśnie tam znajduje się, między innymi, opis systemu, a raczej systemów geocentrycznych oraz katalog położeń 1022 gwiazd.



Rys. 2. System Kopernikański.



Rys. 3. System Tychona Brahego. Z – Ziemia, S – Słońce.



Fot. 1. Zdjęcie pozostałości Supernowej Tychona SN 1572, w promieniowaniu rentgenowskim, wykonane przez teleskop kosmiczny Chandra.

Revolucja *De revolutionibus*... Mikołaj Kopernik (1473–1543) zaproponował inną budowę Układu Słonecznego. Według niego planety miały obiegać Słońce po orbitach kołowych, a dodatkowo Ziemia, wokół której krąży tylko Księżyc, kręci się dokoła własnej osi raz na dobę (rys. 2). Dalej podkreślał, że to się tylko wydaje, iż firmament obraca się wokół Ziemi, a trasa Słońca po Zodiaku to także tylko pozór. Wobec ogromu pracy rachunkowej astronom z Torunia obserwacji wykonywał stosunkowo niewiele. Do opisu rzeczywistych ruchów ciał niebieskich używał aparatu matematycznego oraz pojęć epicykli i deferentów, którymi posługiwały się pokolenia uczonych antycznej Grecji, a później Arabów. Za nimi przyjmował też kolistość i jednostajność ruchów planet. Z początku myślał, że do opisu korowodu planet wystarczą mu 34 koła, to jednak okazało się nadmiernie optymistyczne, potrzebował o wiele więcej. Zwróćmy także uwagę na to, że kołowe tory planet w jego modelu nawet nie miały środków w Słońcu. Tak więc w szczegółach system Kopernikański okazał się bardzo złożony. Likwidacja wyróżnionej centralnej pozycji Ziemi we Wszechświecie, a także zaprzeczenie jej nieruchomości było sprzeczne z Pismem Świętym, zatem nie do przyjęcia przez teologów.

Pierwsze skrócone sformułowania tezy Kopernika pojawiły się w jego *Komentarzyku*, który powstał pomiędzy 1507 a 1514 rokiem, a następnie w *Opowiadaniu pierwszym*, którego autorem był G.J. von Lauchen (1514–1574) znany również jako Rheticus (Retyk), w 1540 roku. Dzieło *De revolutionibus orbium coelestium...*, czyli *O obrotach ciał niebieskich...*, najprawdopodobniej było już gotowe w 1532 roku, ale doczekało się wydania dopiero w tym samym roku, w którym zmarł Kopernik.

Wilk syty, ale czy owca cała? Tycho Brahe (1546–1601) – zawiadaczający szlachcic duński, ze słynną srebrno-złotą protezą nosa, zniszczonego w pojedynku, przez dwadzieścia lat wykonywał niezliczone obserwacje ciał niebieskich. Sporządził katalog opisujący położenia 1004 gwiazd. Jego pomiary wykonywane nieuzbrojonym okiem były niezwykle dobre, bo ich dokładność ocenia się na 1 minutę kątową. Były one najlepsze w całej erze przedteleskopowej.

Tycho Brahe próbował uzgodnić obserwowaną rzeczywistość z teologią. W tym celu wymyślił połączenie systemu geocentrycznego z heliocentrycznym, w taki sposób, że nieruchoma Ziemia miała znajdować się w środku Wszechświata, Księżyc i Słońce ją obiegały, wraz z resztą planet zataczających okręgi dokoła Słońca (rys. 3).

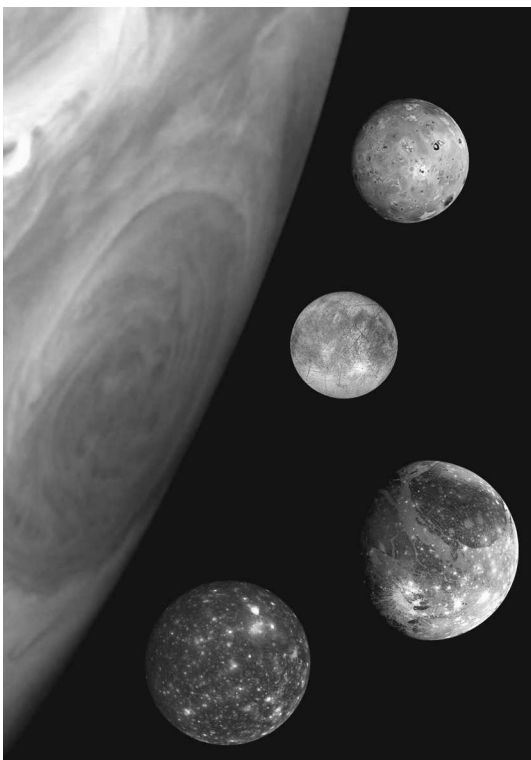
Wśród licznych jego osiągnięć na uwagę zasługują szczególnie dwa odkrycia wywnioskowane z pomiarów paralaksy. Pierwsze, że widoczny w 1572 roku rozbłysk na niebie (my wiemy, że był to rozbłysk supernowej SN 1572 – fot. 1) nie był zjawiskiem atmosferycznym, a zdarzył się wśród gwiazd stałych. Doszedł do tego, otrzymawszy z pomiarów zerową paralaksę na tle Kasjopei. A drugie, że zaobserwowana w 1577 roku kometa to obiekt, który obiega Słońce, przecinając sfery głównie Wenus i Marsa, a nie zjawisko okołozemskie. Było to fundamentalnie ważne, gdyż Starożytni te zjawiska zaliczali do świata podksiężycowego, blisko Ziemi. W taki sposób astronom zdetronizował antyczną zasadę niezmienności świata nadksiężycowego.

Nie koło, lecz elipsa. Johannes Kepler (1571–1630), aby wyznaczyć orbitę Marsa, najpierw musiał opracować własną teorię ruchu Ziemi, a dopiero potem na podstawie położenia Marsa, zebranych przez Tychona Brahego, mógł szukać jego toru. Kosztowało go to całe lata mrówczej pracy. Jako pierwsze odkrył prawo stałości prędkości polowej, znane pod nazwą

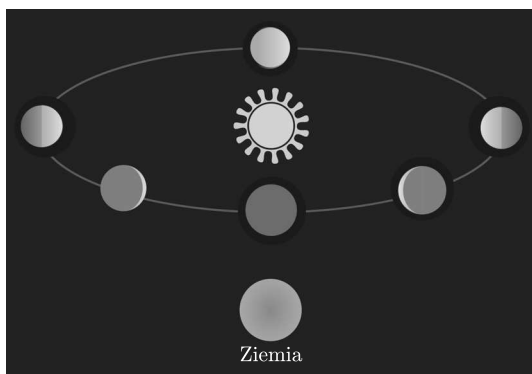
drugiego prawa Keplera. Następnie wykorzystując je, wyliczał orbitę Marsa, ale rachunki w najlepszym razie dawały odstępstwo 8 minut kątowych od danych obserwacyjnych Tychona Brahego, a jak pamiętamy, niepewność tych pomiarów określa się na zaledwie 1 minutę kątową. Kepler pracował więc dalej i dopiero próba dopasowania elipsy, ze Słońcem w jednym z ognisk, dała dobrą zgodność. Starożytne przesłanie o doskonałym ruchu kołowym jednostajnym we Wszechświecie, wobec faktów doświadczalnych, musiało prysnąć jak bańka mydlana.

Kepler spekulował, że przyczyną odkrytego przez niego ruchu miałyby być siła popychająca planety, mająca charakter magnetyczny, działająca w płaszczyźnie, w której się one poruszają. Słońce miało znajdować się w środku takiego „wiru”. W taki sposób powstała tak zwana teoria wirów. Jednym z głównych wyznawców tego trendu był Kartezjusz (1596–1650), skąd wynikało szczególnie przywiązanie do niej Francuzów. Teoria ta królowała w nauce do czasu zwycięstwa teorii grawitacji Newtona.

Luneta i nowe fakty. Galileusz (1564–1642), w jednym zdaniu, podobno ostatnim, które wypowiedział, stwierdził, że „A jednak się kręci” – czyli do końca, konsekwentnie opowiadał się za systemem Kopernika. Do tego wniosku doprowadziły go obserwacje nieba za pomocą teleskopu, które to urządzenie właśnie on po raz pierwszy skierował w kosmos w 1609 roku. Za pomocą lunety zobaczył znacznie więcej niż ktokolwiek, kto spoglądał w niebo gołym okiem. Stwierdził, że Droga Mleczna to nie obłok, ale ogromna liczba skrzących się gwiazd. Wypatrzył cztery księżyce obiegające Jowisza (rys. 4). Jako pierwszy człowiek oglądał ciekawą strukturę powierzchni naszego Księżyca. Zaobserwował zgrubienia wokół równika Saturna (dla nas to pierścienie) i co ostatnie, ale, być może, nawet najważniejsze – zauważył fazy Wenus, analogiczne do faz Księżyca (rys. 5). Występowania faz Wenus nie dało się wyjaśnić w ramach systemu geocentrycznego, ale z zasady działania układu heliocentrycznego było widoczne wprost. Odkrycie naturalnych satelitów Jowisza zaskoczyło zwolenników geocentryzmu, gdyż trudno było im przejść do porządku dziennego nad faktem, że wokół jakiegokolwiek innego obiektu niż Ziemia mogą krążyć ciała niebieskie. W *Dialogach o najważniejszych systemach*... zestawiał układ geocentryczny i pogląd Kopernikański, opowiadając się zdecydowanie za tym drugim. Mędrzec drogo zapłacił za obstawanie przy swoich poglądach. Skazany przez inkwizycję na areszt domowy w willi pod Florencją, spędził w odosobnieniu prawie całe ostatnie dziesięciolecie życia.



Rys. 4. Cztery księżyce Jowisza odkryte przez Galileusza.



Rys. 5. Fazy Wenus obserwowane z Ziemi.

Niedaleko pada jabłko od jabłoni. Jedną z głównych zasług Izaaka Newtona (1642–1727) dla rozwoju nauki było stworzenie mechaniki newtonowskiej. Impulsami do działań w tej dziedzinie, oprócz, oczywiście, jego własnej ciekawości naukowej i dobrej znajomości zastanego ówczesnego stanu wiedzy, były – między innymi – wymiana zdań z jego adwersarzem, Robertem Hooke’em, na temat istoty grawitacji, a także pytania o kształt torów komet, powstałe w związku z odkryciem komety przez jego admiratora, Halleya. Pierwszym potwierdzeniem tego, że Newton znajdował się na dobrej drodze, było wyprowadzenie z siły grawitacji – siły centralnej malejącej z kwadratem odległości, eliptyczności orbit planetarnych i stałości prędkości polowej, czyli pierwszych dwóch praw Keplera. W wydanej w 1686 roku pierwszej księdze *Principiów*... Newton zawarł przede wszystkim prawo powszechnego ciążenia i swoje trzy zasady mechaniki oraz opisywał kolejne rozpracowywane zagadnienia. Chyba najważniejsze w tym dziele było fundamentalne stwierdzenie, że te same prawa fizyki rządzą materią w całym Wszechświecie, czym ostatecznie zlikwidował arystotelejski podział na światy pod- i nadksiężycowy.

Turniej Młodych Fizyków

Rozpoczął się Turniej Młodych Fizyków 2012. Zawody dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych, o charakterze komplementarnym wobec Olimpiady Fizycznej. W Turnieju uczestniczą pięcioosobowe drużyny. Najlepsza z nich wyjedzie na Turniej Międzynarodowy, który odbędzie się w Niemczech (w 2011 roku Międzynarodowy Turniej odbył się w Iranie, polska drużyna zdobyła w nim brązowe medale). Szczegółowe informacje o Turnieju Młodych Fizyków są dostępne na stronie internetowej

<http://ptf.fuw.edu.pl/tmf.html>

Ewentualne zapytania można kierować pod adresem

tmf@ifpan.edu.pl

Termin nadsyłania prac:

31 stycznia 2012 r.

Przykładowe tematy do opracowania:

Przecinanie powietrza

Podczas wirowania kawałka nici lub np. żyłki nylonowej z zamocowanym na końcu ciężarkiem daje się słyszeć wyraźny dźwięk. Zbadaj, w jaki sposób ten dźwięk powstaje oraz od jakich parametrów zależy.

Jasne fale

Oświetl płaski zbiornik z wodą. Gdy na jej powierzchni zostaną wytworzone fale, można będzie zobaczyć jasne i ciemne wzory na dnie zbiornika. Zbadaj zależność między falami a obserwowanymi wzorami.

Bąbelki

Czy jest możliwe pływanie na powierzchni wody, w której występuje dużo bąbelków? Zbadaj, jak pływanie przedmiotu zależy od obecności bąbelków.

Granularny rozbryzg

Gdy kulka stalowa spada na powierzchnię suchego piasku, obserwuje się rodzaj piaskowego rozbryzgu, po którym może nastąpić wyrzucenie pionowej kolumny piasku. Odtwórz to zjawisko i je wyjaśnij.



W szczegółach zaś wytłumaczył, na przykład, nieregularności w ruchu Księżyca, uwzględniając wzajemne oddziaływania grawitacyjne trzech obiektów: Słońca, Ziemi i Księżyca. Kontynuując tę myśl, słusznie sugerował, że w celu wyliczenia teoretycznej orbity Saturna, zgodnej z obserwowaną, należy rozważać siły działające pomiędzy Słońcem, Jowiszem i Saturnem. Zadanie takie zyskało sobie nazwę zagadnienia trzech ciał i było tak trudne, że sam geniusz wyraził się, że „przekracza, jeśli się nie mylę, siłę jakiegokolwiek umysłu ludzkiego”.

Mechanicy nieba. W przypadku rozważania trzech ciał trzeba było małymi krokami rozpracowywać zagadnienie, rozważać przypadki szczególne (na przykład, że jedno z ciał ma znikomą masę lub że masy rozmieszczone są w specjalny sposób), a także stosować inne sposoby upraszczające zagadnienie, jak, na przykład, metodę zaburzeń. Równocześnie z pracami nad problemem trzech ciał rozwijały się inne trendy w mechanice teoretycznej, a postępy aparatu matematycznego, rachunku różniczkowego i całkowego rozszerzały możliwości twórcze mechaników nieba. Istotne zasługi w budowaniu teorii na potrzeby matematycznego opisu ruchów obiektów w Układzie Słonecznym położyli uczeni Oświecenia: Szwajcar Leonhard Euler oraz Francuzi: Alexis Claude de Clairaut, Jean d’Alembert, Joseph Louis Lagrange, Pierre Simon de Laplace. Chociaż w połowie XVIII wieku podejrzewano istnienie jeszcze jakiejś nieznannej siły oprócz siły grawitacji, mającej wpływ na ruch Księżyca, to wkrótce udowodniono jedynowładztwo siły ciężkości Newtona. Nie mniej ważne było, że Euler uściślił pojęcie punktu materialnego, prędkości, przyspieszenia – tak jak to dziś rozumiemy, odkrył zasadę zachowania pędu. To również on pierwszy zapisał równania Newtona w znanej nam postaci: $\vec{F} = m\vec{a}$ i nieco później sformułował podstawowe pojęcia i zrezygnował z teorii bryły sztywnej. Pracował także nad ogólnym problemem trzech ciał, ale rozwiązał go w szczególnym przypadku dla trzech ciał ułożonych na linii prostej. Następnie Lagrange, między innymi, opracował inny szczególny przypadek, dla ciał w wierzchołkach trójkąta równobocznego. W latach 60. XVIII wieku osiągnięcia mechaniki teoretycznej pozwoliły już, między innymi, na ukoronowanie prac rozpoczętych przez samego Newtona, mających na celu bardzo dokładne przewidywanie przyszłych położenia Księżyca na tle gwiazd stałych w nocy i w odniesieniu do położenia Słońca w dzień. Dzięki temu udało się stworzyć tablice tych wielkości, za pomocą których nawigatorzy po raz pierwszy w historii mogli skutecznie i dokładnie określać długość geograficzną położenia statków na oceanach.

Następne planety. Uran widziany był wcześniej przez różnych astronomów, ale dopiero William Herschel w 1781 roku stwierdził, że nie jest to gwiazda stała, i ostrożnie sugerował, że może to być kometa. W konsekwencji już wkrótce astronomowie zorientowali się, że jest to kolejna planeta, pierwsza odkryta od czasów starożytnych.

Następna planeta, Neptun, podobnie jak Uran, także była już wcześniej obserwowana, choćby przez samego Galileusza, ale bez świadomości, co to za obiekt. Orbita Urana wykazywała pewne odstępstwa od toru wyliczonego z oddziaływań grawitacyjnych Słońca i znanych planet. Wytłumaczeniem okazało się istnienie jeszcze jednej, nieodkrytej planety. Orbitę tego obiektu wyznaczyli w tym samym czasie John Couch Adams i Urbain Le Verrier, z tym że obliczenia Francuza były lepsze. Neptuna, według jego wskazówek, bardzo szybko zidentyfikowano na niebie 23 września 1846 roku w obserwatorium w Berlinie.

Właściwie na tym można by zakończyć tę historię, gdyż dziś Międzynarodowa Unia Astronomiczna uznaje 8 planet: Merkurego, Wenus, Ziemię, Marsa, Jowisza, Saturna, Urana i Neptuna. Jednak w 1930 roku obserwując niebo z Arizony, odkryto niewielkie ciało niebieskie o średnicy tylko 2300 km, nazwane Plutonem. W 1978 roku zauważono jego największy księżyc, około 2 razy mniejszy od niego, a w 2005 roku jeszcze dwa inne małe księżycy. Przez 76 lat Plutona uznawano za dziewiątą planetę, ale w 2006 roku zdegradowano go z tej pozycji, przyznając status planety karłowatej.

Małą Deltę przygotowała Bronisława ŚREDNIAWA

Kącik przestrzenny (10) Trzy rozwiązania pewnego zadania

W tym kąciku zajmiemy się pewnym zadaniem o czworościanie foremnym, o którym, między innymi, miałem okazję opowiadać na XLVI Szkole Matematyki Poglądowej pod hasłem **Podejście niestandardowe**.

Dany jest czworościan foremny o krawędzi długości $a + b$. Punkty P i Q leżą na krawędziach AB i CD , przy czym $AP = a$, $BP = b$, $CQ = a$, $DQ = b$. Znaleźć długość odcinka PQ .

Zadanie jest szkolne, a więc zobaczymy, jak wygląda typowo szkolny sposób rozwiązywania.

Sposób I – za pomocą twierdzenia Pitagorasa

Oznaczmy przez M i N środki krawędzi AB i CD . Odcinki CM i DM są wysokościami trójkątów równobocznych ABC i ABD , a więc ich długości są równe $\frac{\sqrt{3}}{2}(a + b)$. Trójkąt CMD jest więc równoramienny, zatem jego środkowa MN jest jednocześnie jego wysokością i z twierdzenia Pitagorasa obliczymy, że $MN = \frac{1}{2}(a + b)$. Jeśli $a = b$, to wiemy już, że $PQ = MN = a\sqrt{2}$. Dalej przyjmijmy dla ustalenia uwagi, że $a > b$. Trójkąt MNQ jest prostokątny, a skoro $NQ = \frac{a-b}{2}$, to znów korzystając z twierdzenia Pitagorasa, obliczymy, że

$$MQ^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2}.$$

Płaszczyzna CDM jest płaszczyzną symetralną odcinka AB , a więc jest do niego prostopadła. To samo dotyczy dowolnej prostej w niej zawartej, skąd wniosek, że $MQ \perp AB$. Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta prostokątnego PMQ dostajemy

$$PQ^2 = MP^2 + MQ^2 = \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a-b)^2}{4} + \frac{(a+b)^2}{2} = a^2 + b^2,$$

skąd $PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Rachunki dość uciążliwe, ale wynik podejrzanie ładny... Spróbujmy więc innego podejścia. Doświadczony uczestnik olimpiad, jak również Czytelnik Uważny, spojrzalby na to w następujący sposób.

Sposób II – za pomocą wpisania czworościanu foremnego w sześcián

Na czworościanie $ABCD$ opiszmy sześcián $AC'BD'A'CB'D$. Długość jego krawędzi jest równa $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Niech Q' będzie takim punktem na odcinku $C'D'$, że $Q'C' = a$ i $Q'D' = b$. Wtedy odcinek QQ' jest prostopadły do podstawy $AC'BD'$, a jego długość jest równa długości krawędzi sześciánu, czyli $\frac{a+b}{\sqrt{2}}$. Znowu, jeśli $a = b$, to punkt Q' pokrywa się z punktem P , a więc odcinek PQ pokrywa się z QQ' – stąd $PQ = \frac{a+b}{\sqrt{2}} = a\sqrt{2}$. W przeciwnym przypadku trójkąt $PQ'Q$ jest prostokątny. Korzystając np. z twierdzenia Talesa, możemy obliczyć, że $PQ' = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$. Stosując teraz twierdzenie Pitagorasa dla trójkąta $PQ'Q$, otrzymujemy

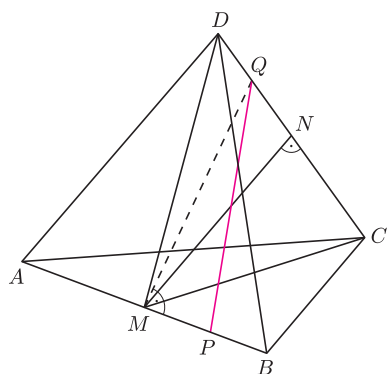
$$PQ^2 = PQ'^2 + QQ'^2 = \frac{(a-b)^2}{2} + \frac{(a+b)^2}{2} = a^2 + b^2$$

i znów $PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$.

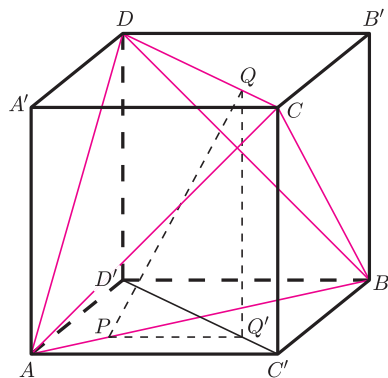
Tym razem rachunki były krótsze, ale nadal trzeba coś obliczyć, a poza tym w obu rozwiązaniach obliczenia nie obejmują przypadku $a = b$. Pokażemy więc sposób, który daje wynik natychmiast i bez rozpatrywania dwóch przypadków.

Sposób III – za pomocą... chytrego, niestandardowego pomysłu

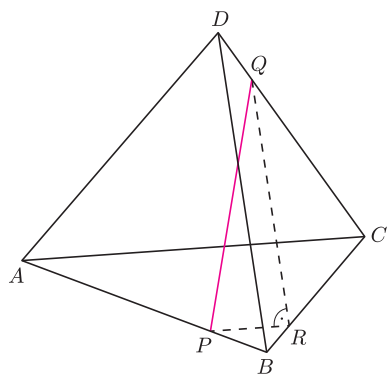
Niech R będzie takim punktem leżącym na krawędzi BC , że $BR = b$ i $CR = a$. Trójkąty BPR i CQR są równoboczne, a stąd wynika, że $PR = b$ i $QR = a$. Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wnioskujemy, że $PR \parallel AC$ i $QR \parallel BD$. Ale krawędzie AC i BD czworościanu $ABCD$ są prostopadłe (dlaczego?), skąd wnioskujemy, że trójkąt PRQ jest prostokątny. Twierdzenie Pitagorasa daje więc wynik $PQ = \sqrt{a^2 + b^2}$.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

Michał KIEZA

Protokół posiedzenia Jury XXXIII Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki



Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:
Antoni Leon Dawidowicz – przewodniczący, Wiktor Bartol, Andrzej KomisarSKI, Marek Kordos, Agnieszka Wojciechowska-Waszkiewicz
na posiedzeniu 13 września 2011 roku w Łodzi po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, że

- **złoty medal** i nagrodę w wysokości 1600 zł otrzymuje **Wojciech Nadara** z XIV LO im. S. Staszica w Warszawie za pracę *O prawdopodobieństwie, wyznacznikach i pokryciach cyklowych*,
- **2 srebrne medale** i nagrody w wysokości 1000 zł otrzymują **Anna Dymek** z V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie za pracę *Sangaku – japońskie inspiracje*, oraz **Aleksander Czarnecki** z I LO im. K. Brodzińskiego w Tarnowie za pracę *Problem pewnych ciągów*,
- **brązowy medal** i nagrodę w wysokości 600 zł otrzymuje **Adam Baranowski** z I LO im. M. Skłodowskiej-Curie w Sopocie za pracę *Liczby zespolone w geometrii*.

Opiekunowie prac: Andrzej Daszke, Jacek Dymel, Maciej Rzeszut i Renata Żywiec, otrzymują dyplomy honorowe.

Wszyscy finaliści i opiekunowie prac otrzymali również nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwa Szkolne i Pedagogiczne oraz Wydawnictwo Naukowe PWN.

(—) podpisy Członków Jury

Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin znajduje się na stronie deltami.edu.pl
Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2012 roku**.



Wyniki XXVIII Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 2–5 VI 2011

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2011/12 zaproponowane przez Jury tematy to:

- liczby Catalana,
- zbiory wypukłe,
- jak to się zaczęło – wrywki z historii matematyki,
- ile informacji jest w informacji,
- prawie poprawne „dowody” słynnych hipotez,
- zanim powstał kalkulator,
- bałagan kontra porządek,
- matematyka do wzięcia w rękę.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Jury w składzie: prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Tomasz Bielaczyc, dr Paweł Błaszczak, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, dr Żywilla Fechner, dr Maria Kania, dr Erwin Kasperek, mgr Renata Kawa, dr Tomasz Kochanek, dr hab. Mieczysław Kula, dr hab. Janusz Morawiec, dr Barbara Przebieracz, dr Beata Rothkegel, dr Małgorzata Serwecińska, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, **postanowiło przyznać:**

I miejsce: **Marcel Zięba** z II LO w Jaworznie za pracę *Liczby zespolone w geometrii*;

II miejsce: **Agata Drewniak** z I LO w Pszczynie za pracę *Od sznurków do płyt, czyli jak się komunikujemy*;

III miejsce: **Karol Bacik** z VIII LO w Katowicach za pracę *Grafy eulerowskie*;

wyróżnienia: **Anna Laskorz** z ZSL w Ustrzykach Dolnych za pracę *Tajemnice średnich*

oraz

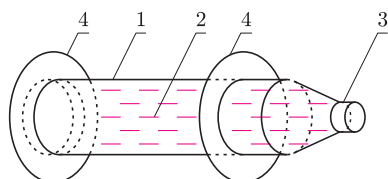
Przemysław Wawrzyniak z I LO w Bydgoszczy za pracę *Wybrane algorytmy grafowe i ich zastosowania*.

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili Agatę Drewniak**, a **uczniowie Ię Rygielską** z I LO w Koszalinie za przedstawienie pracy *Rozmycie*.

Jak zrobić magiczną soczewkę?

Stanisław BEDNAREK

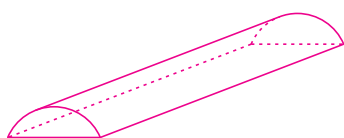
W tym odcinku będziemy nadal zajmowali się magiczną soczewką, której działanie poznaliśmy, wykonując doświadczenia opisane w poprzednim artykule. Wykonamy kilka odmian tej soczewki, dzięki którym można przeprowadzać zabawne i zadziwiające doświadczenia.



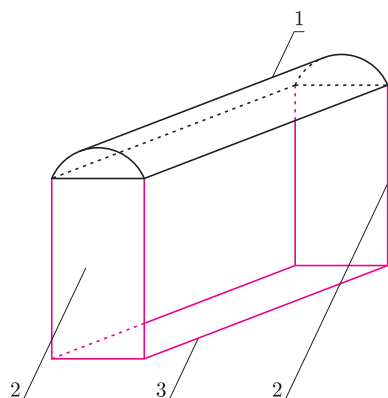
Rys. 1. Magiczna soczewka w postaci przezroczystej szpulki wykonana z butelki; 1 – plastikowa, przezroczysta butelka, 2 – woda, 3 – zakrętka, 4 – pierścień z tektury.



Fot. 1. Model magicznej soczewki w postaci szpulki, w której użyto kawałka szklanego pręta.



Rys. 2. Odcinek przezroczystego walca przeznaczony do zbudowania magicznej soczewki.



Rys. 3. Magiczna soczewka w postaci ramki; 1 – odcinek walca, 2 – wspornik, 3 – podstawa; wszystkie elementy są wykonane z materiału przezroczystego.

Potrzebne nam będą następujące przedmioty i materiały: kilka przezroczystych, zakręcanych plastikowych butelek o różnych średnicach z cienkimi cylindrycznymi ściankami bocznymi (należy poszukać butelek ze ściankami jak najmniej wyprofilowanymi – dobrze nadają się do tego celu np. butelki od tanich szamponów do włosów), duże naczynie z wodą, kilka kartek papieru, pisak lub drukarka, kawałek grubej tektury, cienka płytk z przezroczystego tworzywa sztucznego, cyrkiel, ołówek, linijka, klej cyjanoakrylowy, nożyczki. Możemy ponadto użyć kawałka przezroczystego pręta szklanego o średnicy około 1–2 cm lub większej i długości kilku centymetrów, podobnych rozmiarów kawałka przezroczystego pręta plastikowego, piłki do metalu, pilnika i pasty polerskiej. Przydatna będzie również cylindryczna soczewka Fresnela, którą można czasami kupić w sklepie z artykułami optycznymi lub przez Internet, i kawałek pręta o długości kilkudziesięciu centymetrów, wykonany z dowolnego materiału.

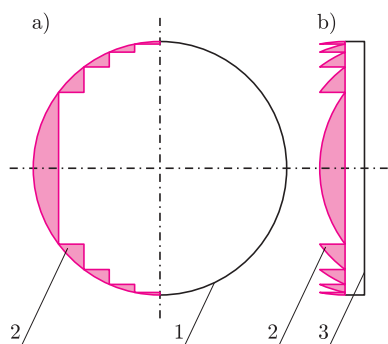
Na początek butelki całkowicie napełniamy wodą i zakręcamy, tak żeby nie było w nich pęcherzyków powietrza. Na kartce piszemy serię słów złożonych z liter mających poziomą oś symetrii oraz z liter jej niemających. Możemy też wykreślić pary różnych figur, w których tylko jedna ma poziomą oś symetrii. Jak pamiętamy, żeby oglądać obrazy tworzone przez magiczną soczewkę, należy trzymać butelkę w odpowiedniej odległości od napisów lub rysunków. Odległość ta powinna być dwa razy większa niż ogniskowa butelki-soczewki.

Łatwy sposób na rozwiązanie tego problemu polega na umocowaniu na butelce dwóch pierścieni z grubej tektury, zapewniających jej stałą odległość od kartki z napisami. Taka magiczna soczewka, przedstawiona na rysunku 1, wygląda jak duża szpulka z grubą, przezroczystą osią. Używamy jej, kładąc na kartce z napisami lub rysunkami i powoli po niej tocząc. Mając butelki o różnych średnicach, można wykorzystać je do zbudowania zestawu magicznych soczewek i sprawdzenia, jak średnica butelki wpływa na promień zewnętrzny pierścieni, zapewniających najlepsze wyniki obserwacji. Magiczną soczewkę w postaci szpulki możemy również wykonać z kawałka przezroczystego pręta szklanego lub plastikowego. Przykład otrzymanej w ten sposób soczewki przedstawia fotografia 1.

Magiczna soczewka zrobiona z butelki napełnionej wodą ma tę wadę, że jest wrażliwa na zmiany temperatury. Prosty sposób poradzenia sobie z tym problemem przedstawiony jest na stronie deltami.edu.pl

Opisana wyżej soczewka ma dość krótką ogniskową, co może być niewygodne, ponieważ trzeba tę soczewkę umieszczać blisko oglądanych napisów. Jeżeli dysponujemy przezroczystym, plastikowym prętem, możemy go przeciąć piłką do metalu równoległe do podłużnej osi, wyrównać pilnikiem powierzchnię przecięcia, a następnie wypolerować ją pastą polerską i wykorzystać otrzymany odcinek walca jako magiczną soczewkę, taką jak na rysunku 2. Można jej używać, trzymając bezpośrednio palcami w odległości równej jej podwójnej ogniskowej od napisów albo, co jest znacznie wygodniejsze, zamocować w specjalnej ramce, pokazanej na rysunku 3, zbudowanej z trzech pasków wyciętych z plastikowej, przezroczystej płytki i połączonych klejem cyjanoakrylowym. Otrzymaną ramkę ustawiamy na kartce z napisami i przesuwamy ją po kolejnych parach słów. Magiczna soczewka sporządzona z odcinka walca może mieć znacznie dłuższą ogniskową niż soczewka wykonana z pełnego walca.

Jeszcze ciekawszą (i bardziej tajemniczą) odmianę magicznej soczewki możemy zrobić, wykorzystując cylindryczną soczewkę Fresnela. Jej nazwa pochodzi od nazwiska francuskiego uczonego, który zajmował się głównie badaniem zjawisk optycznych. Zauważył on, że soczewki mają bardzo dużo „zbędnego” materiału. Dla ich właściwego działania wystarczą tylko cienkie pierścienie o przekroju



Rys. 4. Zasada budowy soczewki Fresnela; 1 – odrzucona część materiału, 2 – zachowany materiał, 3 – przezroczysta płytka.

schodków (rys. 4a). Resztę materiału można odrzucić, a wspomniane pierścienie umieścić na jednej przezroczystej płytce (rys. 4b). Pozwala to otrzymać soczewki o rozmiarach nawet kilkudziesięciu centymetrów i bardzo małej grubości, a przy tym lekkie i wygodne w użyciu, gdyż można je zwinąć w rulon, jeżeli zostaną wykonane z giętkiego, przezroczystego plastiku.

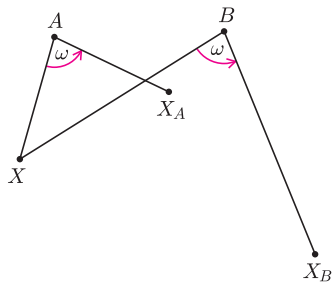
W praktyce soczewki Fresnela produkuje się łatwo i tanio przez wyciskanie odpowiedniego układu rowków (współśrodkowych dla soczewek sferycznych i równoległych dla soczewek cylindrycznych) na przezroczystych, plastikowych płytkach lub arkuszach giętkiej folii. Soczewek Fresnela używa się m.in. jako kondensatorów do tworzenia równoległej wiązki światła w rzutnikach pisma, lup o dużych rozmiarach oraz przykleja na tylnych szybach samochodów dla przybliżenia kierowcy obrazu drogi za pojazdem. Soczewki Fresnela nie są jednak używane w precyzyjnych przyrządach optycznych, np. w teleskopach czy mikroskopach, ponieważ krawędzie rowków nieco zniekształcają obraz. W naszych doświadczeniach nie musimy się tą wadą soczewek Fresnela przejmować.

Mając cylindryczną soczewkę Fresnela w postaci płaskiej, rowkowanej płytki, przyklejamy ją do końca dowolnego pręta o długości kilkudziesięciu centymetrów. Otrzymujemy w ten sposób „magiczną różdżkę”, której możemy używać do pokazu sztuki cyrkowej. W tym celu kartkę z napisami zawieszamy pionowo i ustawiamy przed nią oglądającego pokaz widza. Koniec pręta zaopatrzonego w soczewkę umieszczamy między widzem i kartką z napisami. Polecamy następnie widzowi patrzeć przez soczewkę na napisy. Wcześniej należy sprawdzić, w jakich odległościach powinny być oko widza i soczewka, żeby najlepiej zobaczył on obrazy tej samej wielkości, co napisy. Przesuwając soczewkę nad kolejnymi liniami napisów, argumentujemy, że nasza soczewka jest „inteligentna” – potrafi zrozumieć napisane słowa i, zależnie od ich treści, jedno z nich odwraca, a innych nie. Ostatnie doświadczenie jest bardzo prostym przykładem tego, iż wiele magicznych sztuk, przedstawianych np. w cyrku czy w telewizji, polega na umiejętnym wykorzystaniu zjawisk i praw fizyki.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1333. Na płaszczyźnie dane są punkty A i B . Dany jest też kąt skierowany ω . Przez X_A , X_B oznaczamy obraz punktu X przy obrocie o kąt ω względem punktu A , B , odpowiednio. Znaleźć wszystkie punkty X , dla których trójkąt $X X_A X_B$ jest równoboczny. Rozwiązanie na str. 8

M 1334. Znaleźć największą liczbę naturalną n , nie większą od 2011, dla której liczba $S_n = 1^2 + 2^3 + 3^4 + \dots + n^{n+1}$ jest podzielna przez 3. Rozwiązanie na str. 2

M 1335. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych x, y, z , spełniających $0 < x < y < z < x + 1$, zachodzi nierówność $x^2 + y^2 + z^2 < xy + yz + zx + z - x$.

Rozwiązanie na str. 23

Redaguje Ewa CZUCHRY

F 801. W dużym naczyniu, zamkniętym ruchomym tłokiem, znajduje się powietrze o ciśnieniu p_1 oraz bańka mydlana o promieniu r . Napięcie powierzchniowe błony mydlanej wynosi σ , temperatura układu T jest utrzymywana na stałym poziomie. Wyznaczyć ciśnienie p_2 , do którego należy sprężyć powietrze za pomocą tłoka, żeby promień bańki zmniejszył się dwukrotnie. Rozwiązanie na str. 3

F 802. W dwóch komorach izolowanego cieplnie naczynia, przedzielonego nieprzewodzącą ciepła przegrodą, znajdują się dwie ciecze o pojemnościach cieplnych c_1 oraz c_2 , których temperatury wynoszą, odpowiednio, T_1 i T_2 . Po usunięciu przegrody różnica początkowej temperatury jednej z cieczy oraz ustanowionej temperatury równowagi okazała się dwa razy mniejsza od początkowej różnicy temperatur cieczy. Znaleźć stosunek mas cieczy m_1/m_2 . Rozwiązanie na str. 6

Supernowa na żądanie

Tegoroczną Nagrodą Nobla z Fizyki podzielią się Saul Perlmutter, szef *Supernova Cosmology Project*, oraz Brian P. Schmidt i Adam G. Riess, obaj z *High- z Supernova Search Team*, za **odkrycie przyspieszonej ekspansji Wszechświata za pomocą obserwacji dalekich supernowych**.

O publikacjach [1, 2], za które głównie została przyznana tegoroczna nagroda, było głośno na początku 1998 roku, czyli jeszcze przed ich ostatecznym opublikowaniem. Oczywiście i my o tym pisaliśmy (*Delta* 5/1998). Wyniki te zostały niezależnie potwierdzone analizą anizotropii relikтового mikrofalowego promieniowania tła oraz przeglądami wielkoskalowych struktur Wszechświata (*Delta* 11/2000, 6/2003, 12/2006), co doprowadziło do uznania standardowego modelu kosmologicznego Λ CDM, według którego Wszechświat wygląda na euklidesowy, a na jego gęstość energii (zgodną z gęstością krytyczną, czyli z „euklidesowością” właśnie) składa się ciemna energia (prawie 3/4), ciemna materia (prawie 1/4), niecała jedna dwudziesta zwykłej materii oraz zaniedbywalne wkłady od promieniowania i neutrin. Choć nadal nie wiemy, ani czym jest ciemna materia, ani jak należy interpretować ciemną energię, to za pierwszy krok w kierunku obecnego paradygmatu kosmologicznego Nagroda Nobla należała się jak psu kość.

W latach osiemdziesiątych XX wieku dojrzał pomysł wykorzystania supernowych Ia jako świec standardowych. Eksplozje te powstają w układach podwójnych białego karła z inną gwiazdą, którą karzeł okrada z materii do momentu przekroczenia granicy Chandrasekhara, gdy następuje termojądrowy wybuch i gwiazda przez kilka tygodni świeci jaśniej od macierzystej galaktyki. Ponieważ za każdym razem wybuchu prawie identyczny obiekt, więc ewolucja jego jasności absolutnej jest zawsze bardzo podobna, a ewentualne odstępstwa można monitorować i pomiar jasności odpowiednio poprawić.

Problem polega tylko na tym, że taki wybuch zdarza się w przeciętnej galaktyce raz na kilkaset lat, a do precyzyjnego pomiaru trzeba użyć dużego teleskopu, na którym czas pomiarowy musi być rezerwowany z dużym wyprzedzeniem. Problem ten rozwiązał Perlmutter w 1988 roku, a swoje podejście nazwał *supernowa na żądanie*. Za pomocą czterometrowego teleskopu wyposażonego w CCD (co obecnie jest standardem, ale ćwierć wieku temu jeszcze nie było) jego zespół przeglądał niebo tuż po nowiu, a następnie po trzech tygodniach (czyli przed kolejnym nowiem) i automatycznie porównywał zdjęcia, poszukując kandydatów na supernowe. Każdy przegląd obejmował tak olbrzymią liczbę galaktyk, że za każdym razem można było oczekiwać około tuzina kandydatów, którymi mogły zająć się zarezerwowane wcześniej duże teleskopy. Pomimo tak zaawansowanego logistycznie przedsięwzięcia uzysk był bardzo mały. Pierwszy wynik,

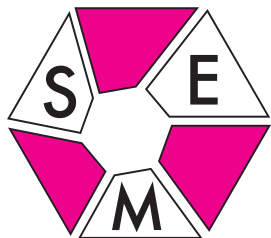
oparty o pojedynczą supernową o względnym przesunięciu linii widmowych $z \approx 0,5$ został opublikowany w 1995 roku [3], a tytuł publikacji wskazuje, że oczekiwano zaobserwowania spowolnienia ekspansji Wszechświata. Zasadniczym rezultatem miało być porównanie odległości bolometrycznej wyznaczonej na podstawie jasności obserwowanej i odległości wynikającej z przesunięcia linii widmowych z . Związek ten jest liniowy (prawo Hubble’a) aż do $z \approx 0,2$, a dla większych odległości zaczyna w nietrywialny sposób zależeć od historii ekspansji. Mocno upraszczając, można powiedzieć, że wyhamowywanie ekspansji w epoce po wybuchu powodowałoby wzrost jasności obserwowanej i odwrotnie. Efekt ten powinien być najlepiej widoczny dla $0,2 < z < 1$, czyli dla czasów wybuchu sięgających połowy wieku Wszechświata. W tym samym roku Perlmutter wraz z Goobarem przedstawili [4], jak za pomocą pomiarów kilkudziesięciu odległych supernowych Ia ($z > 0,2$) można określić, czy ekspansja Wszechświata zwalnia czy przyspiesza. W tym samym czasie do gry włączył się konkurencyjny zespół Schmidta, w którym pierwsze skrzypce grał Riess (w 1995 roku mieli oni, odpowiednio, 28 i 26 lat!). Trzy lata później oba zespoły oświadczyły, że z ich pomiarów wynika przyspieszanie ekspansji Wszechświata, co może, i przeważnie jest, interpretowane jako obecność ciemnej energii.

Podobny wynik dwóch różnych zespołów wzmacniał wiarygodność przekazu, ale nadal pozostawały wątpliwości, czy zmniejszona obserwowana jasność odległych galaktyk nie jest spowodowana czymś innym. Riess poszedł za ciosem i postanowił sprawdzić, czy dla jeszcze odleglejszych supernowych ($z > 1$) da się zaobserwować spowolnienie przewidywane przez model Λ CDM, spowodowane początkową dominacją materii nad ciemną energią. W tym celu już wstępne poszukiwania trzeba było przenieść na teleskop Hubble’a, który został wyposażony w *Advanced Camera for Surveys*. Wyniki zostały opublikowane w 2004 roku [5] i potwierdziły oczekiwane spowolnienie, a tym samym model Λ CDM.

Myślę, że należy podkreślić nie tylko znakomite wyniki osiągnięte przez tegorocznych noblistów, ale również, a może przede wszystkim, ich zdolności organizacyjne. Wizja nie wystarczy, potrzebna jest jeszcze determinacja.

Piotr ZALEWSKI

- [1] A.G. Riess i inni, *Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant*, *Astronom. J.* **116** (1998), 1009–1038.
- [2] S. Perlmutter i inni, *Measurement of Ω and Λ from 42 high-redshift supernovae*, *Astrophys. J.* **517** (1999), 565–586.
- [3] S. Perlmutter i inni, *A Supernova at $z = 0.458$ and implications for measuring the cosmological deceleration*, *Astrophys. J.* **440** (1995), 41–44.
- [4] A. Goobar and S. Perlmutter, *Feasibility of measuring the cosmological constant Λ and mass density Ω using type Ia supernovae*, *Astrophys. J.* **450** (1995), 14–18.
- [5] A.G. Riess i inni, *Type Ia supernova discoveries at $z > 1$ from the Hubble Space Telescope: Evidence for past deceleration and constraints on dark energy evolution*, *Astrophys. J.* **607** (2004), 665–687.



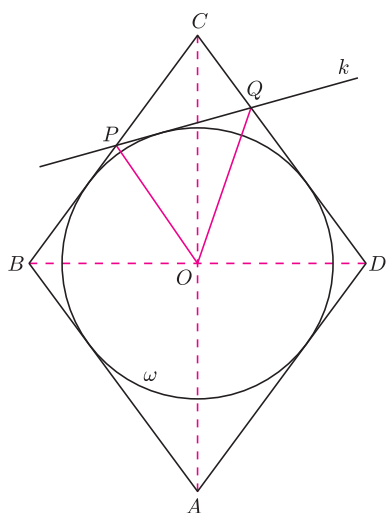
Obóz naukowy OMG

Od 29 maja do 4 czerwca w Perzanowie w woj. mazowieckim odbywał się Obóz Naukowy Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Wzięło w nim udział 20 uczestników, wyłonionych spośród laureatów VI OMG.

W trakcie tygodnia uczestnicy rozwiązywali 21 zadań podczas zawodów indywidualnych oraz 11 zadań w trakcie Meczu Matematycznego, który odbył się na zakończenie Obozu. Uczestnicy wzięli również udział w różnorodnych zajęciach poszerzających ich wiedzę matematyczną, przydatną w rozwiązywaniu zadań olimpijskich.

Zadania zaproponowane uczestnikom miały różnorodny poziom, były też takie, które zostały rozwiązane przez wszystkich. Poniżej prezentujemy zadanie, które zostało poprawnie rozwiązane tylko przez jednego uczestnika obozu.

Okrąg ω jest wpisany w romb $ABCD$. Prosta k , styczna do okręgu ω , przecina odcinki BC i CD odpowiednio w punktach P i Q . Wykaż, że wartość iloczynu $BP \cdot DQ$ nie zależy od wyboru stycznej k .



Niech O oznacza środek okręgu ω (jest to jednocześnie punkt przecięcia przekątnych rombu).

Ponieważ proste DQ i PQ są styczne do okręgu ω , więc

$$\sphericalangle DQO = \sphericalangle PQO = \alpha.$$

Analogicznie

$$\sphericalangle BPO = \sphericalangle QPO = \beta.$$

Z równości $CD = CB$ otrzymujemy również, że $\sphericalangle QDO = \sphericalangle PBO = \gamma$.

Sumując kąty czworokąta $PQDB$, otrzymujemy $2\alpha + 2\beta + 2\gamma = 360^\circ$, skąd $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$. W takim razie

$$\sphericalangle DOQ = 180^\circ - \sphericalangle ODQ - \sphericalangle OQD = 180^\circ - \gamma - \alpha = \beta.$$

Z równości odpowiednich kątów otrzymujemy, że trójkąty DOQ i BPO są podobne, skąd mamy

$$\frac{DO}{DQ} = \frac{BP}{BO}.$$

W takim razie iloczyn $DQ \cdot BP$ jest stały i wynosi $DO \cdot BO$.

Równie interesującym zadaniem okazało się zadanie z Meczu Matematycznego o następującej treści:

Na przyjęciu spotkało się n osób. Okazało się, że żadnych dwóch znajomych nie ma wspólnego znajomego. Ponadto każdych dwóch nieznanymych ma dokładnie dwóch wspólnych znajomych. Udowodnij, że wszystkie osoby obecne na tym przyjęciu mają taką samą liczbę znajomych.

Zadanie zostało rozwiązane przez jedną z dwóch drużyn, ale przedstawienie pełnego rozwiązania sprawiło jej spore kłopoty. Nie wymagało żadnej wiedzy, decydujący okazał się pomysł na analizę sytuacji przedstawionej w zadaniu.

Poniżej prezentujemy przykładowe rozwiązanie, zachęcając jednocześnie do samodzielnego poszukiwań prostszego.

Niech S będzie dowolną osobą uczestniczącą w przyjęciu i niech $A = \{A_1, \dots, A_k\}$ będzie zbiorem jej znajomych, a $B = \{B_1, \dots, B_n\}$ zbiorem osób, których nie zna.

Dla dowolnych i, j osoby A_i i A_j nie znają się między sobą (ponieważ S jest ich wspólnym znajomym).

Stąd dowolne dwie osoby z A mają dokładnie jednego wspólnego znajomego w zbiorze B .

B_k (dla każdego k) zna dokładnie dwie osoby ze zbioru A , ponieważ ma z S dwóch wspólnych znajomych. Stąd

żadne trzy osoby z A nie mają wspólnego znajomego w zbiorze B .

W takim razie każda osoba A_i ma dokładnie k znajomych – jest to S oraz $k - 1$ osób ze zbioru B , odpowiadających parom A_i, A_j dla $i \neq j$.

Otrzymaliśmy więc, że S ma tyle samo znajomych, co każdy jego znajomy. Z dowolności wyboru S oraz faktu, że dowolnych dwóch nieznanymych ma wspólnego znajomego, otrzymujemy tezę.

Zachęcamy Czytelników do samodzielnego rozwiązania tego zadania i próby zapisania rozwiązania w jak najprostszej postaci.

Treści wszystkich zadań rozwiązywanych w czasie Obozu dostępne są na stronie Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów (www.omg.edu.pl).

Urszula SWIANIEWICZ

Informatyczny kącik olimpijski (47): Godzilla

W tym miesiącu omówimy zadanie, które rozwiązywali uczestnicy Obozu Naukowo-Treningowego im. A. Kreczmara w 2009 r.

Sieć telewizji kablowej składa się z n węzłów i m jednokierunkowych połączeń. Do każdego węzła sieci jest podłączony co najmniej jeden dom. Niektóre węzły są wyróżnione i do nich bezpośrednio transmitowany jest program. W danym domu można go oglądać, jeśli istnieje połączenie (niekoniecznie bezpośrednie) od wyróżnionego węzła do węzła, do którego podłączony jest dom.

Niestety, sieć jest narażona na ataki złośliwej Godzilli, która, nie wiedząc czemu, żywi się infrastrukturą telewizji kablowej. Co dzień zjada ona jedno połączenie z sieci. Mając daną listę s połączeń, które kolejno zje Godzilla, należy wyznaczyć, ile minimalnie węzłów należy oznaczyć jako wyróżnione każdego dnia, tak aby każdy dom mógł odbierać program.

Sieć kablową możemy traktować jako graf skierowany G o n wierzchołkach i m krawędziach. Aby znaleźć minimalny zbiór wyróżnionych węzłów, wyznaczamy podział grafu G na silnie spójne składowe. Silnie spójną składową nazwiemy *początkową*, jeśli nie wchodzi do niej żadna krawędź (tzn. do żadnego wierzchołka tej składowej nie wchodzi krawędź z wierzchołka spoza tej składowej). Zauważmy, że w każdej początkowej składowej musimy wyróżnić co najmniej jeden wierzchołek, aby dostarczyć program do wierzchołków tej składowej. A ponieważ do każdej niepoczątkowej składowej istnieje ścieżka ze składowej początkowej, więc taki zbiór wierzchołków jest wystarczający.

Znajdowanie podziału na silnie spójne składowe możemy zrealizować dwukrotnym przejściem grafu w głąb w czasie $O(n + m)$. Jeśli po każdym usunięciu krawędzi będziemy wyznaczali ten podział od nowa, dostaniemy algorytm o koszcie czasowym $O(s \cdot (n + m))$.

Chcielibyśmy umieć szybko uaktualniać strukturę składowych po usunięciu krawędzi. Nie jest jednak jasne, jak to zrobić, gdyż po takiej operacji jedna ze składowych może rozpaść się na mniejsze składowe i wydaje się, że nie da się ich wyznaczyć szybciej niż w czasie liniowym względem rozmiaru oryginalnej składowej. Zastosujemy więc pomyslową sztuczkę i odwrócimy czas: zaczniemy od grafu, w którym usunięto wszystkie s krawędzi, i będziemy je dodawać do grafu w odwrotnej kolejności. Tym sposobem pojedynczą operacją będzie połączenie kilku składowych w jedną, a to już wygląda przyjaźniej.

Niech k będzie aktualną liczbą *początkowych* składowych. Przez cały czas będziemy utrzymywać podział zbioru wierzchołków grafu

$$V = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k \cup B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k.$$

Zbiór A_i tworzą wierzchołki i -tej początkowej składowej; do zbioru B_i należą zaś wierzchołki, które są osiągalne z A_i (jeśli wierzchołek jest osiągalny z kilku początkowych składowych, to należy do zbioru B_i dla jednej z tych składowych).

Zobaczmy, co się dzieje, gdy dodajemy do grafu nową krawędź $u \rightarrow v$. Jeśli $v \in B_i$ dla pewnego i , to dodanie tej krawędzi nie spowoduje żadnych zmian w strukturze początkowych składowych, a więc nie musimy nic robić.

W przeciwnym przypadku $v \in A_i$ dla pewnego i . Będziemy przeszukiwać graf transponowany G^T

(czyli przechodzić krawędzie grafu G w odwrotnym kierunku), np. algorytmem DFS, począwszy od wierzchołka u . Dla każdego napotkanego wierzchołka w ze zbioru B_i , przenosimy go do zbioru A_i (wiemy, że jest cykl $w \rightsquigarrow u \rightarrow v \rightsquigarrow w$, gdyż $w \in B_i$ jest osiągalny z A_i). Oczywiście, dla każdego napotkanego wierzchołka $w \in A_i$ ucinamy przeszukiwanie, gdyż gdy raz wejdziemy do A_i , to już z niego nie wyjdziemy.

Jeśli zaś napotkamy wierzchołek $w \in A_j \cup B_j$ dla $i \neq j$, to znaczy, że znaleźliśmy ścieżkę, która pokazuje, iż składowa A_i stała się osiągalna ze składowej A_j . Zatem powiększamy B_j , wykonując $B_j := B_j \cup A_i \cup B_i$, usuwamy zbiory A_i, B_i i kończymy przeszukiwanie. Liczba początkowych składowych zmalała o jeden.

Oszacujmy złożoność czasową naszego algorytmu. Obliczenie podziału dla początkowego grafu G bez s zjedzonych krawędzi realizujemy w czasie $O(n + m)$. Podział ten będziemy przechowywać w strukturze danych dla zbiorów rozłącznych (ang. *find-union*). Wtedy każda operacja **1**) zapytania, do którego ze zbiorów należy dany wierzchołek i **2**) złączenia zbiorów będzie miała „prawie stały” koszt zamortyzowany – a dokładniej $O(\log^* n)$, przy czym w praktyce $\log^* n \leq 5$. Dodatkowo, sumaryczny czas przeszukiwania grafu G^T wynosi $O(n + m)$, gdyż każdą krawędzią przechodzimy co najwyżej raz.

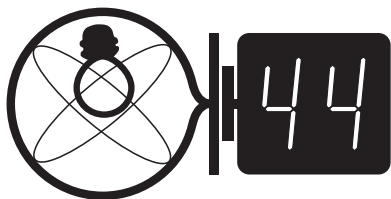
Zatem całkowity koszt czasowy to $O(n + m + s \log^* n)$, przy zużyciu pamięci rzędu $O(n + m)$.

Tomasz IDZIASZEK



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
520 ($WT = 1,83$) i 521 ($WT = 2,50$)
z numeru 6/2011

Tomasz Wietecha	Tarnów	43,71
Jacek Piotrowski	Rzeszów	38,72
Michał Koźlik	Gliwice	28,33

Zadania z fizyki nr 528, 529

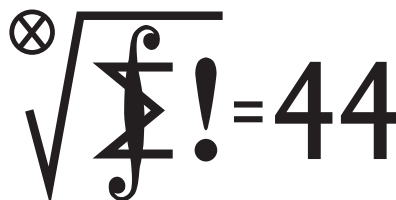
Redaguje Jerzy B. BROJAN

528. Cienki, jednorodny pręt o długości l i masie m postawiono pionowo na poziomym podłożu i zaczął się on przewracać bez poślizgu. Pręt nie wygina się, a przy przekroczeniu w jakimkolwiek punkcie pewnej wartości momentu siły zginającej M ulega złamaniu w tym punkcie. Obliczyć minimalną wartość M niezbędną do tego, aby pręt nie złamał się przed upadkiem. W którym punkcie pręt się złamie, gdy M ma wartość nieco mniejszą?

529. Aby wyznaczyć wartość oporu amperomierza, włączono go w pewien obwód razem z bocznikiem – równoległym opornikiem o dokładnie znanym oporze R . Odczytano wskazanie amperomierza I dla różnych wartości R , a wyniki przedstawiono w tabeli:

R, Ω	1	1,5	2	3	5	10
I, mA	54	70	82	99	119	141

Czy natężenie prądu płynącego przez amperomierz i bocznik (łącznie) pozostawało stałe? Ile wynosi opór własny amperomierza? Jaką metodą najlepiej uwzględnić wszystkie pomiary? Dopuszczalne są tylko typowe „ogólnoużytkowe” funkcje arkusza kalkulacyjnego lub kalkulatora.



Termin nadsyłania rozwiązań: 29 II 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
619 ($WT = 2,65$) i 620 ($WT = 2,07$)
z numeru 4/2011

Piotr Sobczak	Łódź	39,62
Paweł Kubit	Kraków	37,32
Tomasz Tkocz	Rybnik	37,14
Zbigniew Skalik	Wrocław	35,98
Michał Miodek	Zawiercie	34,61
Janusz Olszewski	Warszawa	32,64

Zadania z matematyki nr 631, 632

Redaguje Marcin E. KUCZMA

631. Czy istnieje ośmiościan opisany na kuli, której rzut prostokątny na płaszczyznę każdej ze ścian ośmiościanu jest kołem zawartym w tej ścianie?

632. Mamy cztery liczby rzeczywiste; można z nich wybrać parę liczb na sześć sposobów. W każdej parze dodajemy obie liczby; dostajemy układ sześciu liczb. Suma tych sześciu liczb jest znana, równa A ; także suma ich kwadratów jest znana, równa B . Wyznaczyć wszystkie wartości, jakie może przyjąć suma sześciu liczb tych sześciu liczb.

Zadanie 632 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.



Rozwiązanie zadania M 1335.

Zauważmy, że

$$xy + yz + zx + z - x - x^2 - y^2 - z^2 = -(z-x)^2 + (z-x) - zx + xy + yz - y^2 = (z-x)(1-z+x) - x(z-y) + y(z-y) = (z-x)(1-z+x) + (y-x)(z-y).$$

Z założenia mamy, że $z - x > 0$, $1 - z + x > 0$, $y - x > 0$ i $z - y > 0$, więc ostatnie wyrażenie jest dodatnie.

Grudzień



Długie zimowe noce, choć chłodne, sprzyjają obserwacjom. Warto więc ciepło się ubrać i podziwiać rozgwieżdżone niebo. Podobnie jak w poprzednim miesiącu, w pierwszej połowie nocy pojawiać się będą planety olbrzymy. Nad południowo-wschodnim horyzontem, w gwiazdozbiore Ryb znajdziemy jasnego Jowisza ($-2,7$ mag). Patrząc na południe, możemy odnaleźć w Rybach Urana, ale będzie on już na granicy widoczności gołym okiem ($+5,8$ mag). Neptun w Wodniku przy swej jasności $+7,9$ mag nie będzie widoczny nieuzbrojonym okiem. Niedługo przed północą nad wschodnim horyzontem wschodzi dosyć jasny ($+0,5$ mag) Mars w Lwie. Przy odrobinie szczęścia można zobaczyć bardzo jasną ($-4,0$ mag) Wenus w blasku wschodzącego Słońca nad południowo-zachodnim horyzontem.

Właśnie w grudniu około godziny jedenastej wieczorem będą najlepsze warunki do podziwiania jednej z najpiękniejszych i najbardziej znanych

gromad otwartych – Plejad (M45). Gromada ta leży w gwiazdozbiore Byka, na pograniczu z Perseuszem i Baranem. Jej stosunkowo duża jasność ($+1,6$ mag) sprawiła, że znana była już w starożytności, stąd M45 występuje pod wieloma nazwami takimi jak np.: Subaru (po japońsku), Kurczęta czy Siedem Sióstr. Nieuzbrojonym okiem bez trudu dostrzeżemy sześć gwiazd tej gromady, a w bardziej sprzyjających warunkach nawet dziewięć. Właśnie te dziewięć najjaśniejszych gwiazd nosi nazwy z mitologii greckiej: tytana Atlasa, okeanidy Plejone i ich siedmiu córek o imionach Sterope, Merope, Elektra, Maja, Tajgete, Kelajno i Alkione. Do gromady należą około 500 gwiazd, nie jest to więc szczególnie bogata w gwiazdy gromada. Odległość do niej wynosi 440 lat świetlnych (ok. 135 pc). Plejady są raczej młode, liczą sobie

zaledwie 100 milionów lat. Nie znaczy to jednak, że mamy wiele czasu na ich podziwianie, bowiem za 250 milionów lat gromada przestanie istnieć, gdyż siła grawitacji nie będzie w stanie powstrzymać jej rozpadu. Ruch własny skieruje gwiazdy do gwiazdozbioru Oriona. Plejady otoczone są błękitną mgławicą, widoczną dopiero na zdjęciach. Jest to mgławica refleksyjna, świecąca dzięki światłu jasnych i gorących gwiazd w niej zanurzonych. Ze względu na młody wiek gromady sądzono, że mgławica jest pozostałością po obłoku, z którego powstała. Szczegółowe badania pokazują jednak, że jest to obłok materii międzygwiazdowej, przez który przemierza się M45. Niektóre gwiazdy, jak Plejone, mogą być otoczone mgławicą z materii, utraconej przez gwiazdę na skutek szybkiej rotacji. Plejady są wielkim wyzwaniem dla astronomów modelujących ewolucję gwiazd, ponieważ w gromadzie tej znaleziono białe karły. Są one pozostałościami po gwiazdach o masach mniejszych niż $8-10 M_{\odot}$. Im gwiazda jest mniej masywna, tym żyje dłużej. Tak więc, aby stać się białym karłem, gwiazda musi żyć co najmniej kilka miliardów lat, a więc znacznie dłużej niż wiek M45. Dużo szybciej ewoluują gwiazdy bardzo masywne, ale te kończą życie jako gwiazdy neutronowe albo czarne dziury, chyba że stracą odpowiednio dużo masy. Nie jest jednak jasne, jakie procesy mogłyby odpowiadać za tak znaczną utratę materii w przypadku Plejad. Badania trwają.

22 XII rozpoczyna się astronomiczna zima, teraz już dni będą coraz dłuższe. Grudzień przyniesie nam maksima dwu rojów o wysokiej aktywności – Geminidów (14 XII z nawet 120 zjawiskami na godzinę) i Ursydów (22 XII, 10). Pozostałe roje – Monocerotydy (9 XII) i Coma Berenicydy (20 XII) choć z radiantem dosyć wysoko nad horyzontem to jednak niezbyt obfite. Pełnia Księżyca przypada 10 XII a now 24 XII. Zatem szczęśliwego Nowego Roku i czystego nieba!

Agnieszka MAJCZYNA

Tematem poprzedniego *deltoidea* był środek ciężkości i związane z nim zadania. W tym numerze pora na zastosowania środka ciężkości w problemach pozornie z nim niezwiązanych. Na marginesie przypominamy podstawowe fakty.

Fakt 1. Dla punktów X_1, \dots, X_n z masami odpowiednio m_1, \dots, m_n o niezerowej sumie, istnieje dokładnie jeden środek ciężkości

$$S = S(X_1, \dots, X_n) = S((X_1, m_1), \dots, (X_n, m_n))$$

i jedynie on spełnia warunek

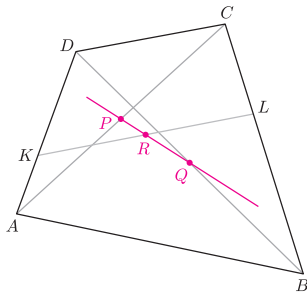
$$m_1 \cdot \overrightarrow{SX_1} + \dots + m_n \cdot \overrightarrow{SX_n} = \vec{0}.$$

W szczególności S to jedyny taki punkt na prostej X_1X_2 , że

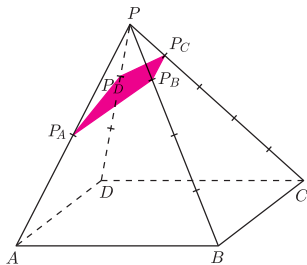
$$\overrightarrow{X_1S} : \overrightarrow{SX_2} = m_2 : m_1.$$

Uwaga: ujemne masy można interpretować jako baloniki z helem.

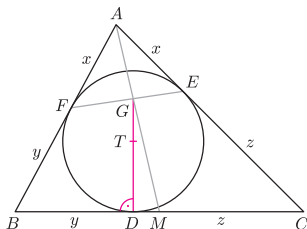
Fakt 2. Jeśli część spośród rozważanych punktów zastąpić ich środkiem ciężkości z masą równą sumie ich mas, to środek ciężkości całego układu nie zmienia się.



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3. Zadanie i rozwiązanie pochodzą z obozu LXI Olimpiady Matematycznej.

Zadanie 7 to twierdzenie van Aubela. Inny dowód opisano w *deltoidea* 3/2011.

1. Udowodnij, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych krawędzi przecinają się w jednym punkcie.

2. Na bokach AD i BC czworokąta wypukłego $ABCD$ wybrano takie punkty K, L , że $AK : KD = CL : LB$. Wykaż, że środki P, Q, R odcinków AC, BD, KL są współliniowe (rys. 1).

3. Podstawą ostrosłupa $ABCDP$ jest równoległobok $ABCD$. Punkty P_B, P_C, P_D na krawędziach PB, PC, PD spełniają warunki: $PP_B : P_BB = 1 : 3$, $PP_C : P_CC = 1 : 4$, $PP_D : P_DD = 1 : 2$. Płaszczyzna $P_B P_C P_D$ przecina krawędź PA w punkcie P_A . Wyznacz $PP_A : P_AA$ (rys. 2).

4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach D, E, F . Punkt M jest środkiem boku BC , zaś odcinki AM i EF przecinają się w punkcie G . Wykaż, że proste GD i BC są prostopadłe (rys. 3).

Rozwiązania

R1. Umieścimy w wierzchołkach czworokąta równe masy. Każdy odcinek łączący środki przeciwległych krawędzi łączy środek ciężkości dwóch mas ze środkiem ciężkości pozostałych dwóch, przechodzi więc przez środek ciężkości ich wszystkich. \square

R2. Umieścimy w punktach A i C masy x , a w B i D masy y takie, by $S((A, x), (D, y)) = K$ (da się takie masy dobrać). Wtedy $S((B, y), (C, x)) = L$. Wobec tego $S(A, B, C, D) = S((K, x + y), (L, x + y)) = R$. Jednocześnie $S(A, C) = P$ oraz $S(B, D) = Q$, więc $R = S(A, B, C, D) = S((P, 2x), (Q, 2y)) \in PQ$. \square

R3. Umieścimy w punktach B, C, D masy odpowiednio $1, -1, 1$, a w punkcie P trzy masy: $m_B = 3, m_C = -4$ i $m_D = 2$. Wtedy $S((P, m_X), X) = P_X$ dla $X = B, C, D$, więc środek ciężkości S układu B, C, D, P leży na płaszczyźnie $P_B P_C P_D$.

Ponadto $S((B, 1), (C, -1), (D, 1)) = A$, bo $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC} = \vec{0}$. Skoro $1 - 1 + 1 = 1$ oraz $m_B + m_C + m_D = 3 - 4 + 2 = 1$, to $S = S((A, 1), (P, 1))$ jest środkiem odcinka PA . Stąd i z wcześniejszego $S \in P_B P_C P_D$ wynika $S = P_A$ i $PP_A : P_AA = 1 : 1$. \square

R4. Niech $AE = AF = x, BD = BF = y, CD = CE = z$. Umieścimy w A, B, C odpowiednio masy $y + z, x, x$ i wyznaczmy środek ciężkości S tego układu. $S((A, y), (B, x)) = F, S((A, z), (C, x)) = E$, więc S leży na prostej EF . Jednocześnie $S((B, x), (C, x)) = M$, więc S leży też na prostej AM . Stąd $S = G$.

Umieścimy teraz dodatkowo masę z w punkcie B i masę y w punkcie C , wtedy $S((B, z), (C, y)) = D$. Niech T będzie środkiem ciężkości „starych” i „nowych” mas, wtedy T leży na prostej GD łączącej ich środki ciężkości.

Z twierdzenia o dwusiecznej, $S((B, x + z), (C, x + y))$ jest jej spodkiem dla $\sphericalangle BAC$. Leży więc na niej punkt $T = S((A, y + z), (B, x + z), (C, x + y))$. Analogicznie leży on też na pozostałych dwusiecznych kątów trójkąta, jest zatem środkiem okręgu wpisanego. Stąd $TD \perp BC$, co kończy dowód. \square

Zadania domowe

5. Wykaż, że w dowolnym czworokącie odcinki łączące środki przeciwległych boków oraz odcinek łączący środki przekątnych przecinają się w jednym punkcie.

6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg o środku O . Przekątne AC i BD są prostopadłe i przecinają się w punkcie T . Udowodnij, że punkt przecięcia odcinków łączących środki przeciwległych boków jest środkiem odcinka OT .

7. Punkty D, E, F należą odpowiednio do boków BC, CA, AB trójkąta ABC , proste AD, BE, CF przecinają się w punkcie P . Wykaż, że $\frac{AE}{EC} + \frac{AF}{FB} = \frac{AP}{PD}$.

Wskazówka. Umieścimy w A, B, C takie masy x, y, z , by $P = S((A, x), (B, y), (C, z))$ (czy zawsze się da?). Wtedy $E = S((A, x), (C, z))$ (bo $P \in BE$), zatem $AE/EC = z/x$ i analogicznie $AF/FB = y/x$.