








## SPIS TREŚCI NUMERU 3 (454)

Podstawy energetyki jądrowej <i>Przemysław Olbratowski</i>	str. 1
Co mogą nam dać ciężary i wypory? <i>Marek Kordos</i>	str. 4
 Zadania	str. 7
O prawdopodobieństwie, wyznacznikach i pokryciach cyklowych <i>Wojciech Nadara</i>	str. 8
Prostokąt arytmetyczny <i>Jakub Radoszewski</i>	str.10
 Odkryj twierdzenie sam <i>Michał Kieza</i>	str.12
Kilka wyznań laika <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.14
 Rozmyślenia przy malowaniu oka <i>Magdalena Fikus</i>	str.15
Krzyżak litewski	str.16
O niespodziewanej tożsamości algebraicznej <i>Aleksander Górski</i>	str.16
 Stowarzyszenie na rzecz Edukacji Matematycznej	str.17
Prosto z nieba: Gwiazdy – fabryki życia <i>Michał Bejger</i>	str.18
<i>Gabinet matematycznych zagadek</i>	str.18
W poszukiwaniu prawdy <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.19
Najchłodniejszy brązowy karzeł <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Marzec <i>Agnieszka Majczyna</i>	str.24
 Osie potęgowe <i>Joanna Jaszńska</i>	str.25

## W następnym numerze polecamy

Dla  $r = 210$  i  $a = -11$  (albo np.  $a = 199$ ) liczby  $a + kr$  ( $k = 1, 2, \dots, 9$ ) są pierwsze. Zatem

$a + 4r$	$a + 9r$	$a + 2r$
$a + 3r$	$a + 5r$	$a + 7r$
$a + 8r$	$a + r$	$a + 6r$

jest kwadratem magicznym złożonym z samych liczb pierwszych.

## zabawy liczbami pierwszymi

Miesięcznik *Delta – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Tomasz Kwast, Agnieszka Majczyna, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.  
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:  
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,  
02-097 Warszawa, e-mail: [delta@mimuw.edu.pl](mailto:delta@mimuw.edu.pl) tel. 22-55-44-402.

Skład systemem  $\text{\TeX}$  oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

### PRENUMERATA

**Fran-Press:** [www.franpress.pl](http://www.franpress.pl), infolinia 801-679-466

**Garmond Press:** [www.garmondpress.pl](http://www.garmondpress.pl)

**Kolporter:** [www.kolporter.com.pl](http://www.kolporter.com.pl)

**Pol-Perfect:** [www.polperfect.com.pl](http://www.polperfect.com.pl)

**RUCH S.A.:** [www.ruch.com.pl](http://www.ruch.com.pl), infolinia 804-200-600

### Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; [www.prenumerata.ruch.com.pl](http://www.prenumerata.ruch.com.pl)

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a. Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; [www.ruch.pol.pl](http://www.ruch.pol.pl)

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarz 4 zł

# Podstawy energetyki jądrowej

Przemysław OLBRATOWSKI\*

\* pełnomocnik Dziekana Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego ds. makrokierunku studiów *Energetyka i Chemia Jądrowa*;

więcej informacji o tych studiach można znaleźć na stronie [atom.chem.uw.edu.pl](http://atom.chem.uw.edu.pl).

Energetyka jądrowa nie stanowi fundamentalnej dziedziny wiedzy, takiej jak matematyka czy fizyka. Jest natomiast dziedziną bardzo szeroką – zrozumienie całości występujących tu zagadnień wymaga znajomości fizyki jądrowej, fizyki ciała stałego, termo- i hydrodynamiki, ale również takich nauk jak ekologia, ekonomia czy nawet socjologia. W tym krótkim artykule przedstawimy tylko fizyczne podstawy tej gałęzi przemysłu.

**Skąd energia?** Energetyka jądrowa opiera się na słynnym wzorze Einsteina  $E = mc^2$ . Orzeka on, że z racji samego posiadania masy w każdym ciele zawarta jest pewna energia, zwana energią spoczynkową, równa masie ciała pomnożonej przez kwadrat prędkości światła. Można łatwo obliczyć, że w jednym kilogramie zawarta jest energia 25 mln MWh, czyli tyle, ile przeciętny blok elektrowni wytwarza przez 3 lata lub ile wyzwala się w wybuchu ponad 22 mln ton trotylu. Jednak z materii nie da się wydobyć całej zawartej tam energii spoczynkowej, gdyż zgodnie ze wzorem Einsteina doprowadziłoby to do zupełnego zniknięcia masy, czyli samej materii! Na to, na szczęście, nie pozwalają inne prawa fizyki.

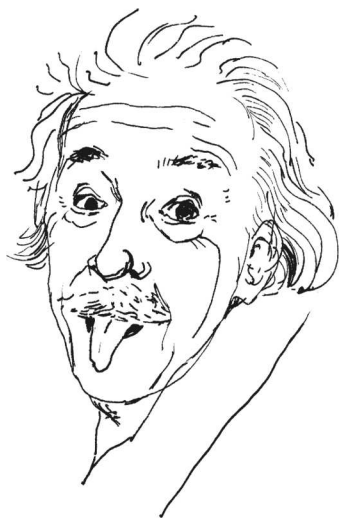
Cóż zatem robić, aby wyrwać materii choć część jej energii spoczynkowej? W energetyce jądrowej wykorzystuje się do tego celu zjawisko rozszczepienia jąder atomowych. W pewnych okolicznościach niektóre jądra mogą się rozszczepić, czyli podzielić na dwa mniejsze, zwane *fragmentami rozszczepienia*. Te dwa nowe jądra zawierają w sumie tyle samo protonów i neutronów co jądro wyjściowe. Jednak ich łączna masa jest nieco mniejsza od masy jądra wyjściowego. Skoro tak, to mniejsza jest też ich energia spoczynkowa! Część energii spoczynkowej jądra wyjściowego musi się zatem w jakiś sposób wydzielić i to właśnie ją możemy wykorzystać. W zjawisku rozszczepienia wydzielą się mniej więcej 0,1% energii spoczynkowej wyjściowego jądra. Oznacza to, że w rzeczywistości z całkowitego rozszczepienia jednego kilograma materii możemy uzyskać nie miliony, lecz tysiące megawatogodzin, czyli z grubsza tyle, ile przeciętny blok elektrowni wytwarza w ciągu jednego dnia. To mniej, ale nadal bardzo dużo. Aby wytworzyć tyle samo energii w elektrowni konwencjonalnej, trzeba spalić około 1000 ton czystego węgla, czyli milion razy więcej!

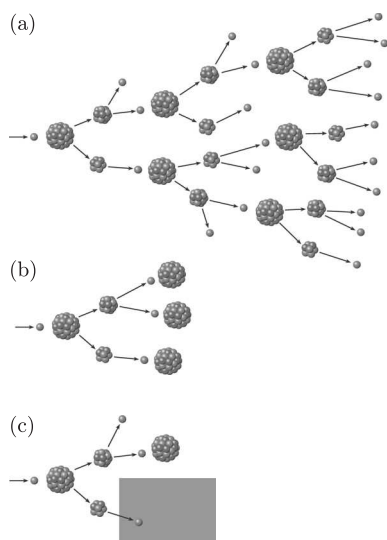
Mogłoby kogoś jednak niepokoić, że energetyka jądrowa zużywa materię, z której zbudowana jest Ziemia, czerpiąc energię elektryczną z masy. Zdawajmy sobie jednak sprawę, że w energetyce konwencjonalnej dzieje się dokładnie to samo! Na przykład spalanie węgla polega na łączeniu atomu węgla C z cząsteczką tlenu O<sub>2</sub> w cząsteczkę ditlenku węgla CO<sub>2</sub>. Proces ten dostarcza nam energii, dlatego że cząsteczka ditlenku węgla jest nieco lżejsza niż atom węgla i cząsteczka tlenu razem wzięte, a zatem ma nieco mniejszą od nich energię spoczynkową. Zwykłym spalaniem też rządzi wzór Einsteina, a zatem wytworzenie określonej energii wymaga unicestwienia takiej samej masy jak w energetyce jądrowej.

Samorzutne rozszczepienie się jądra atomowego jest w przyrodzie zjawiskiem tak rzadkim, że nie może służyć wytwarzaniu energii elektrycznej. Niektóre jądra można jednak pobudzić do rozszczepienia, bombardując je wiązką odpowiednich cząstek. Szczególnie dobrze do tego celu nadają się neutrony, gdyż jako cząstki pozbawione ładunku elektrycznego nie są odpychane przez protony jądra atomowego i łatwo wnikają do jego wnętrza.

Gdyby jednak wywołanie każdego kolejnego rozszczepienia wymagało dostarczenia nowego neutronu z zewnątrz, to sprawa byłaby przegrana mimo dużej energii wydzielanej w pojedynczym rozszczepieniu. Nie dałoby się bowiem dostarczać neutronów na tyle szybko, aby wytwarzać jakiegokolwiek rozsądne ilości energii. Na szczęście, fragmenty rozszczepienia same emitują nowe neutrony! Mogą one wniknąć do kolejnych jąder i wywołać ich rozszczepienie. Powstałe w tych

Jądra atomowe składają się z dodatnio naładowanych protonów oraz obojętnych elektrycznie neutronów.





Rys. 1. (a) Schemat reakcji łańcuchowej. (b) Schemat reakcji łańcuchowej w bombie. (c) Schemat reakcji łańcuchowej zachodzącej w reaktorze; szarym prostokątem zaznaczono absorber.

rozszczepleniach jądra emitują nowe neutrony i tak dalej. W ten sposób reakcja podtrzymuje się sama i nie wygasa mimo braku neutronów z zewnątrz. Zjawisko to nazywamy *łańcuchową reakcją rozszczepienia* lub w skrócie *reakcją łańcuchową*. Przebieg reakcji łańcuchowej przedstawiono na rysunku 1(a).

Energia wydzielona w reakcji rozszczepienia nie dociera jednak do nas od razu jako energia elektryczna. W pierwszej kolejności różnica między energią spoczynkową jądra wyjściowego a sumą energii spoczynkowych fragmentów rozszczepienia zmienia się w energię kinetyczną tychże fragmentów. Poruszając się z dużymi prędkościami, jądra fragmentów uderzają w inne atomy i wprawiają je w drgania cieplne. Głównym efektem pracy reaktora jest więc po prostu wydzielanie dużych ilości ciepła.

**Stabilnie, a nie lawinowo.** Reakcja łańcuchowa zachodzi zarówno w reaktorze jądrowym, jak i w bombie atomowej. W konstrukcji bomby chodzi o to, aby jak największa energia wydzielona w jak najkrótszym czasie. W idealnym przypadku wszystkie neutrony wyemitowane z jednego rozszczepienia powinny uderzyć w kolejne jądra i wywołać kolejne rozszczepienia. Przyjmijmy, że w reakcji rozszczepienia powstają dwa neutrony. Każde rozszczepienie wywoła więc dwa kolejne. Liczba rozszczepień w jednostce czasu będzie rosłać wykładniczo i nastąpi wybuch. W przypadku reaktora chcemy natomiast, aby tylko jeden neutron wyemitowany z rozszczepienia wywołał następne rozszczepienie. Liczba rozszczepień w jednostce czasu będzie wtedy stała, czyli stała będzie moc reaktora. Cel nasz możemy osiągnąć, umieszczając w reaktorze specjalny materiał zwany *absorberem*, który pochłonie nadmiarowe neutrony z każdego rozszczepienia, zostawiając tylko ten jeden. Zilustrowano to na rysunku 1(b)(c).

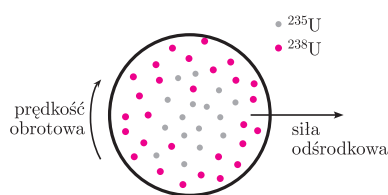
**Za szybko i za mało?** Choć przebieg reakcji łańcuchowej jest koncepcyjnie bardzo prosty, to jednak jej rzeczywiste przeprowadzenie natrafia na przynajmniej dwa problemy. Pierwszy jest natury fundamentalnej i wynika stąd, że świat jąder atomowych rządzi się prawami mechaniki kwantowej, wedle której nic nie dzieje się na pewno, a jedynie z pewnym prawdopodobieństwem. Również neutron uderzający w jądro atomowe nie wywołuje rozszczepienia na pewno, a jedynie z pewnym prawdopodobieństwem, które w dodatku zależy od prędkości neutronu. Jeśli neutron ma małą prędkość, to szansa na rozszczepienie jest duża, ponieważ neutron przelatuje przez jądro długo i ma dużo czasu na wywołanie reakcji. Analogicznie neutron o dużej prędkości ma małe szanse na wywołanie rozszczepienia. Aby wystarczająco wydajnie rozszczepiać jądra, neutrony muszą mieć prędkości około 8000 km/h. Są to neutrony... powolne, zwane *termicznymi*, ponieważ takie byłyby prędkości ich ruchów termicznych w temperaturze pokojowej. Natomiast neutrony emitowane przez fragmenty rozszczepienia mają prędkości rzędu 80 000 000 km/h i są na ogół zbyt szybkie, aby skutecznie wywoływać rozszczepienia. Nazywamy je neutronami prędkimi.

Tylko niektóre jądra podlegają reakcji rozszczepienia wywołanej przez neutrony. Na Ziemi występuje naturalnie w wystarczających ilościach tylko jedno z nich – jest nim  $^{235}\text{U}$ . Dlatego właśnie izotop ten jest podstawowym paliwem dla energetyki jądrowej.

Druga trudność z wywołaniem reakcji łańcuchowej polega na tym, że naturalny uran, jaki otrzymuje się z rudy, zawiera zaledwie 0,7% izotopu rozszczepialnego. Pozostałe 99,3% to  $^{238}\text{U}$ , który nie podlega rozszczepieniu. Z tego powodu w naturalnym uranie bardzo trudno jest utrzymać reakcję łańcuchową.

**Wzbogacić lub spowolnić.** Opisane powyżej trudności można, na szczęście, skutecznie przezwyciężyć. Można bowiem zwiększyć zawartość  $^{235}\text{U}$  w paliwie jądrowym, oddzielając go od  $^{238}\text{U}$  – proces ten nazywamy *wzbogacaniem*. Ponieważ jednak wszystkie izotopy tego samego pierwiastka mają niemal identyczne własności chemiczne, wzbogacanie musi odbywać się przy użyciu metod fizycznych, z których najpopularniejsza jest metoda wirówki. Uran naturalny w postaci gazowego  $\text{UF}_6$  umieszcza się w szybko wirującym cylindrze,

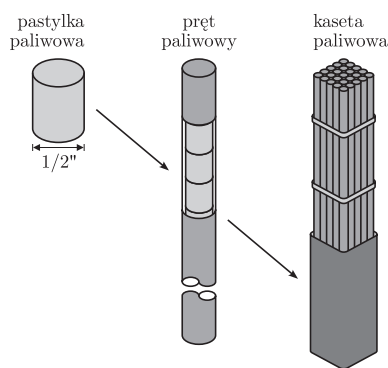
Jądra różnych pierwiastków chemicznych różnią się liczbą protonów. Przykładowo, jądro o 92 protonach to jądro uranu, oznaczanego symbolem chemicznym U. Jądra o ustalonej liczbie protonów mogą zawierać różne ilości neutronów. Jądra jednego pierwiastka, różniące się liczbą neutronów, nazywamy izotopami tego pierwiastka. Izotopy oznaczamy, pisząc u góry po lewej stronie symbolu chemicznego łączną liczbę protonów i neutronów. Izotop uranu o 143 neutronach oznaczamy zatem symbolem  $^{235}\text{U}$ .



Rys. 2. Schemat wirówki.

jak to pokazano na rysunku 2. Ponieważ jądra  $^{238}\text{U}$  są nieco cięższe od jąder  $^{235}\text{U}$  ze względu na dodatkowe trzy neutrony, więc działająca na nie siła odśrodkowa jest większa, przez co jądra te gromadzą się przy ściankach cylindra. W środku natomiast pozostaje głównie  $^{235}\text{U}$ , skąd możemy go odpompować odpowiednią rurką. Zwiększenie zawartości  $^{235}\text{U}$  do kilkunastu procent wystarczy do podtrzymania reakcji łańcuchowej, nawet mimo małej skuteczności rozszczepiania jąder przez neutrony prędkie. Reaktory działające na takiej zasadzie nazywamy *reaktorami prędkimi*.

Neutrony powstające podczas rozszczepienia można także spowolnić, aby były bardziej skuteczne w wywoływaniu kolejnych rozszczepień. W tym celu przepuszcza się je przez materiał zwany *moderatorem*. Odbijając się wielokrotnie od jąder atomowych moderatora, neutrony wytracają prędkość, aż osiągną stan równowagi termicznej z moderatorem, czyli aż osiągną prędkości termiczne. Reaktory działające w ten sposób nazywa się *reaktorami termicznymi*. Mogą one działać przy wzbogaceniu uranu do kilku procent, a nawet na uranie naturalnym. Obecnie wszystkie działające na świecie przemysłowe reaktory energetyczne należą do tej właśnie kategorii.

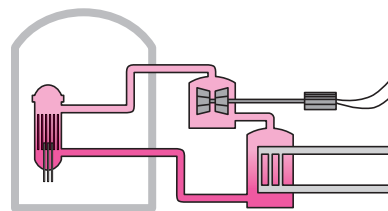


Rys. 3. Budowa kasety paliwowej.

**Budowa reaktora jądrowego.** Głównym elementem reaktora jest paliwo ze wzbogaconego uranu – w postaci ditlenku uranu  $\text{UO}_2$ , gdyż uran metaliczny jest trudny w użyciu, a w pewnych warunkach nawet samozapalny. Z  $\text{UO}_2$  przygotowuje się ceramiczne pastylki paliwowe w kształcie walca o wysokości około 1 cm i średnicy kilku milimetrów. Pastylki te umieszcza się w rurkach ze stopu cyrkonu, wytwarzając w ten sposób pręty paliwowe. Pręty grupuje się z kolei w kasetach paliwowych. Konstrukcja ta pokazana jest na rysunku 3. Wreszcie kasety umieszczone jedna obok drugiej tworzą rdzeń reaktora, czyli jego najważniejszą część, w której zachodzi reakcja rozszczepienia. W zależności od reaktora rdzeń może mieć rozmiary od kilkudziesięciu centymetrów do kilkunastu metrów i ważyć od kilkudziesięciu kilogramów do kilkuset ton.

Ciężka woda ( $\text{D}_2\text{O}$ ) różni się od zwykłej wody tym, że atomy wodoru H są zastąpione atomami deuteru – izotopu wodoru, którego jądro oprócz protonu zawiera też jeden neutron.

W reaktorach termicznych znajduje się moderator, którym jest najczęściej zwykła woda, choć może być też ciężka woda lub grafit. Skoro w reaktorze wydzielą się ciepło, to trzeba reaktor chłodzić, gdyż w przeciwnym razie może się on stopić. Kolejnym elementem jest więc chłodziwo. Najczęściej jest nim także woda, ale stosuje się również gazy lub nawet ciekłe metale. Wreszcie absorber neutronów ma zwykle postać prętów wykonanych z boru, kadmu lub hafnu. Pręty te, zwane prętami kontrolnymi, można wsuwać lub wysuwać z rdzenia, sterując w ten sposób szybkością reakcji łańcuchowej. Schemat najprostszej elektrowni jądrowej znajduje się na rysunku 4. Zauważmy, że zasada wytwarzania prądu elektrycznego w elektrowni jądrowej jest dokładnie taka sama jak w konwencjonalnej. Tyle tylko, że źródłem ciepła podgrzewającego wodę nie jest tu kocioł, lecz reaktor jądrowy.



Rys. 4. Schemat najprostszej elektrowni jądrowej. Rdzeń umieszczony jest w stalowym zbiorniku reaktora. Od dołu do zbiornika doprowadzana jest woda, która przepływa między prętami paliwowymi, pełniąc jednocześnie funkcję moderatora i chłodziwa. Woda podgrzewa się tak bardzo, że zamienia się w parę, która następnie obraca turbinę. Turbina napędza prądnicę, a para przechodzi przez skraplacz, gdzie ponownie zamienia się w ciecz, i powraca do zbiornika reaktora.

**Energia przyszłości?** Przy obecnej technologii reaktorów termicznych światowe zasoby uranu starczą na nieco ponad 100 lat, czyli mniej więcej na tyle, co zasoby węgla. Jednak znajdujący się w reaktorze nierozszczepialny  $^{238}\text{U}$  pod wpływem bombardowania neutronami przemienia się w sztuczny izotop rozszczepialny  $^{239}\text{Pu}$ . Pluton ten już wykorzystuje się jako wtórne paliwo, ale jego ilości, powstające w reaktorach termicznych, są niewielkie. W reaktorach prędkich można natomiast wytworzyć warunki, w których każde rozszczepienie prowadzi do powstania więcej niż jednego nowego jądra rozszczepialnego. Zjawisko to, zwane powielaniem paliwa, pozwala na niemal całkowite wykorzystanie nie tylko  $^{235}\text{U}$ , ale także stokrotnie bardziej rozpowszechnionego  $^{238}\text{U}$ . Zamiast o 100 latach można więc mówić o 10 000 lat! Możliwości wykorzystania toru (Th) jako paliwa jądrowego czy też wydobycie uranu z wody morskiej mogą wydłużyć tę perspektywę do kilkuset tysięcy lat.

Niezależnie od tego, jak potoczy się historia, w najbliższych latach będziemy świadkami trudnego, ale też fascynującego zmagania się ludzkości z jednym z największych wyzwań, jakim jest zaspokojenie potrzeb energetycznych. W zmaganiach tych energia jądrowa zawsze pozostanie ważną alternatywą.

# Co mogą nam dać ciężary i wypory?

Marek KORDOS

W *Delcie* 6/2011 Jerzy Zabczyk przytoczył anegdotę o Feynmanie w związku z pewnym geometrycznym zadaniem efektownie umieszczonym przez Hugona Steinhausa w *Kalejdoskopie matematycznym* (o czym Feynman nie wiedział) i zaproponował Czytelnikom atrakcyjne zadania.

Warto może uzupełnić tę historię opowieścią o ogólniejszym problemie zawartym w wydanej w 1896 roku pracy E.J. Routha:

czy można obliczyć, jaką część pola trójkąta  $ABC$  stanowi pole trójkąta  $KLM$ , a jaką pole trójkąta  $PQR$  (patrz rys. 1), gdy wiemy, że

$$\frac{BK}{KC} = \lambda, \quad \frac{CL}{LA} = \mu, \quad \frac{AM}{MB} = \nu?$$

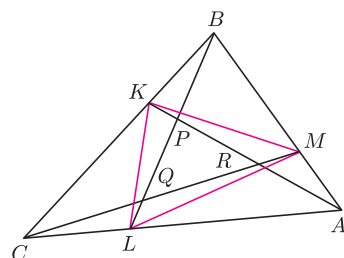
Jak można się domyślić, odpowiedź jest pozytywna. Konkretnie:

$$\Delta_{KLM} = \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda + 1)(\mu + 1)(\nu + 1)} \cdot \Delta_{ABC},$$

$$\Delta_{PQR} = \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} \cdot \Delta_{ABC},$$

gdzie  $\Delta_{XYZ}$  oznacza pole trójkąta  $XYZ$ .

Najbardziej elegancki dowód prowadzi przez nowe pojęcie: *współrzędne barycentryczne*, znacznie zresztą ważniejsze od twierdzenia Routha. Wywodzi się ono z fizyki (Feynman by się ucieszył). Ale po kolei.



Rys. 1



## Środek ciężkości

Zastanówmy się, jakie ciężary należy umieścić w wierzchołkach (nieważkiego) trójkąta, aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie jego wnętrza.

Może lepiej zacząć od prostszego pytania: jakie ciężary  $m_A$  i  $m_B$  należy umieścić w końcach (nieważkiego) odcinka  $AB$ , aby jego środek ciężkości znalazł się we wskazanym punkcie  $X$  tego odcinka. Sprawa prosta – znamy ją z lekcji fizyki (ramię razy siła):

$$(1) \quad m_A \cdot AX = m_B \cdot XB, \quad \text{czyli} \quad \frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX}.$$

Jeśli zatem mamy w wierzchołkach trójkąta  $ABC$  umieszczone, odpowiednio, ciężary  $m_A$ ,  $m_B$  i  $m_C$ , to możemy pierwsze dwa z nich zastąpić ciężarem  $m_A + m_B$  umieszczonym w opisanym przez (1) punkcie  $X$ , a następnie znaleźć środek ciężkości dla tak obciążonego odcinka  $CX$  – będzie to zgodnie z (1) punkt  $P$ , spełniający zależność

$$(2) \quad \frac{m_C}{m_A + m_B} = \frac{XP}{PC}.$$

Mając więc dane ciężary umieszczone w punktach  $A, B, C$ , możemy znaleźć punkt  $P$  i odwrotnie: mając punkt  $P$  leżący wewnątrz trójkąta  $ABC$ , możemy zgodnie z (1) i (2) tak dobrać ciężary, jakie należy umieścić w  $A, B$  i  $C$ , aby w  $P$  był ich środek ciężkości.

**Wniosek 1** (spodziewany). *Jeśli trójki  $(m_A, m_B, m_C)$  i  $(m'_A, m'_B, m'_C)$  są proporcjonalne, to wyznaczają ten sam środek ciężkości.*

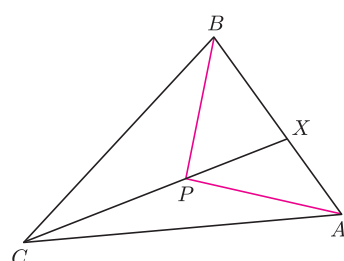
Ale jest też (uzasadniający umieszczenie na rysunku 2 niepotrzebnych dotąd odcinków  $AP$  i  $BP$ )

**Wniosek 2** (niespodziewany):  $m_A : m_B : m_C = \Delta_{BCP} : \Delta_{CAP} : \Delta_{ABP}$ .

Rzeczywiście, mamy bowiem

$$\frac{m_A}{m_B} = \frac{XB}{AX} = \frac{\Delta_{BCX}}{\Delta_{AXC}} = \frac{\Delta_{BPX}}{\Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCX} - \Delta_{BPX}}{\Delta_{AXC} - \Delta_{AXP}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{APC}} = \frac{\Delta_{BCP}}{\Delta_{CAP}}.$$

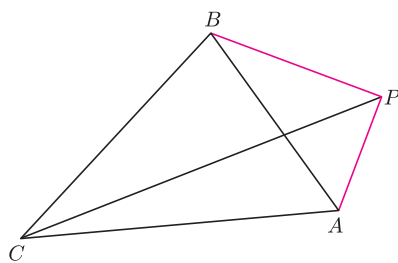
Równość pozostałych stosunków uzasadniamy analogicznie.



Rys. 2

Może kogoś zastanowić dziwna kolejność wymieniania wierzchołków trójkątów. Jest ona jednak przemyślana. A bierze się stąd, aby napisane zależności nie zmieniły się, gdy dopuścimy ciężary ujemne.

## Wypór



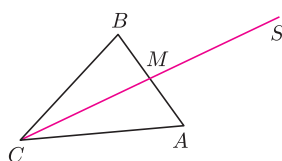
Rys. 3

Już Archimedes wiedział, że efektywna siła ciężkości może działać zarówno w dół, jak i do góry. Tę drugą sytuację obserwujemy np. przy wznoszeniu się balonu. Archimedes (zapewne) balonów nie widział, ale miał do czynienia z cięższymi od wody statkami, które mimo tego unoszą się na jej powierzchni, i jest autorem znanego prawa, które mówi właśnie o ujemnych ciężarach, czyli o wyporze (dla XIX-wiecznych pensjonarek ozdobiono je widokiem wyskakującego z wanny nagiego mężczyzny).

O ile ograniczenie się do dodatnich ciężarów pozwalało utożsamiać z obciążeniami wierzchołków trójkąta  $ABC$  punkty jego wnętrza (i brzegu), to dopuszczenie ciężarów ujemnych pozwala przez obciążanie tych wierzchołków otrzymać środek ciężkości w dowolnym punkcie płaszczyzny trójkąta  $ABC$ .

Należy tylko zamiast odcinków rozpatrywać wektory, a zamiast trójkątów – trójkąty zorientowane, czyli takie, których pola różnią się znakami, gdy wierzchołki obiegane są w innej (cyklicznej) kolejności (bo są tylko dwie możliwości – prawda?). Wszystkie wzory zostały wyżej napisane tak, aby ta zmiana nie psuła ich poprawności (dla wprawy proszę prześledzić dowód Wniosku 2 w sytuacji z rysunku 3).

Gdzie jest środek ciężkości  $S$ , gdy  $m_A = m_B = 1$ ,  $m_C = -1$ ?



Dla  $A$  i  $B$  środek ciężkości (z ciężarem 2) to  $M$  – środek odcinka  $AB$ . Zgodnie z (1) mamy

$$\frac{-1}{2} = \frac{m_C}{m_M} = \frac{\overline{MS}}{\overline{SC}}, \text{ czyli } \overline{SC} = -2\overline{MS},$$

a więc  $M$  jest również środkiem  $CS$ , innymi słowy  $ACBS$  jest równoległobokiem.

Czytelnik Bystry dostrzeże, że znajdowanie środka ciężkości dla dwóch punktów z ciężarami tego samego znaku odpowiada dźwigni dwustronnej, a z ciężarami przeciwnych znaków – jednostronnej.

Funkcja  $n$  zmiennych jest jednorodna stopnia  $k$ , jeśli dla każdego  $\lambda$  zachodzi

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda^k \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Jeśli  $f$  jest wielomianem, warunek jednorodności oznacza, że wszystkie jego wyrazy są tego samego stopnia; np.  $x^4 + 2x^2y^2 - 7xyz^2$  jest funkcją jednorodną stopnia 4 trzech zmiennych.

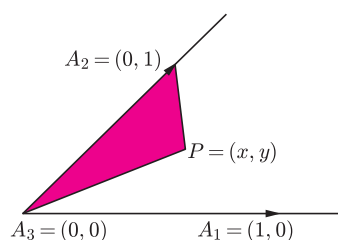
## Współrzędne barycentryczne

Z opisanych wyżej obserwacji Ferdinand Möbius wyciągnął wniosek, że można zamiast tradycyjnych współrzędnych kartezjańskich wprowadzić współrzędne oparte na ciężarach i wyporach. Mianowicie, na płaszczyźnie obieramy (dowolnie) trójkąt  $A_1A_2A_3$  (nazywać go będziemy *układem odniesienia*), a każdemu punktowi  $P$  płaszczyzny przypisujemy ciężary/wypory  $(m_1, m_2, m_3)$  takie, by po umieszczeniu ich w punktach  $A_1, A_2, A_3$  środek ciężkości wypadł w  $P$ . Tę trójkę  $(m_1, m_2, m_3)$  nazywamy współrzędnymi barycentrycznymi punktu  $P$ . Warto zwrócić uwagę na dwie zasadnicze różnice między współrzędnymi, do których jesteśmy przyzwyczajeni, a współrzędnymi barycentrycznymi.

O pierwszej traktuje Wniosek 1: współrzędne barycentryczne dane są z dokładnością do proporcjonalności, mówimy, że są *jednorodnie*. Wynika z tego fakt, że wszystkie wyrażenia opisujące różne geometryczne sytuacje za pomocą współrzędnych barycentrycznych muszą być odporne na zmianę wszystkich występujących w nich współrzędnych na proporcjonalne. Takie funkcje, też nazywane jednorodnymi, mają dużo korzystnych własności, których nie będziemy tu opisywać, ale które są powodem, że wszelkie nowoczesne teorie geometryczne korzystają z tych właśnie współrzędnych.

Druga różnica to fakt, że jeśli suma ciężarów/wyporów w trójce  $(m_1, m_2, m_3)$  jest równa zero, ale nie jest to trójka  $(0, 0, 0)$ , to na płaszczyźnie nie ma punktu, który byłby środkiem ciężkości tak obciążonego układu odniesienia – łatwo zauważyć, że już dwa punkty obciążone odpowiednio ciężarem 1 i wyporem  $-1$  nie mają środka ciężkości. Wobec tego można dla tych obciążeń do płaszczyzny dołączyć idealne punkty będące wymagowanymi ich środkami ciężkości. Tak wzbogacona płaszczyzna nazywa się płaszczyzną rzutową – znów nie będziemy tu przytaczali jej rewelacyjnych własności, tylko odeślemy do artykułu Marii Donten-Bury w *Delcie* 6/2011.

A tu zajmiemy się więc „zwykłymi” punktami, czyli tymi, dla których suma ich współrzędnych barycentrycznych jest różna od zera. Jeśli tak jest, to spośród różnych trójek  $(m_1, m_2, m_3)$ , wyznaczających dany punkt  $P$ , możemy wybrać tę (jedyną), dla której suma współrzędnych wynosi 1 – o tej trójce  $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$  mówimy, że to *współrzędne arealne* punktu  $P$ . Od razu zauważmy, że dwie z tych współrzędnych wyznaczają trzecią. Te współrzędne arealne pozwalają wskazać związek między współrzędnymi kartezjańskimi (nawet ukośnokątnymi) a współrzędnymi barycentrycznymi.



Rys. 4

Korzystamy tu z faktu, że trójkąt, którego wierzchołki mają w kartezjańskim układzie współrzędnych współrzędne  $(p_1, p_2)$ ,  $(q_1, q_2)$ ,  $(r_1, r_2)$ , ma pole

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix}.$$

Warto dodać uwagę, że gdy układ współrzędnych nie jest prostokątny, za jednostkę pola przyjmujemy tutaj (jak w układzie prostokątnym) podwójne pole trójkąta utworzonego przez wektory jednostkowe osi.

Czytelnik Niedoinformowany w kwestii wyznaczników może w tych i dalszych rachunkach przyjąć, że wyznaczniki są inną formą zapisu liczb:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

oraz

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21} +$$

$$- (a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{13}a_{31}a_{22}), \quad (3)$$

co pozwoli mu arytmetycznie sprawdzić, czy nie ma gdzieś błędu.



Weźmy pod uwagę dla punktu  $A_1$  obciążenie  $(1, 0, 0)$ , dla  $A_2$  obciążenie  $(0, 1, 0)$  i dla  $A_3$  obciążenie  $(0, 0, 1)$ . To są zresztą ich współrzędne arealne. Potraktujmy pierwsze dwie współrzędne tych punktów jako ich współrzędne kartezjańskie. Zastanówmy się teraz, jakie arealne obciążenia układu odniesienia umieszczą środek ciężkości w punkcie  $P$  o kartezjańskich współrzędnych  $(x, y)$ .

Poszukiwane współrzędne arealne punktu  $P$  oznaczmy przez  $(\bar{m}_1, \bar{m}_2, \bar{m}_3)$ . Z Wniosku 2 wynika (rys. 4), że skoro  $\bar{m}_1 + \bar{m}_2 + \bar{m}_3 = 1$ , to

$$\Delta_{A_2 A_3 P} = \bar{m}_1 \Delta_{A_1 A_2 A_3},$$

a równość ta prowadzi do rachunku

$$x = 2 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x & y \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \bar{m}_1 \cdot \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \bar{m}_1$$

i, analogicznie,  $y = \bar{m}_2$ .

Okazuje się więc, że współrzędne arealne to zwykle współrzędne uzupełnione tylko trzecią liczbą, dopełniającą ich sumę do jedynki. Pozwala to na następujący rachunek dla punktów  $P = (p_1, p_2, p_3)$ ,  $Q = (q_1, q_2, q_3)$ ,  $R = (r_1, r_2, r_3)$ , danych przez swoje współrzędne arealne:

$$\Delta_{PQR} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 - r_1 & p_2 - r_2 \\ q_1 - r_1 & q_2 - r_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & 1 \\ q_1 & q_2 & 1 \\ r_1 & r_2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix}.$$

Wobec tego punkty  $P, Q, R$  są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Stąd równanie prostej  $PQ$  to

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

czyli

$$x_1 \cdot \begin{vmatrix} p_2 & p_3 \\ q_2 & q_3 \end{vmatrix} - x_2 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_3 \\ q_1 & q_3 \end{vmatrix} + x_3 \cdot \begin{vmatrix} p_1 & p_2 \\ q_1 & q_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Jak łatwo zauważyć, równanie to nie zmieni się, gdy przejdziemy do dowolnych współrzędnych barycentrycznych.

## Dowód twierdzenia Routha

jest teraz czysto rachunkowy. Jeśli za układ odniesienia współrzędnych barycentrycznych przyjmiemy trójkąt  $ABC$ , to jego wierzchołki będą miały odpowiednio współrzędne  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  i  $(0, 0, 1)$  i pole tego trójkąta będzie równe  $\frac{1}{2}$ .

Współrzędne punktu  $K$  (rys. 1) obliczamy ze wzoru (1) – skoro ramiona mają być w stosunku  $1 : \lambda$ , więc ciężary muszą być odwrotnie proporcjonalne, co daje  $0$  w  $A$ ,  $\lambda$  w  $B$  i  $1$  w  $C$ , czyli współrzędne barycentryczne  $K$  to  $(0, \lambda, 1)$ . Ze wzoru (3) mamy równanie prostej  $AK$ :  $x_2 = \lambda x_3$ . Analogicznie dostajemy współrzędne  $L$ :  $(1, 0, \mu)$  i równanie prostej  $BL$ :  $x_3 = \mu x_1$  oraz współrzędne  $M$ :  $(\nu, 1, 0)$  i równanie prostej  $CM$ :  $x_1 = \nu x_2$ . Rozwiązując wszystkie trzy układy par tych równań, otrzymujemy współrzędne  $P$ :  $(1, \lambda\mu, \mu)$ , współrzędne  $Q$ :  $(\nu, 1, \mu\nu)$  i współrzędne  $R$ :  $(\nu\lambda, \lambda, 1)$ .

Trzeba jeszcze pamiętać, że do obliczania pól trójkątów używamy współrzędnych arealnych, a te otrzymać można, dzieląc dowolne współrzędne barycentryczne przez ich sumę. Obliczamy więc pole trójkąta  $KLM$ :

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\lambda}{\lambda+1} & \frac{1}{\lambda+1} \\ \frac{1}{\mu+1} & 0 & \frac{\mu}{\mu+1} \\ \frac{\nu}{\nu+1} & \frac{1}{\nu+1} & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 0 & \lambda & 1 \\ 1 & 0 & \mu \\ \nu & 1 & 0 \end{vmatrix}}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)} = \frac{1}{2} \frac{\lambda\mu\nu + 1}{(\lambda+1)(\mu+1)(\nu+1)}$$

oraz – analogicznie – pole trójkąta  $PQR$ :

$$\frac{1}{2} \frac{\begin{vmatrix} 1 & \lambda\mu & \mu \\ \nu & 1 & \mu\nu \\ \nu\lambda & \lambda & 1 \end{vmatrix}}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{1 + (\lambda\mu\nu)^2 + \lambda\mu\nu - 3\lambda\mu\nu}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{(\lambda\mu\nu - 1)^2}{(\lambda\mu + \mu + 1)(\mu\nu + \nu + 1)(\nu\lambda + \lambda + 1)},$$

co kończy dowód.

### Steinhaus, Chung, Feynman, Menelaos, Ceva...

Steinhaus w *Kalejdoskopie matematycznym* (i Chung, chcąc zażartować z Feynmana) pyta tylko o pole trójkąta  $PQR$  i tylko w przypadku, gdy  $\lambda = \mu = \nu = \frac{1}{2}$ . Zagadnienie, w sytuacji gdy wszystkie współczynniki są równe, przedstawia się o wiele prościej: otrzymujemy dla stosunku pola  $KLM$  i  $PQR$  do pola  $ABC$

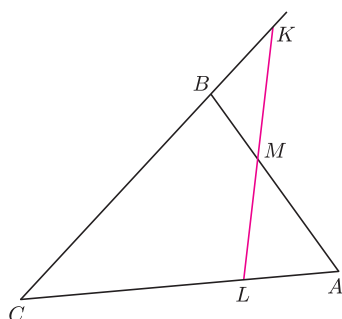
$$\frac{\lambda^3 + 1}{(\lambda + 1)^3} \quad \text{i} \quad \frac{(\lambda^3 - 1)^2}{(\lambda^2 + \lambda + 1)^3} = \frac{(\lambda^3 - 1)^2(\lambda - 1)^3}{(\lambda^2 + \lambda + 1)^3(\lambda - 1)^3} = \frac{(\lambda - 1)^3}{\lambda^3 - 1},$$

co dla  $\lambda = \frac{1}{2}$  daje  $\frac{1}{3}$  i  $\frac{1}{7}$  (ten ostatni wynik miał właśnie obliczyć Feynman – mógł też zajrzeć do wielokrotnie od 1938 r. wznawianego w USA *Mathematical Snapshots*, czyli *Kalejdoskopu*).

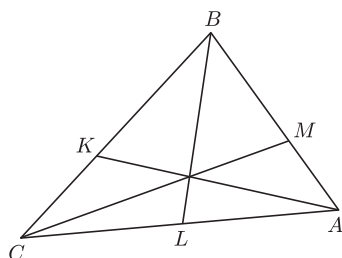
Ale twierdzenie Routha ma o wiele ciekawsze przypadki szczególne:

- gdy  $\lambda\mu\nu = -1$ , punkty  $K, L, M$  leżą na jednej prostej (rys. 5);
- gdy  $\lambda\mu\nu = 1$ , proste  $AK, BL$  i  $CM$  przecinają się w jednym punkcie (rys. 6),

co nie wymaga już żadnego dowodu. Fakty te znane są jako *twierdzenie Menelaosa* i *twierdzenie Cevy*. Czytelnik Zaangażowany potrafi z pewnością podać jeszcze inne wnioski z twierdzenia Routha.



Rys. 5. Trójkąt  $KLM$  znika, ale gdzie jest teraz trójkąt  $PQR$ ?



Rys. 6. A teraz znika trójkąt  $PQR$ .



## Zadania

Redaguje Ewa CZUCHRY

**F 807.** Punktowe źródło światła  $S$  oświetla przezroczystą kulkę. Dzięki przesłonięciu padają na nią tylko promienie biegnące blisko osi  $k$  łączącej  $S$  ze środkiem kulki. W efekcie w odległości  $b$  za kulką powstał obraz źródła  $S$ . Kulkę przecięto przez środek prostopadle do  $k$  i powierzchnię przecięcia posrebrzono. Gdzie teraz znajduje się obraz źródła  $S$ ?  
Rozwiązanie na str. 11

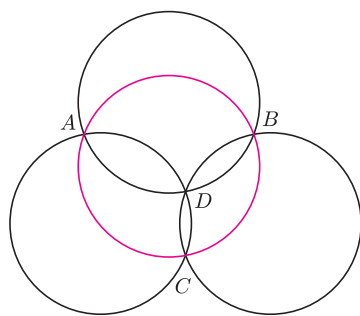
**F 808.** Punktowe źródło światła znajduje się pod dnem cylindra na jego osi. Cylinder jest wykonany z materiału o współczynniku załamania  $n$ . Dla jakiej najmniejszej wartości  $n$  ani jeden promień światła nie wydobędzie się przez powierzchnię boczną na zewnątrz?  
Rozwiązanie na str. 9

Redaguje Tomasz TKOCZ

**M 1342.** Mówimy, że funkcja  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ma *cykl długości  $n$  o początku  $x_0$* , gdy istnieje takie  $x_0$ , że liczby  $x_0, x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), \dots, x_{n-1} = f(x_{n-2})$  są parami różne, zaś  $x_n = f(x_{n-1}) = x_0$ . Udowodnić, że jeśli wielomian o współczynnikach całkowitych ma cykl o początku będącym liczbą całkowitą, to jest on długości 1 lub 2.  
Rozwiązanie na str. 20

**M 1343.** Trzy okręgi o jednakowym promieniu  $r$  mają dokładnie jeden punkt wspólny  $D$  i przecinają się parami jeszcze w punktach  $A, B$  i  $C$ . Udowodnić, że okrąg wyznaczony przez punkty  $A, B$  i  $C$  również ma promień długości  $r$ .  
Rozwiązanie na str. 19

**M 1344.** W zawodach matematycznych wzięło udział 100 uczniów. Mieli oni do rozwiązania 5 zadań. Wiadomo, że każde zadanie zostało rozwiązane przez przynajmniej 56 uczniów. Wykazać, że można wskazać takich dwóch uczniów, że każde zadanie zostało rozwiązane przynajmniej przez jednego z nich.  
Rozwiązanie na str. 24





# O prawdopodobieństwie, wyznacznikach i pokryciach cyklowych

Wojciech NADARA\*

Jest to skrót pracy uczniowskiej nagrodzonej złotym medalem w XXXIII Konkursie Prac Uczniowskich z Matematyki w 2011 roku (Łódź).



```
function gauss(A, n)
  for i := 1 to n do
    for j := i + 1 to n do
      if A[j, i] ≠ 0 then
        swap(A[i], A[j]);
    if A[i, i] = 0 then return 0;
    for j := i + 1 to n do
      for k := i to n do
        A[j, k] := A[j, k]
          - A[i, k] · (A[j, i]/A[i, i]);
  return 1;
```

Algorytm eliminacji Gaussa dla macierzy  $A$  rozmiaru  $n \times n$ , indeksowanej  $A[\text{wiersz}, \text{kolumna}]$ . Funkcja zwraca 0 lub 1 w zależności od tego, czy wyznacznik macierzy jest zerowy, czy też nie (przyp. red.).

Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa dla pewnego pola jest jednostajny, to dodanie ustalonej liczby do liczby w tym polu lub pomnożenie jej przez niezerową liczbę zachowuje jednostajność rozkładu, gdyż dodawanie i mnożenie są w ciele operacjami odwracalnymi.

W tym artykule będziemy się zajmowali obliczaniem wyznaczników macierzy w dowolnym skończonym ciele  $F$ . Będziemy także badali, jakie jest prawdopodobieństwo, że taki wyznacznik dla macierzy z losowo wpisanymi elementami z ciała  $F$  jest różny od 0, oraz jakie jest prawdopodobieństwo, że w losowym grafie skierowanym jest nieparzyście wiele pokryw cyklowych.

Jeżeli mamy daną macierz kwadratową z wpisanymi w nią elementami ciała  $F$ , to ciężko na pierwszy rzut oka stwierdzić, czy jej wyznacznik jest zerowy, czy nie. Sprawa okazuje się dużo prostsza, gdy mamy do czynienia z macierzą w postaci schodkowej (tzn. z taką, która ma zera poniżej głównej przekątnej). Wyznacznik takiej macierzy jest zerowy wtedy i tylko wtedy, gdy na jej głównej przekątnej znajduje się co najmniej jedno 0. Aby sprowadzić naszą macierz do postaci schodkowej, użyjemy metody eliminacji Gaussa. Będziemy wykonywać dwa rodzaje operacji. Pierwszym będzie zamiana dwóch wierszy miejscami, a drugim będzie dodanie do ustalonego wiersza innego wiersza pomnożonego przez stałą. Jak wiadomo, operacja drugiego rodzaju nie zmienia wyznacznika macierzy, operacja pierwszego rodzaju natomiast zmienia jego znak, a więc nie zmienia tego, czy wyznacznik jest zerowy, czy nie.

Sprowadzając macierz do postaci schodkowej, najpierw musimy zadbać o to, aby w górnym lewym rogu naszej macierzy znalazł się jakiś niezerowy element. Jeżeli w pierwszej kolumnie są same zera, to przerywamy nasz algorytm, gdyż wyznacznik naszej macierzy na pewno jest równy 0. W przeciwnym przypadku, jeżeli w górnym lewym rogu jest już niezerowy element, to nic nie robimy, a jeśli nie, to zamieniamy pierwszy wiersz z którymś, w którym w pierwszej kolumnie znajduje się niezerowy element. Następnie musimy zadbać o to, aby w tej kolumnie nie było więcej niezerowych elementów, zatem jeżeli w górnym lewym rogu znajduje się element  $a$ , a w innym wierszu w pierwszej kolumnie znajduje się element  $b$ , to musimy do tego wiersza dodać pierwszy wiersz pomnożony przez  $-\frac{b}{a}$ . Zatem zrobiliśmy już wszystko, co mieliśmy zrobić z pierwszym wierszem i pierwszą kolumną, i dalej ograniczamy się do reszty naszej macierzy, dla której powtarzamy to postępowanie. Kończymy je w momencie, gdy w macierzy, która nam pozostała, w pierwszej kolumnie są same zera (wtedy wyznacznik równa się 0) lub gdy szczęśliwie dojdziemy do końca (wtedy wyznacznik jest niezerowy).

Jak ta metoda może nam pomóc w obliczeniu prawdopodobieństwa, że dla kwadratowej macierzy  $A$  rozmiaru  $n \times n$ , w której każde pole jest wpisany z równym prawdopodobieństwem jakiś element ciała  $F$ , jej wyznacznik jest niezerowy? Oznaczmy liczbę elementów ciała  $F$  przez  $q$ . Zastanówmy się najpierw, jakie jest prawdopodobieństwo tego, że będziemy mogli wykonać pierwszą fazę algorytmu, czyli że w pierwszej kolumnie znajdzie się jakiś niezerowy element. Abyśmy nie mogli jej wykonać, w każdym z  $n$  pól pierwszej kolumny musi znaleźć się 0, a znajduje się ono w każdym polu z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{q}$ . Zatem prawdopodobieństwo tego, że będziemy mogli wykonać pierwszą fazę algorytmu, wynosi  $1 - \frac{1}{q^n}$ . Nietrudno przekonać się o tym, że nie tylko w pierwszej, ale w dowolnej,  $i$ -tej fazie algorytmu, rozkład prawdopodobieństwa wartości znajdujących się w polach  $i$ -tej kolumny, jest jednostajny. Stosując analogiczną argumentację wnioskujemy, iż prawdopodobieństwo tego, że będziemy mogli wykonać  $i$ -tą fazę, o ile będziemy mogli wykonać pierwsze  $i - 1$  faz, jest równe

$$1 - \frac{1}{q^{n-i+1}}.$$

\*XIV LO im. Stanisława Staszica, Warszawa

Stąd otrzymujemy końcowy wynik, że prawdopodobieństwo wykonania całego algorytmu, czyli prawdopodobieństwo tego, że wyznacznik macierzy będzie różny od 0, jest równe

$$\left(1 - \frac{1}{q^n}\right) \left(1 - \frac{1}{q^{n-1}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{q}\right).$$

Zajmijmy się teraz następującym problemem. Rozważmy graf skierowany o  $n$  wierzchołkach, w którym dla każdej uporządkowanej pary liczb  $(i, j)$ , takiej że  $1 \leq i, j \leq n$ , krawędź skierowana od wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$  występuje z prawdopodobieństwem  $\frac{1}{2}$  (w szczególności, w tym grafie mogą występować pętle). Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że w tym grafie jest nieparzysta liczba pokryć cyklowych?

A czym właściwie są pokrycia cyklowe? Otóż pokrycie cyklowe to taki zbiór  $n$  krawędzi grafu, że z każdego wierzchołka wychodzi dokładnie jedna krawędź i do każdego wierzchołka wchodzi dokładnie jedna krawędź z tego zbioru. Przedstawia się ono jako zbiór rozłącznych cykli o łącznej długości  $n$ . Każde pokrycie cyklowe możemy utożsamiać z  $n$ -elementową permutacją  $\sigma$ , w której  $\sigma(i)$  jest numerem wierzchołka, do którego wchodzi krawędź wychodząca z wierzchołka o numerze  $i$ . Natomiast permutacja  $\sigma$  reprezentuje pokrycie cyklowe, jeżeli dla każdego  $i = 1, 2, \dots, n$  istnieje krawędź z wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $\sigma(i)$ .

Zapisać nasz graf w postaci macierzy sąsiedztwa  $A$ , czyli macierzy kwadratowej o wymiarach  $n \times n$ , w której w polu  $(i, j)$  jest 1, jeżeli istnieje krawędź od wierzchołka  $i$  do wierzchołka  $j$ , a w przeciwnym przypadku jest tam 0. A jak na tę macierz przenoszą się pokrycia cyklowe? Rozpatrzmy pewne pokrycie cyklowe i zaznaczmy w naszej macierzy pola odpowiadające krawędziom należącym do pokrycia. Będzie to  $n$  takich pól, że żadne dwa pola nie znajdują się w tym samym wierszu ani w tej samej kolumnie  $i$ , w dodatku, wszystkie te pola mają wartość 1. Zatem iloczyn liczb w tych polach będzie równy 1. A co dzieje się z permutacjami, którym nie odpowiadają pokrycia cyklowe? Jeżeli zaznaczmy w analogiczny sposób w naszej macierzy pola odpowiadające potencjalnym krawędziom z tej permutacji, to skoro nie reprezentowała ona pokrycia cyklowego, to w co najmniej jednym zaznaczonym polu znajdzie się 0. W takim razie iloczyn liczb w tych polach będzie równy 0. Możemy zatem wysunąć wniosek, że liczba pokryć cyklowych w tym grafie jest równa

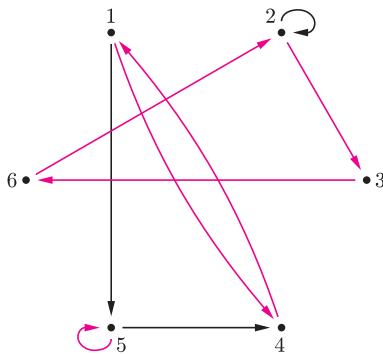
$$\sum_{\sigma \in S_n} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)},$$

gdzie  $S_n$  to zbiór wszystkich  $n$ -elementowych permutacji, a  $a_{i,j}$  to wartość pola  $(i, j)$  w macierzy sąsiedztwa. Powyższą liczbę nazywa się też permanentem macierzy  $A$ . Przypatrzmy się teraz wzorowi permutacyjnemu na wyznacznik macierzy:

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\text{Inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \dots a_{n,\sigma(n)},$$

gdzie  $\text{Inv}(\sigma)$  jest liczbą inwersji w permutacji  $\sigma$ , ale dla nas istotne będzie to, że  $(-1)^{\text{Inv}(\sigma)}$  może przyjmować tylko wartości 1 i  $-1$ , a skoro te dwie liczby są tej samej parzystości, zatem permanent i wyznacznik macierzy całkowitoliczbowej są tej samej parzystości. Zauważmy jeszcze, że to, czy wyznacznik takiej macierzy sąsiedztwa jest parzysty, to po prostu pytanie, czy wyznacznik tej macierzy jest zerowy, jeżeli potraktujemy macierz sąsiedztwa jako macierz nad ciałem  $\mathbb{Z}_2$ . W dodatku, sposób, w jaki losowaliśmy krawędzie grafu, odpowiada sposobowi, w jaki losowaliśmy elementy macierzy we wcześniejszej części artykułu. Z połączenia tych faktów otrzymujemy wniosek, że prawdopodobieństwo tego, że liczba pokryć cyklowych naszego grafu jest nieparzysta, jest równe

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2}\right).$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

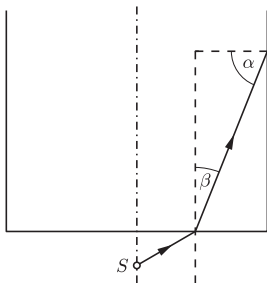
Przykładowy graf o sześciu wierzchołkach i jego macierz sąsiedztwa. Na rysunku zaznaczono jedno z dwóch pokryć cyklowych tego grafu, odpowiadające permutacji

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$



#### Rozwiązanie zadania F 808.

Przez boczną powierzchnię cylindra nie wydostanie się żaden promień światła, jeśli dla promienia o (skrajnym) kącie padania  $\pi/2$  na dno cylindra kąt padania  $\alpha$  na powierzchnię boczną będzie spełniał nierówność  $\sin \alpha > 1/n$ .



W tym przypadku na powierzchni bocznej nastąpi całkowite odbicie. Z geometrii układu wynika, że

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \beta}, \quad \sin \beta = 1/n.$$

Stąd

$$n_{\min} = \sqrt{2}.$$

# Prostokąt arytmetyczny

Jakub RADOSZEWSKI



W tym artykule omówimy zadanie *Prostokąt arytmetyczny* z Akademickich Mistrzostw Polski w Programowaniu Zespołowym 2011. Jednak zanim to zrobimy, zastanowimy się nad dwoma pozornie niezwiązanymi problemami.

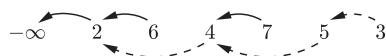
**Problem 1.** Dany jest  $n$ -elementowy ciąg liczb całkowitych  $a_1, \dots, a_n$ . Chcielibyśmy dla każdego elementu ciągu wyznaczyć najbliższy mniejszy od niego element położony na lewo od niego. Formalnie, dla każdego  $i$  szukamy największego takiego  $j$ ,  $j < i$ , że  $a_j < a_i$ . Aby ta wartość była zawsze zdefiniowana, dokładamy sztuczny element  $a_0 = -\infty$  (patrz rys. 1).



Rys. 1

Najprostszy algorytm rozwiązujący Problem 1 działa w czasie  $O(n^2)$ . Używając sprytnych struktur danych (zrównoważone drzewa binarne), można otrzymać rozwiązanie działające w czasie  $O(n \log n)$ . Podany problem można jednak rozwiązać prosto i liniowo, jeśli tylko pójdzie się za strzałkami.

Idea takiego rozwiązania jest jasna: będziemy przypisywać strzałki kolejnym elementom, od lewej do prawej. Dla danego  $i$  zaczynamy od sprawdzenia, czy  $a_{i-1} < a_i$ . Jeśli tak, to wiemy, że strzałka z  $a_i$  prowadzi do  $a_{i-1}$ . A jeśli nie, to idziemy do pierwszego elementu mniejszego niż  $a_{i-1}$ , czyli dokładnie wzdłuż strzałki z  $a_{i-1}$ . Kontynuujemy to postępowanie aż do momentu, gdy znajdziemy element mniejszy niż  $a_i$ . Przykładowo, rysunek 2 ilustruje wyznaczanie strzałki wychodzącej z trójki.



Rys. 2

Aby uzasadnić, że ten algorytm jest liniowy, wystarczy pokazać, że wzdłuż każdej strzałki przejdziemy co najwyżej raz. Faktycznie, jeśli przy wyznaczaniu strzałki dla  $a_i$  przechodzimy wzdłuż strzałki wychodzącej z pewnego  $a_j$  ( $j < i$ ), to wiemy, że  $a_j \geq a_i$ . To oznacza, że każda strzałka wychodząca z elementów  $a_{i+1}, a_{i+2}, \dots$  prowadzi albo do  $a_i$  lub elementu położonego na prawo od  $a_i$ , albo do jakiegoś elementu mniejszego niż  $a_i$ , a zatem położonego na lewo od  $a_j$ . Strzałkę wychodzącą z  $a_j$  wykorzystamy zatem dokładnie raz, co chcieliśmy wykazać.



**Problem 2.** Mamy daną tablicę rozmiaru  $n \times n$  wypełnioną zerami i jedynkami. Należy znaleźć prostokątny fragment tej tablicy wypełniony samymi jedynkami o jak największej powierzchni (patrz rys. 3). Ten problem pojawił się na IX Olimpiadzie Informatycznej jako zadanie *Działka*.

Wszystkich prostokątów w takiej tablicy jest rzędu  $n^4$ , więc problem trzeba rozwiązywać jakoś sprytniej. Znana jest cała gama rozwiązań o złożoności czasowej  $O(n^4)$ ,  $O(n^3)$ , a nawet  $O(n^2)$ . Pokażemy tu dosyć proste rozwiązanie o optymalnej złożoności  $O(n^2)$ .

Zacznijmy od wyznaczenia dla każdego pola  $(i, j)$  tablicy liczby kolejnych pól wypełnionych jedynkami położonych w dół od tego pola, wliczając samo pole  $(i, j)$ . Oznaczmy tę wartość przez  $D[i, j]$ . Takie wartości łatwo wyznaczamy w czasie  $O(n^2)$ , idąc od dołu do góry tablicy (rys. 4). Zauważmy, że  $D[i, j]$  jest niezerowe tylko wtedy, gdy oryginalna tablica w polu  $(i, j)$  miała jedynkę.

1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
1	1	1	1	0
1	1	1	1	0
0	1	1	0	1

Rys. 3

1	0	0	4	2
0	4	4	3	1
2	3	3	2	0
1	2	2	1	0
0	1	1	0	1

Rys. 4

Teraz przychodzi kluczowe spostrzeżenie. Otóż poszukiwany prostokąt możemy skonstruować tak: bierzemy jakieś pole  $(i, j)$  i wyznaczamy prostokąt zawierający to pole w górnym wierszu, o wysokości  $D[i, j]$  i sięgający w prawo i w lewo tak daleko, jak tylko się da. Faktycznie, wynikowy prostokąt nie może być rozszerzony w dół (ani w żadną inną stronę), więc musi być opisanej postaci dla pewnego pola  $(i, j)$ . Przykładowo, na rysunkach 3 i 4 pole  $(i, j)$  wynikowego prostokąta (kwadratu) o powierzchni 9 to jego prawy górny róg.

Dla każdego pola  $(i, j)$  o niezerowym  $D[i, j]$  szukamy zatem najbliższych pól w tym samym wierszu, dla których wartości  $D$  są mniejsze niż  $D[i, j]$ , czyli takich indeksów  $j' < j < j''$ , że  $D[i, j'], D[i, j''] < D[i, j]$ ,  $j'$  jest maksymalne, a  $j''$  – minimalne. Wówczas wynikiem jest maksimum z iloczynów postaci  $(j'' - j' - 1) \cdot D[i, j]$  dla wszystkich pól  $(i, j)$ . Zauważmy jednak, że jest to dokładnie zastosowanie Problemu 1 do  $i$ -tego wiersza tablicy  $D$ , tyle że raz od lewej do prawej (wyznaczanie  $j'$ ), a raz od prawej do lewej (wyznaczanie  $j''$ ). Wystarczy otoczyć tablicę  $D$  obwódką z polami zawierającymi  $-\infty$  i możemy już zastosować poprzedni algorytm, wiersz po wierszu. Dostajemy żądany czas  $O(n^2)$ .

1	3	7	11	15
2	4	6	8	10
5	5	5	5	5
8	6	4	2	0
6	3	0	4	8



**Problem 3.** Przyszła wreszcie pora, aby sformułować wspomniane na wstępie zadanie o prostokącie arytmetycznym. Znowu mamy daną tablicę rozmiaru  $n \times n$ , tym razem mogą się w niej znajdować dowolne nieujemne liczby całkowite. Szukamy w niej prostokąta arytmetycznego o maksymalnej powierzchni, przy czym prostokąt arytmetyczny to prostokąt, w którym liczby w każdym wierszu oraz w każdej kolumnie tworzą ciąg arytmetyczny (patrz rys. 5).

Rys. 5

Na początek zajmijmy się prostokątami o wysokości 1. Widzimy, że każdy wiersz tablicy możemy podzielić na maksymalne ciągi arytmetyczne, z których każdy ma długość co najmniej dwa i każde dwa kolejne ciągi mają dokładnie jeden element wspólny. Przykładowo, dolny wiersz tablicy z rysunku 5 dzielimy na ciągi  $(6, 3, 0)$  i  $(0, 4, 8)$ , a górny na ciągi  $(1, 3)$  i  $(3, 7, 11, 15)$ . Korzystając z takiego przedstawienia, w czasie  $O(n^2)$  łatwo znajdziemy najdłuższy prostokąt arytmetyczny o wysokości 1. Podobnie rozpatrujemy prostokąty o długości 1, wysokości 2 (jak?) i długości 2.

1	3	7	11	15
2	4	6	8	10
5	5	5	5	5
8	6	4	2	0
6	3	0	4	8

Rys. 6

Odtąd interesować nas będą tylko prostokąty, których każdy bok ma długość co najmniej 3. Znajdowanie takich prostokątów sprowadzimy do zadania *Działka*.

Zaznaczmy mianowicie kółkiem każdy taki element tablicy, że kwadrat o boku 3 zawierający ten element w środku jest prostokątem arytmetycznym (rys. 6). Okazuje się, że prostokąt o obu wymiarach nie mniejszych niż 3 jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie zawarte w nim elementy tablicy (poza, ewentualnie, jego wewnętrzną obwódką o szerokości 1) są zaznaczone kółkami. Rzeczywiście, jeśli prostokąt jest arytmetyczny, to każdy jego podprostokąt jest arytmetyczny, więc w szczególności wszystkie kwadraty o boku 3, zawarte w tym prostokącie, są arytmetyczne. A w drugą stronę, jeśli mamy dwa sąsiednie elementy tablicy zaznaczone kółkami, to ciągi arytmetyczne w otaczających je kwadratach  $3 \times 3$  sklejają się w dłuższe ciągi arytmetyczne dokładnie tak, jak trzeba.

**Podsumowując:** wąskie prostokąty arytmetyczne rozpatrzyliśmy osobno, a problem szukania odpowiednio grubego prostokąta arytmetycznego o maksymalnej powierzchni sprowadziliśmy do poszukiwania maksymalnych prostokątów złożonych wyłącznie z wyróżnionych pól, czyli dokładnie do Problemu 2. Całe rozwiązanie działa w optymalnym czasie  $O(n^2)$  i jest, w sumie, całkiem sprytne.

Na koniec ciekawa własność prostokątów arytmetycznych, która może zainteresować także nieinformatyków: prostokąt o wysokości co najmniej 2 jest arytmetyczny wtedy i tylko wtedy, gdy liczby w każdej jego kolumnie oraz w dowolnych *dwóch* jego wierszach tworzą ciągi arytmetyczne. Dodajmy, że ta własność nie zachodzi, jeśli wymagamy tylko, aby jeden wiersz prostokąta stanowił ciąg arytmetyczny.



**Rozwiązanie zadania F 807.**  
Na mocy symetrii układu obraz źródła będzie położony także w odległości  $b$  od kulki, ale po jej drugiej stronie.

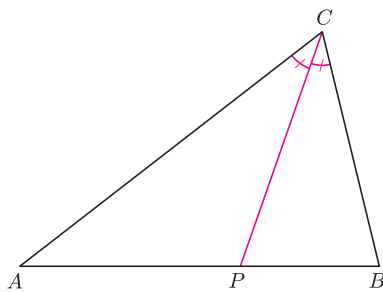


# mała delta

## Odkryj twierdzenie sam

Czasem przydaje się do czegoś następujące *twierdzenie o dwusiecznej*:

*jeśli w trójkącie  $ABC$  poprowadzimy dwusieczną kąta  $C$  przecinającą odcinek  $AB$  w punkcie  $P$ , to stosunek długości odcinków  $AP$  i  $BP$  będzie równy stosunkowi długości boków  $AC$  i  $BC$  (rys. 1).*



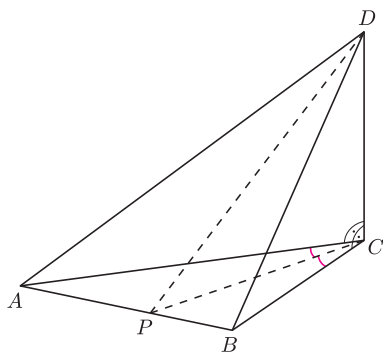
Rys. 1

O trudnych zadaniach i efektownych rozwiązaniach, w których ma ono swój udział, można by długo pisać, ale tym razem spojrzmy na nie od innej strony: ciekawe, czy istnieje jego odpowiednik w geometrii przestrzennej?

Żeby otrzymać podobną zależność dla czworościanu, należałoby pewnie wziąć płaszczyznę dwusieczną kąta dwuściennego i jej punkt przecięcia z przeciwległą krawędzią. Stosunek długości odcinków, na które dzieli ją ta płaszczyzna, powinien być równy... no właśnie, czemu?

Weźmy jakiś szczególny czworościan i sprawdźmy, co dla niego wychodzi. Na przykład, co się dzieje dla czworościanu foremnego?

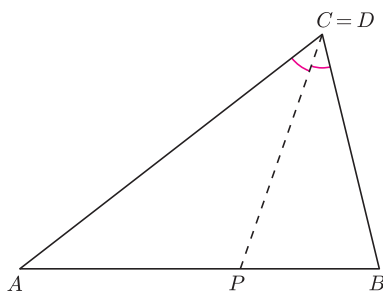
W tym przypadku dwusieczna kąta dwuściennego dzieli czworościan na symetryczne części i ten stosunek jest równy 1. Wydaje się, że podobnie jak dla trójkąta, powinniśmy umieć zapisać ten stosunek jako iloraz dwóch wielkości zależnych od ścian wybranego kąta dwuściennego. Niestety, pierwszy przykład wygląda na zbyt szczególny, ponieważ każdy ze stosunków: pól, obwodów, wysokości, krawędzi wychodzących z tego samego wierzchołka jest także równy 1. Trzeba pomyśleć nad lepszym przykładem do testowania.



Rys. 2a

Spróbujmy może wziąć taki czworościan  $ABCD$ , aby spodek wysokości poprowadzonej z wierzchołka  $D$  na podstawę  $ABC$  pokrywał się z punktem  $C$  (inaczej mówiąc, krawędź  $CD$  ma być prostopadła do ściany  $ABC$ ), i popatrzeć na płaszczyznę dwusieczną kąta dwuściennego przy krawędzi  $CD$  (rys. 2a).

Dlaczego to dobry przykład? Widzimy, że część wspólna płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego przy krawędzi  $CD$  z płaszczyzną  $ABC$  jest dwusieczną kąta  $ACB$ , czyli na podstawie  $ABC$  mamy narysowaną sytuację z płaskiej wersji twierdzenia o dwusiecznej (rys. 2b).



Rys. 2b. Widok na czworościan  $ABCD$  z góry.

A dlaczego tak jest? Zauważmy, że płaszczyzna dwusieczna dzieli kąt dwuścienny na połowy. Kąt dwuścienny zaś jest równy kątowi płaskiemu utworzonemu przez dwie proste leżące w półpłaszczyznach go ograniczających i prostopadłe do wspólnej krawędzi. Wybraliśmy czworościan tak, żeby prosta  $CD$  była prostopadła do płaszczyzny  $ABC$ , a więc w szczególności do prostych  $AC$  i  $BC$ . To oznacza, że proste  $AC$  i  $BC$  tworzą kąt płaski równy kątowi dwuściennemu między wybranymi ścianami.

Teraz, jeśli przez  $P$  oznaczymy punkt przecięcia płaszczyzny dwusiecznej kąta dwuściennego przy krawędzi  $CD$  z krawędzią  $AB$ , to na mocy twierdzenia o dwusiecznej mamy

$$\frac{AC}{BC} = \frac{AP}{BP}.$$

Możemy zatem stąd podejrzewać, że chodzi o stosunek pól ścian tworzących kąt dwuścienny. Albo stosunek wysokości opuszczonych na wspólną krawędź – czy widzisz, Czytelniku, że to ta sama liczba?

Czyli udowodniliśmy już pierwszy ciekawy przypadek rozszerzonego twierdzenia:

*jeśli w czworościanie jedna z krawędzi jest prostopadła do pewnej ściany, to płaszczyzna dwusieczna kąta dwuściennego przy tej krawędzi dzieli przeciwległą krawędź w stosunku równym stosunkowi pól ścian zawierających krawędź tworzącą kąt dwuścienny.*

Wydaje się, że takie twierdzenie może być prawdziwe dla dowolnego czworoscianu, ale czy potrafimy to jakoś udowodnić?

Moglibyśmy złożyć dwa czworosciany, które mają taką samą podstawę i które spełniają założenia opracowanego już szczególnego przypadku. Dokładniej, wysokości opuszczone na te ściany, które będziemy sklejać, muszą być krawędziami czworoscianu.

Czworościan  $ABCD$  możemy w ten sposób skleić z dwóch mniejszych, gdy da się skonstruować płaszczyznę zawierającą pewną krawędź i prostopadłą do krawędzi przeciwległej. Na rysunku 3 widać płaszczyznę zawierającą krawędź  $AB$  i prostopadłą do krawędzi  $CD$ . Punkt  $D'$  to punkt przecięcia tej płaszczyzny z krawędzią  $CD$ .

W tej sytuacji, korzystając ze szczególnego przypadku twierdzenia dla czworoscianów  $ABCD$  i  $ABD'D$ , mamy

$$\frac{AP}{BP} = \frac{AD'}{BD'} = \frac{[ACD]}{[BCD]},$$

ponieważ odcinki  $AD'$  i  $BD'$  są prostopadłe do krawędzi  $CD$ .

Co ciekawe, punkt  $D'$  może leżeć też poza odcinkiem  $CD$  – wtedy można powiedzieć, że odejmujemy czworosciany, zamiast je dodawać.

Niestety, to jeszcze nie wszystko. Istnieją czworosciany  $ABCD$ , których nie można w ten sposób skleić – spodki wysokości poprowadzonych z wierzchołków  $A$  i  $B$  na prostą  $CD$  nie pokrywają się. Co wtedy?

Spróbujmy narysować sytuację dla dowolnego czworoscianu (rys. 4). Niech  $A'$  i  $B'$  będą rzutami prostokątnymi odpowiednio wierzchołków  $A$  i  $B$  na prostą  $CD$ . Umiemy już udowodnić twierdzenie w przypadku, gdy punkty  $A'$  i  $B'$  się pokrywają. Ogólnie jednak nie musi tak być, więc nie mamy trójkąta, dla którego można by zastosować twierdzenie o dwusiecznej.

Skąd wziąć taki trójkąt? Może coś przesunąć tak, żeby punkty  $B'$  i  $A'$  trafiły w jedno miejsce? Wyobraźmy sobie przesunięcie równoległe odcinka  $BB'$  wzdłuż prostej  $CD$  tak, żeby  $B'$  pokrył się z  $A'$ . Niech  $B''$  będzie obrazem punktu  $B$  w tym przesunięciu.

Wtedy punkt  $A'$  jest rzutem prostokątnym punktu  $B''$  na prostą  $CD$ , czyli czworoscian  $AB''CD$  da się skleić z dwóch „ładniejszych”, tak jak to robiliśmy przed chwilą! To znaczy, że jeśli płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego przy krawędzi  $CD$  przecina krawędź  $AB''$  w punkcie  $Q$ , to

$$\frac{AQ}{B''Q} = \frac{AA'}{B''A'} = \frac{[ACD]}{[B''CD]}.$$

A ponieważ przesuwaliliśmy punkt  $B''$  równoległe do  $CD$ , to  $B''A' = BB'$  i  $[B''CD] = [BCD]$ .

Gdybyśmy jeszcze wykazali, że

$$\frac{AQ}{B''Q} = \frac{AP}{BP},$$

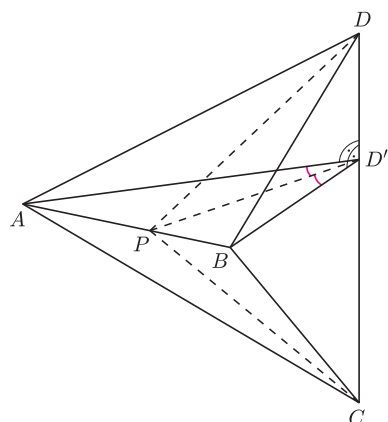
czyli inaczej, że proste  $PQ$  i  $BB''$  są równoległe, to otrzymalibyśmy pełną wersję twierdzenia. Na szczęście to już jest łatwe: skoro odcinki  $BB''$  i  $CD$  są równoległe, to każda płaszczyzna zawierająca prostą  $CD$  przecina płaszczyznę  $ABB''$  wzdłuż pewnej prostej równoległej do  $BB''$ .

Zaraz, czy na pewno? Tak – gdyby proste  $PQ$  i  $BB''$  miały jakiś punkt wspólny  $S$ , to płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego przy krawędzi  $CD$  miałaby trzy punkty wspólne z płaszczyzną  $CD$ : punkty  $C$ ,  $D$  oraz  $S$ .

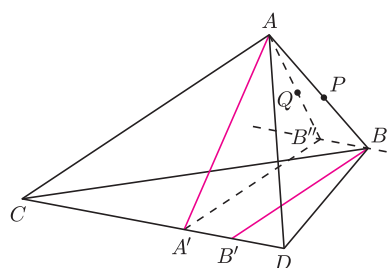
Wobec tego nie mamy już żadnych wątpliwości, że

*w dowolnym czworoscianie płaszczyzna dwusieczna kąta dwusiecznego dzieli przeciwległą krawędź w stosunku równym stosunkowi pól ścian czworoscianu zawierających krawędź tego kąta dwusiecznego.*

*Małą Deltę przygotował Michał KIEZA*



Rys. 3



Rys. 4



Wydawnictwa Uniwersytetu  
Warszawskiego, 2011

## Kilka wyznań laika

Krzysztof TURZYŃSKI

Byłem, jak się wydaje, człowiekiem w miarę poukładanym i bez skłonności do przesadnych uniesień. Może z pewnymi wyjątkami. Dawno temu podczas transatlantyckiego lotu wziąłem do ręki powieść Margaret Atwood, by przeczytać parę stron, a potem się zdrzemnąć. Wzrok znad książki podniosłem, kiedy doszedłem do końca tekstu, a samolot podchodził do lądowania.

Byłem, jak się wydaje, człowiekiem dość optymistycznym. Kiedy Grigorijowi Perelmanowi przyznano Medal Fieldsa, czytałem w ogólnopolskich dziennikach barwne opisy warunków bytowych ekscentrycznego uczonego. Brak wzmianek o tym, czym jest udowodniona przez niego hipoteza Poincarégo, tłumaczyłem sobie (i innym) nieprzygotowaniem masowego czytelnika do takich wywodów.

Byłem, jak się wydaje, bezkrytycznie namiętym pozeraczem słowa pisanego. Z pewnym żalem obserwowałem tylko, jak pełnokrwiste eseje z czasów, kiedy wiodące tygodniki opinii miały formę wielkich, czarno-białych płacht papieru niepierwszej jakości, ustępują miejsca (z cennymi wyjątkami) wyrobom artykułopodobnym, których najważniejszym elementem jest chwytliwy „lead” oraz kolorowe zdjęcie.

A potem w moich rękach znalazła się książka Pawła Strzeleckiego *Matematyka współczesna dla myślących laików*.

Książka, potraktowana jako lektura przed snem, zemściła się za taki despekt. Kiedy udało mi się od niej oderwać, możliwa liczba godzin snu przed porannymi obowiązkami była żałośnie niewielka. Próba czytania w pociągu podmiejskim skończyła się dotarciem daleko poza stację docelową. Później, biorąc ten tom do ręki, za każdym razem sprawdzałem, czy nieuchronne wessanie w wartką narrację może spowodować jakieś dalsze nieoczekiwane komplikacje życia osobistego.

Nie oznacza to, bynajmniej, że opisywaną książkę można czytać jak jakiś pośledni kryminał, angażujący ułamek części mózgu odpowiedzialnej za abstrakcyjne myślenie. Autor, wzorem wielu innych profesorów uniwersyteckich, nie traktuje czytelnika jak osoby o ograniczonych zdolnościach poznawczych lub też kogoś, komu należy w pół minuty przedstawić zabawną anegdotkę. Wbrew rozpowszechnionym przekonaniom o tym, jak powinna wyglądać popularyzacja nauk ścisłych, w tekście występują tam, gdzie są potrzebne, wzory (a nawet dowody!), rysunki są zaś raczej oszczędne.

Paweł Strzelecki nic sobie nie robi z mody na teksty składające się z felietoników nieprzekraczających dwóch stron druku. Poszczególne rozdziały książki są dosyć długimi, przeplatany dygresjami opowieściami o rozwoju różnych działów matematyki związanych na ogół, zdaje się, zgodnie z gustem autora, z teorią układów dynamicznych. Wiele z przytoczonych przykładów najnowszych wyników badawczych stanowi doskonałą ilustrację tezy, że bardzo ważną częścią matematyki jest rozwiązywanie „zadane” – czyli problemów, zwykle niewinnie brzmiących, do których sformułowania wystarczą pojęcia wpajane z lepszym lub gorszym skutkiem w szkole średniej. Rozwiązania

wielu takich „zadane” wykorzystują tymczasem subtelne związki różnych działów matematyki, niejednokrotnie prowadząc ku obszarom nieogarniętym jeszcze ludzką wiedzą. Gdyby zaś dziennikarzy produkujących „newsy” o Perelmanie, żyjącym nędznie w pełnym robactwa mieszkaniu, dało się jakoś skłonić do lektury rozdziału 9., poświęconego hipotezie Poincarégo, musieliby oni z zawstyżeniem przyznać, że zignorowali najciekawszy element historii z Medalem Fieldsa – tyle że wymagający co nieco myślenia.

Nie da się uniknąć tego, że książka taka jak *Matematyka współczesna*... stanowi także pewnego rodzaju tekst programowy stwierdzający, czym dziś jest, zdaniem autora, dziedzina nauki zwana matematyką. Autor cytuje na początku definicję Thurstona, twierdzącego, że *matematyka obejmuje liczby naturalne oraz geometrie płaską i przestrzenną; matematyka jest przedmiotem badań matematyków; matematykami są ci ludzie, którzy zwiększają i pogłębiają nasze zrozumienie matematyki*. Każdy może się w duchu zżymać na niekonkretność tego postulatu, przedtem jednak powinien odpowiedzieć sobie na pytanie, czy na pewno wie, na czym polega obecnie „zrozumienie matematyki”. Mam wrażenie, że książka Pawła Strzeleckiego pozwoliła mi zobaczyć niezmiernie interesujący fragment odpowiedzi na to pytanie.

Nie wiem, czy nie byłoby przesadną próżnością lub kokieterią, gdybym przed przeczytaniem *Matematyki współczesnej*... zechciał zaliczyć siebie publicznie do grona myślących laików. Wiem za to, że teraz, kiedy przyjemność jej pierwszej lektury mam już za sobą, będę z niecierpliwością czekał na kolejną książkę tego autora. Że wie, jak pisać o matematyce – to oczywiste. Czy zechce? – *noblesse oblige*, szlachectwo ducha, rzecz jasna.



## Rozmyślenia przy malowaniu oka

Parę dni temu słuchacz radiowy zakwestionował sens utrzymywania nauki i naukowców, bez których przecież można by się obejść. Przez wiele lat, organizując Warszawski Festiwal Nauki, byłam pytana konsekwentnie przez „wnikliwych” dziennikarzy, **PO CO** popularyzuje się naukę. Pytanie można by rozszerzyć o to, **JAK** popularyzuje się naukę.

Źródeł, początków popularyzacji nauki upatruję w jej rozwoju. W pierwszej połowie XX wieku przedstawiciele „całej” liczącej się światowej fizyki gromadzili się na konferencjach w Getyndze w liczbie kilkudziesięciu osób, a odkrycie chemicznej natury genu stanowiło tylko ciekawostkę. Rzadko te osiągnięcia były upowszechniane, jeżeli – to w formie książek. Tak powstał stereotyp uczonego w przysłowiowej wieży z kości słoniowej.

Zmiany w takim sposobie myślenia nastąpiły wraz z pojawieniem się nauk interdyscyplinarnych, na styku fizyki z biologią, medycyny z chemią, matematyki z informatyką i innych. Żeby robić coś na miarę jeszcze XX wieku, trzeba było przekonać do swoich projektów kolegów i koleżanki z pokrewnych dziedzin. Trzeba było umieć mówić o swojej nauce w sposób przystępny: biolog powinien zrozumieć się z fizykiem, aby razem mogli uprawiać biofizykę. A w ramach współczesnej biotechnologii współpracować powinni byli mikrobiolog, genetyk, lekarz, chemik, fizyk, konstruktor reaktorów fermentacyjnych, informatyk i wielu innych. I ktoś jeszcze powinien był uczyć tych podejść w uczelniach wyższych, w średnich szkołach też.

Wypracowywanie wspólnego języka, konieczność zachęty dla uczonych z różnych dyscyplin nauczyły umiejętności wyrzeczenia się specjalistycznych żargonów. Niektórym się to nawet podobało.

Nauka na styku dyscyplin stawała się coraz bardziej kosztowna, nie była już tylko zawodowym hobby małych grup ludzi. Wymagała „obudowania” naukami humanistycznymi: filozofią, socjologią, psychologią. Czasem nawet przydawał się, ze swoją niebanalną wyobraźnią – malarz, rzeźbiarz, czy też muzyk. Pieniądze na badania dawało państwo, pojawił się też nowy typ mecenatu – prywatny przemysł, firmy produkcyjne, fundacje. Tym fundatorom też należało wytłumaczyć, co i dlaczego warto badać, z jakich kosztownych badań może wyrosnąć coś, co można będzie sprzedać! Należało też mówić do nich językiem, który rozumieli.

W latach 60. XX wieku powstały pierwsze interakcyjne Centra Nauki (oczywiście, zaczęło się to w USA), zainicjowano pierwsze festiwale i pikniki naukowe. Ich wspaniałą cechą było to, że każdy „maluczek” mógł tu dotknąć nauki, samodzielnie wykonać doświadczenie. Podatnik zaczynał rozumieć, dlaczego warto część podatków przeznaczyć na rozwój nauki. Pierwszy festiwal nauki w Polsce i pierwszy piknik powstały w 1997 roku. Byliśmy w czołówce działań tego typu w Europie.

Dziś liczba form, w których popularyzuje się naukę, wzrasta z każdym dniem. Najszybciej rozwijają się formy elektroniczne: strony informacyjne w Internecie, transmisje na żywo, portale społecznościowe, naukowe blogi i twittery, nawet nauka w Second Life. Rozkwitają bardzo różnorodne w formie i „rozmiarze” spotkania z nauką: szkolne festiwale, dni nauki w małych miastach pozbawionych uczelni i centrów, kawiarnie naukowe dorosłych i młodzieży, uniwersytety dzieci i seniorów, wieczorki naukowe, spotkania filozoficzne. Propaguje się naukę dzięki imprezom w typie „Mam talent”. Możliwa staje się interakcja w myśleniu, tak jak wcześniejsze instytucje i centra nauki wprowadziły interakcje w doświadczeniu. Wbrew pesymistom nie zniknęły też pisma i książki popularyzujące naukę.

Może ten cytowany we wstępie słuchacz radiowy po prostu mnie prowokował, a ja się dałam na to nabrać...

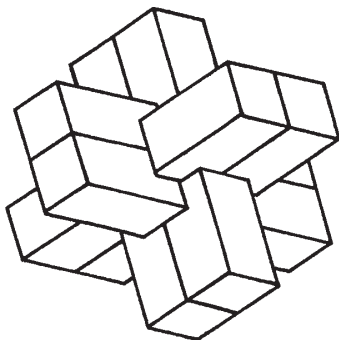
Magdalena FIKUS



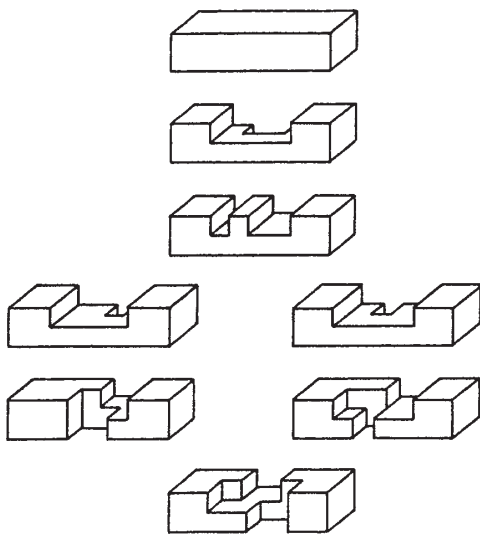


## Krzyżak litewski

Wbrew oczywistemu skojarzeniu nie chodzi tu o Konrada Wallenroda, lecz o układankę, jaką przed wiekami wymyślili litewscy drwale. Składa się ona z sześciu patyczków jednakowej długości i mających jednakowe kwadratowe przekroje. Przynajmniej przy obu końcach. Bo w środkowej partii w pięciu z nich czegoś brakuje. A braki dobrane są w ten sposób, że patyczki te dadzą się złożyć właśnie w trójwymiarowy krzyżak (w filmach wojennych można coś o podobnym kształcie, ale z betonu lub stali, spotkać jako zapory przeciwczołgowe). I to złożyć tak zmyślnie, że wewnątrz nie będzie pustego miejsca.



A oto składające się na niego patyczki.



Użycie słowa „składające się” jest zdecydowanie przesadnym eufemizmem – patyczki nie tylko nie składają się, ale wręcz wydają się złośliwie uniemożliwiać złożenie ich w krzyżak próbującemu wykonać to delikwentowi. Polecam takie próby – jeśli za pierwszym razem uda się tego dokonać podczas godziny lekcyjnej (co nie znaczy, abym sugerował składanie krzyżaka na lekcjach), można być z siebie bardzo dumnym.

Oczywiście, aby krzyżak składać, trzeba mieć odpowiednio wycięte patyczki. W posiadaniu redakcji jest taki zestaw patyczków i to oryginalny, bo rzeczywiście wycięty kozikiem przez litewskiego drwala. Mniej więcej trzydzieści lat temu w handlu ukazały się takie plastikowe patyczki, z których można było złożyć taki sam krzyżak. Ale, o dziwo, patyczki nie były takie same – dwie części różniły się od odpowiednich oryginalnych (i narysowanych obok) patyczków. Wynika z tego, że Czytelnik Pracowity, wycinając sobie patyczki na litewski krzyżak, ma pewną swobodę w zaprojektowaniu jego części (w tym kontekście zaskakujący jest fakt, że oryginalne litewskie krzyżaki wszystkie mają jednakowe części). Nie wiemy, jak wielka jest taka swoboda, czyli ile jest istotnie różnych zestawów patyczków na litewski krzyżak. Zachęcamy do prób – poprawne, a różne od zamieszczonego tutaj, zestawy opublikujemy. Podobnie opublikujemy pracę teoretyczną dowodzącą, że możliwych konstrukcji jest tyle a tyle. Jako warunek dla konstruktorów stawiamy to, że – przyjmując wymiary przekroju patyczka jako  $a \times a$  – odstępów cięć muszą być wielokrotnościami  $a/2$ .

Szczególnie istotną sprawą jest także to, by rzeczywiście wewnątrz złożonego krzyżaka nie było luk. Sprawdzać to można mierząc i obliczając, ile drewna w patyczkach brakuje. Z naszych obliczeń wynika, że powinno brakować  $5a^3$ . Jeśli wynik ten jest błędny, będziemy wdzięczni za sprostowanie.

I jeszcze uwaga techniczna. Czytelnik niebędący drwalem może być przy struganiu patyczków wystawiony na niebezpieczeństwo pokaleczenia się nożem. Dlatego sugerujemy, aby dobrać do pracy drewno możliwie miękkie i o równoległych słojach. A, oczywiście, ideałem byłoby strugać patyczki z balsy. Można takowe nabyć w sklepach dla modelarzy.

M. K.

## O niespodziewanej tożsamości algebraicznej

Załóżmy, że suma kwadratów trzech liczb naturalnych jest podwojonym kwadratem pewnej liczby naturalnej. Czy możliwe jest, żeby wówczas suma czwartych potęg tych trzech liczb była podwojoną czwartą potęgą tej samej liczby?

Okazuje się, że może tak być. Powiemy, jak skonstruować nieskończenie wiele takich trójek w szczególnym przypadku, gdy jedna z tych trzech liczb jest sumą dwóch pozostałych.

Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 + (x + y)^2 &= 2(x^2 + xy + y^2), \\x^4 + y^4 + (x + y)^4 &= 2(x^2 + xy + y^2)^2.\end{aligned}$$

W szczególności, gdy weźmiemy  $x = a^2 - b^2$  oraz  $y = 2ab + b^2$ ,

a zatem  $x + y = a^2 + 2ab$ , otrzymujemy właśnie

$$\begin{aligned}(a^2 - b^2)^2 + (2ab + b^2)^2 + (a^2 + 2ab)^2 &= 2(a^2 + ab + b^2)^2, \\(a^2 - b^2)^4 + (2ab + b^2)^4 + (a^2 + 2ab)^4 &= 2(a^2 + ab + b^2)^4.\end{aligned}$$

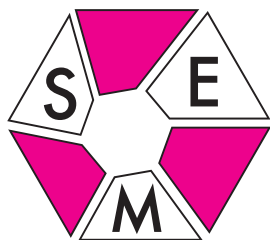
Na przykład dla  $a = 3$  i  $b = 1$  mamy

$$\begin{aligned}8^2 + 7^2 + 15^2 &= 338 = 2 \cdot 13^2, \\8^4 + 7^4 + 15^4 &= 57122 = 2 \cdot 13^4.\end{aligned}$$

Czy badana zależność jest spełniona tylko wtedy, gdy jedna z trzech liczb jest sumą dwóch pozostałych?

Czy skonstruowaliśmy wszystkie trójki liczb naturalnych spełniające tę zależność? Pozostawiam to do przemyślenia Czytelnikom.

Aleksander GÓRSKI



W dniach 4–6 listopada 2011 roku w hotelu Ameliówka koło Kielc odbyła się konferencja organizowana przez SEM wspólnie z Wydziałami Matematyki i Nauk Informatycznych Politechniki Warszawskiej i Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Było to już czwarte spotkanie naukowe zorganizowane w podobnej formie przez nasze Stowarzyszenie. Konferencja ta, podobnie jak poprzednie: *Konkursy matematyczne w Polsce*, *Matematyka – jak uczyć?* oraz *Gdzie jest matematyka?*, stworzyła okazję do spotkania wielu osób zainteresowanych rozbudzaniem matematycznych zdolności młodzieży.

Do Ameliówki przyjechało prawie 140 matematyków z całej Polski na co dzień zajmujących się szeroko rozumianą edukacją matematyczną. Zgodnie z tradycją uczestnikami konferencji byli zarówno nauczyciele matematyki w szkołach różnych typów, jak i pracownicy naukowcy wyższych uczelni.

W trakcie konferencji odbywającej się pod hasłem *Gdzie jest nauczyciel?* zastanawiano się przede wszystkim nad rolą nauczyciela w kształceniu matematycznym.

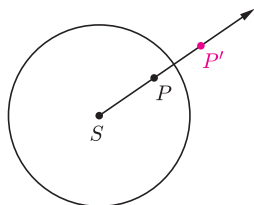
Próbowano odpowiedzieć na pytanie, jaką wartość wnosi nauczyciel do wykształcenia młodych ludzi. Doświadczeni nauczyciele matematyki, pracujący w specjalnych klasach matematycznych, dzielili się swoimi spostrzeżeniami i metodami pracy, pokazując *Gdzie jest nauczyciel w klasie uczniów zdolnych?* Dyskutowano również o podręcznikach matematyki oraz o sposobach i potrzebie uczenia matematyki humanistów. Przedstawiono także wiele interesujących zagadnień matematycznych, które można wykorzystać na zajęciach pozalekcyjnych w gimnazjach i szkołach ponadgimnazjalnych. Konferencja była też okazją prezentacji nowej formy organizacji Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów. Więcej informacji o konferencji można znaleźć na stronie internetowej [sem.edu.pl/konferencja-2011](http://sem.edu.pl/konferencja-2011).

Jednym z wielu bardzo ciekawych odczytów matematycznych było wystąpienie Wojciecha Martysa o inwersji względem okręgu. Chcielibyśmy zwrócić uwagę naszych Czytelników na pewną ładną własność inwersji przedstawioną wraz z dowodem podczas tego referatu.

**Własność.** Niech  $o_1$  i  $o_2$  będą rozłącznymi okręgami leżącymi na danej płaszczyźnie. Wtedy istnieje inwersja tej płaszczyzny przekształcająca okręgi  $o_1$  i  $o_2$  na okręgi koncentryczne.

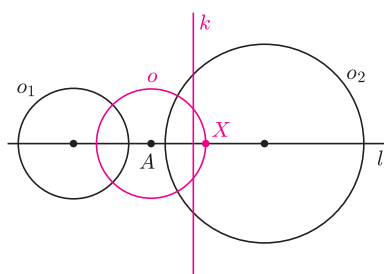
**Dowód.** Możemy założyć, że okręgi  $o_1$  i  $o_2$  nie są koncentryczne. Oznaczmy przez  $l$  prostą przechodzącą przez środki  $o_1$  i  $o_2$ . Na prostej  $l$  znajdujemy punkt  $A$ , z którego długości odcinków stycznych, poprowadzonych do  $o_1$  i  $o_2$ , są jednakowe. Oznaczmy przez  $r$  długość odcinka stycznego poprowadzonego z  $A$  do  $o_1$ . Zauważamy, że okrąg  $o$  o środku w punkcie  $A$  i promieniu  $r$  jest prostopadły do  $o_1$  i do  $o_2$ . Oznaczmy przez  $X$  jeden z punktów przecięcia  $o$  z  $l$ . Wtedy inwersja o środku w punkcie  $X$  przekształca prostą  $l$  w siebie, co oznacza, że środki obrazów  $o'_1$  i  $o'_2$  okręgów  $o_1$  i  $o_2$  w tej inwersji leżą na  $l$ . Ponadto inwersja o środku w punkcie  $X$  przekształca  $o$  na prostą  $k$  (bo  $X \in o$ ) prostopadłą do  $l$  (inwersja zachowuje kąty). Więc  $o'_1$  i  $o'_2$  są okręgami prostopadłymi do  $k$ , co oznacza, że ich środki leżą na  $k$ . Podsumowując: środki  $o'_1$  i  $o'_2$  leżą na  $k$  i na  $l$ , a więc  $o'_1$  i  $o'_2$  muszą być koncentryczne.

Inwersja względem okręgu o środku  $S$  i promieniu  $r$  to przekształcenie, które każdemu punktowi  $P$  płaszczyzny poza  $S$  przyporządkowuje taki punkt  $P'$  półprostej  $SP^{\rightarrow}$ , że  $SP \cdot SP' = r^2$ .



Inwersja ma, między innymi, takie własności:

- zachowuje kąty między krzywymi;
- okręgi nieprzechodzące przez  $S$  przekształca na okręgi;
- okręgi przechodzące przez  $S$  przekształca na proste nieprzechodzące przez  $S$  i odwrotnie;
- proste przechodzące przez  $S$  przekształca na te same proste.



Proponujemy Czytelnikom wykorzystanie udowodnionej własności w analizie następujących zadań.

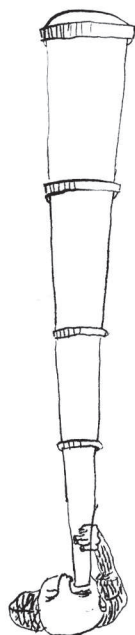
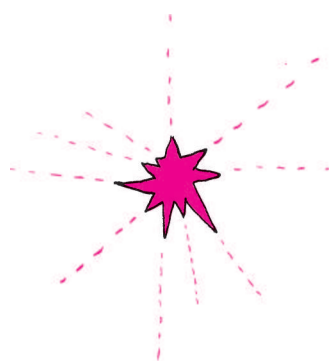
**Zadanie 1.** Dane są dwa okręgi  $o_1$  i  $o_2$ . Znajdź inwersję przekształcającą  $o_1$  na  $o_2$ .

**Zadanie 2.** Dany jest okrąg  $o$  i dwa rozłączne okręgi  $o_1$  i  $o_2$ . Narysuj okrąg styczny do  $o$  i prostopadły do okręgów  $o_1$  i  $o_2$ .

**Zadanie 3.** Niech  $o_1$  i  $o_2$  będą rozłącznymi okręgami, takimi że  $o_1$  leży we wnętrzu  $o_2$ . Rysujemy okrąg  $k_1$  styczny zewnętrznie do  $o_1$  i wewnętrznie do  $o_2$ . Następnie rysujemy okrąg  $k_2$  styczny zewnętrznie do  $o_1$  i  $k_1$  oraz wewnętrznie do  $o_2$  itd. Jeżeli po skończonej liczbie kroków ostatni okrąg będzie styczny zewnętrznie do  $k_1$ , to mówimy, że okręgi  $k_1, k_2, \dots, k_n$  tworzą łańcuch Steinera okręgów  $o_1$  i  $o_2$ . Wykaż, że jeżeli istnieje łańcuch Steinera okręgów  $o_1$  i  $o_2$ , to jest to niezależne od położenia pierwszego okręgu  $k_1$ .

Barbara ROSZKOWSKA-LECH, Krzysztof CHEŁMIŃSKI

## Prosto z nieba: Gwiazdy – fabryki życia

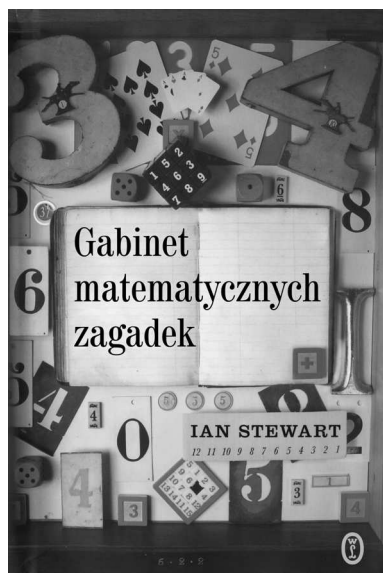


Od prawie dwustu lat, dzięki badaniom m.in. C. Wheatstone'a, A.J. Ångströma, G. Kirchhoffa i R. Bunsena, wiadomo, że światło emitowane przez dowolny obiekt (metal, gaz, gwiazdę) zawiera cechy charakterystyczne dla tego obiektu oraz jego temperatury. Metody analizy powstawania i zachowania się owej zakodowanej w świetle informacji (tj. linii emisyjnych i absorpcyjnych w widmie promieniowania, powstających z powodu nadmiaru/niedoboru fotonów emitowanych/pochłanianych przez atomy bądź cząsteczki w danej częstotliwości fali) nazywane są zbiorczo spektroskopią. Spektroskopia jest powszechnie stosowana w wielu działach chemii i fizyki, a w szczególności przez astronomów, którzy niejako z definicji dysponują ograniczonymi możliwościami badania interesujących procesów „na odległość”. Metodami spektroskopowymi odkryto np. pierwiastek hel – najpierw na Słońcu (stąd nazwa pochodząca od imienia greckiego boga Heliosa) w postaci specyficznej linii emisyjnej, a dopiero później wyodrębniono go w laboratorium na Ziemi. Korzystając z postępu technologicznego, np. teleskopu kosmicznego *Spitzer* [1], wyposażonego w spektroskop IRS do obserwacji w podczerwieni, badacze odkrywają coraz więcej zagadkowych prążków widmowych. Obserwacje najjaśniejszego na ziemskim niebie „obszaru gwiazdotwórczego”, czyli Mgławicy Oriona (M42, w marcu wieczorami dobrze widocznej na południu, w gwiazdozbiórce Oriona), wykonane *Spitzerem*, ujawniły, na przykład, mnóstwo linii pochodzenia organicznego. Ich istnienie tłumaczy się zwyczajowo obecnością w materii prostych cząsteczek wielopierścieniowych węglowodorów aromatycznych (przykładem jest naftalen, nadający charakterystyczny zapach kulkom na mole). Niestety, występowanie tych związków nie wyjaśnia wszystkich cech promieniowania mgławicy M42 – materiał organiczny odpowiedzialny za obserwowane linie jest, wszystko na to wskazuje, o wiele bardziej złożony [2]. W szczególności obserwowane widma wskazują na różnorodność skomplikowanych cząsteczek, szybkie tempo produkcji w atmosferach gwiazd mgławicy oraz podobieństwo do organicznych molekuł znajdujących w ziemskich meteorytach. To ostatnie nie powinno dziwić: meteoryty są wszak często fragmentami pierwotnej materii powstałej podczas tworzenia się Układu Słonecznego. Czyżby więc życie przybyło na Ziemię *prosto z nieba*? Wygląda na to, że kluczem do tej zagadki jest nasza najjaśniejsza gwiazda.

Michał BEJGER

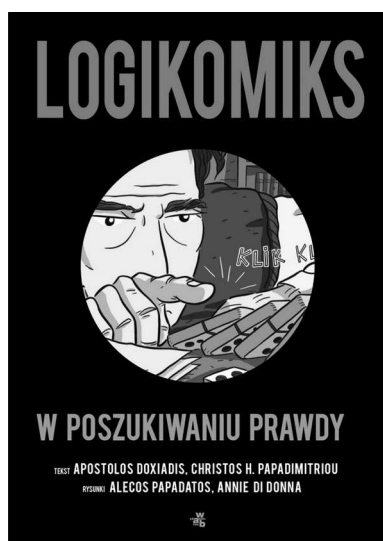
[1] <http://www.spitzer.caltech.edu>

[2] <http://www.nature.com/nature/journal/v479/n7371/full/nature10542.html>



## Gabinet matematycznych zagadek

Ian Stewart, którego czytelnikom *Delt*y przedstawiać nie trzeba, stosował w swoich książkach różne formy literackie: eseje, wykłady, listy... Tym razem wybrał formę najprostszą: zbiór wszelkiego rodzaju ciekawostek, zadań, informacji, także tytułowych zagadek (do których książka się absolutnie nie ogranicza), wszystko pod wspólnym hasłem: *Matematyka, której uczyliście się w szkole, to jeszcze nie wszystko*. Książkę można zacząć czytać w dowolnym miejscu; otwierając na chybił-trafił, można trafić na teorię węzłów przedstawioną na trzech stronach obok półstronicowego problemu skoczka szachowego, albo na niespełna 6-stronicowe przedstawienie hipotezy Poincarégo obok ćwierćstronicowej zagadki logicznej. Można też wyszukać tekścik o mrówce Langtona (jak udowodnić, że mrówka zawsze zacznie w końcu budować autostradę) lub o patentach na liczby pierwsze, można przeczytać o teorii chaosu albo dowiedzieć się (co matematykom zajęło sporo czasu), czy można usłyszeć kształt bębna. Można wreszcie zobaczyć, z czego śmieją się matematycy. I rozwiązać zadanie: jaki liczebnik oznaczający liczbę całkowitą dodatnią jest równy wartości punktów, które można za niego uzyskać w Scrabble'u?



Wydawnictwo W.A.B., 2011

## W poszukiwaniu prawdy

W pewnym mieście fryzjer goli tylko tych, którzy nie golą się sami. Kto goli fryzjera? – to pytanie jest powszechnie znane jako paradoks Russella, nazwany tak na cześć matematyka Bertranda Russella (1872–1970), który w swoim słynnym dziele *Principia Mathematica* (napisanym wspólnie z Alfredem Whiteheadem) dał podwaliny pod fundament matematyki oparty na logice.

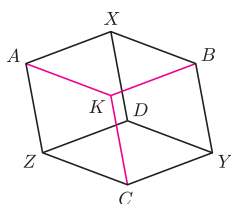
Nakładem Wydawnictwa W.A.B. ukazało się polskie tłumaczenie książki opowiadającej o jego życiu. Nie byłoby może w tym nic zaskakującego, wszak biografie sławnych uczonych nie należą do rzadkości, gdyby nie to, że wspomniana książka nosi tytuł *Logikomiks*, można zatem wnioskować, że jej strony nie są bynajmniej gęsto wypełnione drobnym drukiem, ale właśnie rysunkami, które to stanowią podstawę komiksowego medium. Za scenariusz odpowiadają Apostolos Doxiadis (matematyk, pisarz i reżyser) oraz Christos H. Papadimitriou (informatyk, światowej sławy specjalista od złożoności obliczeniowej), rysunki zaś wykonali Alecos Papadatos i Annie Di Donna.

*Logikomiks* jest historią o poszukiwaniu podstaw matematyki. Na 352 stronach (to tylko o 10 mniej niż potrzebował Russell by udowodnić w *Principiach*, że  $1 + 1 = 2$ ) mamy okazję poznać najwybitniejszych uczonych z końca XIX i pierwszej połowy XX wieku, takich jak Gottlob Frege (ojciec nowoczesnej logiki), George Cantor (twórca teorii zbiorów) czy Ludwig Wittgenstein (filozof, uczeń Russella). Mamy okazję posłuchać słynnego wykładu Davida Hilberta wygłoszonego na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Paryżu w roku 1900 na temat „Problemów matematyki” i przekonać się co miał o nim do powiedzenia jego największy rywal Henri Poincaré. Jesteśmy też świadkami przełomowego wykładu Kurta Gödla na konferencji logików Koła Wiedeńskiego, w którym przedstawił swoje twierdzenie o niezupełności. Oprócz paradoksu Russella poznajemy inne ciekawostki z matematycznego folkloru, np. koncepcję hotelu Hilberta, czy fakt, że Lewis Carroll miał dużo wspólnego nie tylko z Alicją, ale i z George’em Boole’em. Tłem historycznym dla opowieści jest epoka obfita w będące triumfem rozumu wynalazki (kinematograf, radio), lecz także w absolutnie nielogiczne działania skutkujące wybuchem dwóch wojen światowych.



Po lekturze *Logikomiksu* może się nam wydać, że wszyscy, którzy na poważnie chcą zajmować się matematyką, muszą być albo mniej lub bardziej obłąkani, albo na dobrej drodze do osiągnięcia tego stanu (zwłaszcza, że motyw naukowca o pięknym, choć nie do końca zdrowym umyśle jest dość mocno zakorzeniony w naszej kulturze). Warto jednak pamiętać, że to właśnie bohaterowie tej opowieści zbudowali fundamenty, na których w pierwszej połowie XX wieku dwaj kolejni giganci – Alan Turing i John von Neumann – oparli teorię obliczeń, dzięki której żyjemy dziś w erze komputerów.

Tomasz IDZIASZEK



### Rozwiązanie zadania M 1343.

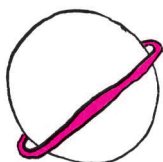
Oznaczmy środki okręgów wyznaczonych przez trójki punktów  $A, B, D$ ;  $B, C, D$ ;  $C, A, D$  odpowiednio przez  $X, Y, Z$ . Niech  $K$  będzie takim punktem, że  $AXBK$  jest rombem. Zauważmy, że czworokąt

$AXDZ, BYDX, CZDY$  są rombami o boku długości  $r$ . Wobec tego  $AX \parallel ZD \parallel CY$ , a z definicji punktu  $K$  zachodzi  $AX \parallel KB$ , więc  $CY \parallel KB$ . Ponieważ są to odcinki długości  $r$ , to także  $CYBK$  jest rombem o boku długości  $r$ . Zatem  $AK = BK = CK = r$ , czyli punkty  $A, B, C$  leżą na okręgu o środku w punkcie  $K$  i promieniu  $r$ .

## Najchłodniejszy brązowy karzeł, czyli czym się różni gwiazda od planety i czy istnieją formy pośrednie



≠



W październiku 2011 roku K.L. Luhman ze współpracownikami ogłosił potwierdzenie swoich wcześniejszych obserwacji, że ciało niebieskie WD 0806-661B (składnik układu podwójnego) jest najchłodniejszym brązowym karłem. Obiekt ten został zidentyfikowany w danych z kamery IRAC satelity *Spitzer* obserwującej na długości fali 4,5  $\mu\text{m}$ . Dalsze obserwacje prowadzone były na wniosek autorów w zakresie 3,6  $\mu\text{m}$  przez ten sam instrument. Dodatkowo wykonane zostały obserwacje teleskopami VLT (Very Large Telescope, 8,2 m) i Magellan Baade Telescope (6,5 m). Zebrane wyniki pozwoliły (przez porównanie z modelami teoretycznymi) na oszacowanie temperatury i masy obiektu.

Jak na brązowego karła WD 0806-661B jest obiektem wyjątkowo mało masywnym – ma zaledwie 6–9 mas Jowisza (6–9  $M_J$ ) – i chłodnym: jego temperatura to 300–345 K. Dla porównania, temperatura efektywna Jowisza wynosi około 124 K. Tak chłodny brązowy karzeł należy do niedawno zaproponowanego typu widmowego Y.

Brązowe karły w gruncie rzeczy nie są gwiazdami, gdyż ich masa jest zbyt mała, aby we wnętrzu mógł zachodzić pełny cykl syntezy helu (cykl pp bądź CNO), co jest cechą charakterystyczną dla gwiazd na ciągu głównym. Czym by nie były – są bardzo ważne z punktu widzenia tworzenia teoretycznych modeli powstawania gwiazd i planet, gdyż ich parametry, w szczególności masy, znajdują się pomiędzy parametrami charakterystycznymi dla gwiazd i dla planet. Nie oznacza to jednak, że łatwo jest wyznaczyć choćby ten przedział mas. Część uczonych uważa, że dolną jego granicą jest 13, natomiast górną 70–80  $M_J$ .

Ustalenie tego przedziału jest trudne niejako z założenia, brakuje bowiem jasnych, a co ważniejsze powszechnie uznanych kryteriów odróżnienia brązowego karła z jednej strony od planety, a z drugiej od gwiazdy.

Jednym z zaproponowanych znaczników jest obecność litu w atmosferze. Każda gwiazda rodzi się z pewną zawartością tego pierwiastka, który szybko zanika w trakcie ewolucji młodej gwiazdy. W skali czasowej rzędu milionów lat lit w widmie gwiazdy staje się niewidoczny. Tak więc w widmach chłodnych brązowych karłów o metaliczności podobnej do słonecznej powinniśmy obserwować linie litu. Rzeczywistość nie jest jednak tak prosta. We wnętrzu brązowych karłów o masach przekraczających około 65  $M_J$  zachodzą reakcje termojądrowe między jądrami litu a protonami, w wyniku których powstają jądra helu ( $^4\text{He}$ ). Jeśli więc brązowy karzeł jest dość masywny, to – po odpowiednio długim czasie – w jego widmie może już nie być linii litu, podobnie jak w widmach gwiazd.

Innym zaproponowanym kryterium są linie metanu, które powinny być obecne w widmach brązowych karłów. Ze względu na niedostateczną ilość obserwacji nie jest jeszcze jednak jasne, czy wszystkie tego typu obiekty mają takie linie.

Z kolei Grupa Robocza do Spraw Planet Pozasłonecznych (*Working Group on Extrasolar Planets* – WGESp) Międzynarodowej Unii Astronomicznej zaproponowała definicję mówiącą, że planetą jest obiekt

- 1° o masie mniejszej niż najniższa masa, dla której możliwa jest synteza deuteru (przyjmuje się, że jest to 13  $M_J$ ),
- 2° krążący wokół gwiazdy (bądź białego karła czy gwiazdy neutronowej)

bez względu na to, jak powstał. Zgodnie więc z tą definicją odkryty najchłodniejszy brązowy karzeł jest w istocie planetą – gazowym olbrzymem.

Istnieje jeszcze inne kryterium odróżniające brązowe karły od planet. Według niego brązowe karły w układach podwójnych powstają razem z gwiazdą macierzystą z obłoku materii międzygwiazdowej, natomiast planeta tworzy się później niż gwiazda w wyniku łączenia się mniejszych fragmentów dysku protoplanetarnego.

Dotychczas nie rozstrzygnięto, którą definicję należy uznać za najtrafniejszą, tym bardziej że za wszystkimi przemawiają mocne argumenty. Sami autorzy wspomnianego wyżej artykułu w innym, opublikowanym w tym samym 2011 roku, ogłaszającym odkrycie WD 0806-661B, stwierdzają, że nie są w stanie rozstrzygnąć, czy jest on brązowym karłem powstałym razem z gwiazdą macierzystą, czy też planetą. Debata trwa.

Agnieszka MAJCZYNA



### Rozwiązanie zadania M 1342.

Załóżmy nie wprost, że wielomian  $P$  o współczynnikach całkowitych ma cykl  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$  długości  $n > 2$ . Mamy  $x_n = P(x_{n-1}) = x_0$ . Kluczowa będzie dla nas obserwacja, że dla dowolnych liczb całkowitych  $a$  i  $b$  zachodzi

$$a - b \mid P(a) - P(b).$$

Mamy bowiem ciąg podzielności

$$\begin{aligned} (x_0 - x_1) \mid (x_1 - x_2), \\ (x_1 - x_2) \mid (x_2 - x_3), \\ \dots \\ (x_{n-1} - x_0) \mid (x_0 - x_1). \end{aligned}$$

Wynika stąd, że

$$x_{j-1} - x_j = \pm(x_j - x_{j+1})$$

dla  $j \leq n$  (przyjmujemy, że  $x_{n+1} = x_1$ ). Znak „-” jest wykluczony, gdyż liczby  $x_0, \dots, x_{n-1}$  są parami różne. Mamy więc  $x_{j-1} - x_j = x_j - x_{j+1}$ . Oznacza to, że ciąg  $(x_0, \dots, x_{n-1}, x_0)$  jest arytmetyczny. Musi on być stały, co daje sprzeczność.

## Aqua vitae?

Woda życia, tak nazywano w średniowieczu destylat otrzymywany ze sfermentowanego soku winogronowego. Wynałazek rozpowszechnił się w krajach arabskich, a do Europy przywędrował wraz z powracającymi krzyżowcami. Specyfik nazywano również „duchem wina”, stąd spirytus (z łaciny) i późniejszy alkohol (poprzez łacinę z arabskiego, pierwotnie oznaczający proszek otrzymany przez sublimację, a wtórnie destylat).

*Aqua vitae* była początkowo uważana za (i używana jako) lekarstwo. Nazwę tę można odnaleźć prawie niezmienną w językach romańskich, a w rejonach dawnego Imperium Rzymskiego, w których mówi się innymi językami, w formie tłumaczenia (np. *whisky* jest zanglicyzowaną celtycką, dokładniej, gaelicką szkocką, wodą życia).

Z kolei ten sam źródłosłów odnajdujemy w postaci zapożyczeń w językach ludów, których ziemie nie zostały nigdy przez Rzymian podbite (a więc rejonów, do których specyfik, wraz z kulturą, dotarł już w okresie, kiedy zaczęto stosować dużo większe dawki lecznicze, między innymi dzięki genialnym wynalazkom umożliwiającym produkcję tej esencji niemalże z każdej formy roślinnej). Stąd staropolska okowita czy jej skandynawskie odpowiedniki (fonetycznie: *akwawit*).

Trzeba było jednak czekać ponad tysiąc lat i doczekać się czasów, w których już nikt (?) okowity za medykament nie uważa, na dowód, że *aqua vitae* przedłuża życie i to dwukrotnie! Donosi o tym praca naukowców z UCLA [1] opublikowana 18 stycznia 2012 roku.

Tych, których zmartwiło, że informacja dotarła do nich za późno (czyli już w Wielkim Poście), spieszą uspokoić, że chodzi o okowitę mocno rozcieńczoną. Okazuje się, że wystarczy stężenie rzędu 0,05 ‰, a najwyższym przebadanym było 4 ‰, czyli odpowiadające procentowej zawartości alkoholu w dwudniowym kefirze.

W dodatku długowieczność nie dotyczy wszystkich. Na razie przebadano tylko jeden gatunek i to w dodatku w dość szczególnym okresie i warunkach życia.

Gatunek ten jest dla nauki bardzo zasłużony. Przyczynił się już do zdobycia wielu Nagród Nobla, a jego nazwa sugeruje, że w zajmowaniu się nim może być ukryte (łac. *abditum*) jeszcze wiele niespodzianek. Chodzi o najbardziej eleganckiego z błotnych nicieni, czyli o *Caenorhabditis elegans*.

W pracy [1] zawarto wyniki badania długości życia larwalnej fazy diapauzy L1 (spowolnienia rozwoju), w którą wchodzi nicienie *C. elegans*,

jeżeli pozbawi się je pożywienia po tym, jak wyklują się z jajeczek.

We wcześniejszej pracy zespół autorów publikacji [1] stwierdził wydłużenie życia tych nicieni w obecności cholesterolu, ale ponieważ użyto wtedy alkoholu etylowego jako rozpuszczalnika, więc postanowiono zbadać wpływ samego alkoholu.

Badane nicienie żyją w stanie głodu około 10 dni, a w niskoprocentowym roztworze alkoholu etylowego dwa razy dłużej, ale w tym przedłużonym żywocie również się nie rozwijają. Okazało się, że prawie cała korzyść przypisywana cholesterolowi może być wytłumaczona pozytywnym wpływem alkoholu.

Naukowcy sprawdzili również, jak długo można poczekać z podaniem „lekarstwa” (kilka dni) oraz czy inne alkohole dają podobne efekty. Okazało się, że obecność metanolu (1 ‰) nic nie daje, propanol, butanol i izobutanol dają taki sam efekt jak etanol, ale izopropanol już nie. Wynikałoby stąd, że potrzebny jest co najmniej dwuwęglowy łańcuch węglowodorowy.

Oprócz tego wykazano, że nicienie wykorzystują dostarczony alkohol. Żeby to sprawdzić, zaserwowano im zestaw deuteryzowanych alkoholi (chyba najbardziej wyszukane alkohole, jakie istnieją), które umożliwiły sprawdzenie obecności deuteru w aminokwasach, jakie odnaleziono w nicieniach po skończeniu ich (nicieni) misji.

Na koniec można się zastanowić, czy te badania bezpośrednio odnoszą się do gatunku *Homo sapiens sapiens*. Po pierwsze, stężenie alkoholu w tkankach człowieka po spożyciu *aqua vitae* zawiera się w granicach użytych w eksperymencie. Po drugie, inżynieria biochemiczna działa podobnie i w naszych organizmach, bo robak ma, co prawda, dużo mniej genów niż my, za to my mamy ponad połowę jego.

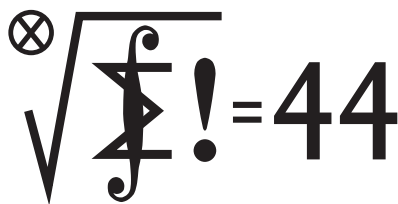
Wyciąganie stąd wniosku o dobroczynnym wpływie permanentnego podchmienia na długość naszego życia jest, na szczęście, pochopne. Badane robaki żyją co prawda dłużej, ale tylko w stanie głodu, a do tego się nie rozwijają – pozostają w stanie larwalnym. Alkohol wpływa jednak na nie w bardzo zauważalny sposób.

A człowiek przechodzi całą ewolucję jako embrion. Wiemy, że duże dawki alkoholu w tym okresie życia mają katastrofalne skutki. Okazuje się, że nawet bardzo małe stężenia mogą mieć znaczenie...

Piotr ZALEWSKI

[1] V. Castro, S. Khare, B.D. Young, S.G. Clarke, *Caenorhabditis Elegans Battling Starvation Stress: Low Levels of Ethanol Prolong Lifespan in L1 Larvae Paola*, PLoS ONE: 10.1371/journal.pone.0029984.

## Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2012

## Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

### Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru  $n$  w terminie do końca miesiąca  $n + 2$ . Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze  $n + 4$ . Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania:  $WT = 4 - 3S/N$ , gdzie  $S$  oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a  $N$  – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie [deltami.edu.pl](http://deltami.edu.pl)

### Zadania z matematyki nr 637, 638

Redaguje Marcin E. KUCZMA

**637.** Znaleźć wszystkie liczby naturalne  $n \geq 3$ , dla których zbiór  $\{1, 2, \dots, n\}$  daje się przedstawić jako suma trzech rozłącznych zbiorów o równych sumach elementów.

**638.** Liczby dodatnie  $a, b, c$  spełniają warunek  $a + b + c \geq abc$ . Udowodnić, że co najwyżej jedna z liczb

$$\frac{1}{3a} + \frac{1}{2b} + \frac{1}{c}, \quad \frac{1}{3b} + \frac{1}{2c} + \frac{1}{a}, \quad \frac{1}{3c} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{b}$$

jest mniejsza od 1.

Zadanie 638 zaproponował pan Paweł Kubit z Krakowa.

### Rozwiązania zadań z numeru 11/2011

Przypominamy treść zadań:

**629.** Niech  $n$  będzie liczbą naturalną większą od 2. Dowieść, że ze zbioru  $\{1, 2, \dots, n\}$  można usunąć dwie liczby tak, by suma liczb, które pozostały, była kwadratem liczby naturalnej.

**630.** W trójkącie ostrokątnym o bokach długości  $a, b, c$  środkowa poprowadzona do boku  $c$  ma długość  $d$ . Wykazać, że dla każdej liczby dodatniej  $p < 2$  zachodzi nierówność

$$a^p + b^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p + \left(d - \frac{c}{2}\right)^p.$$

**629.** Suma wszystkich liczb w zbiorze  $\{1, 2, \dots, n\}$  wynosi  $S = n(n + 1)/2$ . Suma dwóch liczb z tego zbioru może być dowolną liczbą naturalną od 3 do  $2n - 1$ .

Usuwanie dwie – suma liczb, które pozostały, może być dowolną liczbą naturalną od  $S - 2n + 1$  do  $S - 3$ . Wystarczy wykazać, że w przedziale  $\langle S - 2n + 1; S - 3 \rangle$  znajduje się jakiś kwadrat liczby naturalnej.

Niech  $m$  będzie największą liczbą naturalną, której kwadrat nie przekracza  $S - 3$ . Wówczas  $(m + 1)^2 > S - 3$ , skąd  $m^2 + 2m \geq S - 3$ , czyli  $m^2 \geq S - 3 - 2m$ . Wystarczy wykazać, że prawa strona ostatniej nierówności jest nie mniejsza niż  $S - 2n + 1$ ; czyli że zachodzi nierówność  $m \leq n - 2$ .

Dla  $n = 3, 4, 5, 6$  różnica  $S - 3$  wynosi kolejno 3, 7, 12, 18, co daje wartości  $m = 1, 2, 3, 4$ ; mamy równość  $m = n - 2$ .

Dla  $n \geq 7$  szacujemy kwadrat liczby  $m$ :

$$\begin{aligned} m^2 &\leq S - 3 = \frac{n^2 + n}{2} - 3 = \\ &= (n - 2)^2 - \frac{(n - 2)(n - 7)}{2} \leq (n - 2)^2 \end{aligned}$$

i dostajemy nierówność  $m \leq n - 2$ , którą chcieliśmy wykazać.

**630.** Przyjmijmy, że  $a \leq b$  i oznaczmy przez  $\delta$  miarę kąta ostrego (lub prostego), jaki zadana środkowa tworzy z prostą, zawierającą bok  $c$ . Jest to kąt wewnętrzny w trójkącie o bokach długości  $a, c/2, d$ , przeciwległy bokowi  $a$ . Ze wzoru kosinusów:

$$a^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} - cd \cos \delta, \quad b^2 = d^2 + \frac{c^2}{4} + cd \cos \delta.$$

Przepiszmy te związki w postaci

$$a^2 - \left(d - \frac{c}{2}\right)^2 = cd(1 - \cos \delta) = \left(d + \frac{c}{2}\right)^2 - b^2.$$

Wiadomo, że jeśli  $F$  jest funkcją ściśle wklęsłą (w pewnym przedziale) i jeśli  $k$  jest stałą dodatnią, to funkcja  $G(x) = F(x + k) - F(x)$  jest ściśle malejąca. Zastosujmy tę własność do funkcji  $F(x) = x^{p/2}$  (ściśle wklęsłej w przedziale  $(0; \infty)$ , skoro  $0 < p < 2$ ) oraz do stałej dodatniej  $k = cd(1 - \cos \delta)$ . Tworzymy funkcję malejącą  $G(x) = (x + k)^{p/2} - x^{p/2}$ .

Zauważmy, że  $(d - c/2)^2 < b^2$  (równoważnie:  $|d - c/2| < b$ ; jest to nierówność dla boków jednego z trójkątów, na które środkowa dzieli trójkąt wyjściowy). Zatem

$$G\left(\left(d - \frac{c}{2}\right)^2\right) > G(b^2),$$

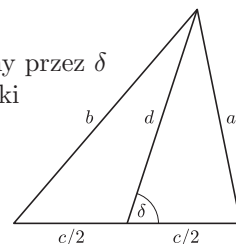
czyli

$$\left(\left(d - \frac{c}{2}\right)^2 + k\right)^{p/2} - \left(d - \frac{c}{2}\right)^{p/2} > (b^2 + k)^{p/2} - b^{p/2}.$$

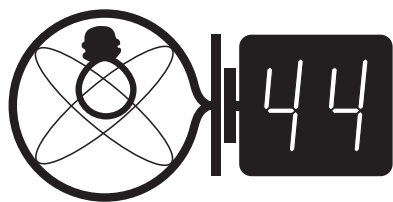
Pamiętamy jednak, że  $(d - c/2)^2 + k = a^2$ ,  $b^2 + k = (d + c/2)^2$ . Otrzymujemy nierówność

$$a^p - \left(d - \frac{c}{2}\right)^p > \left(d + \frac{c}{2}\right)^p - b^p$$

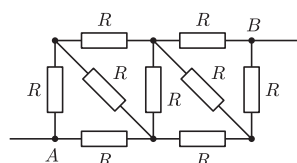
– czyli tezę zadania.



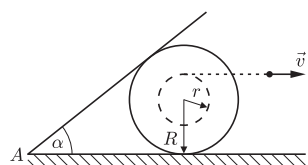
Redaguje Ewa CZUCHRY



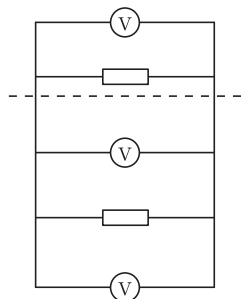
Termin nadsyłania rozwiązań: 31 V 2012



Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3

**526.** Oznaczmy siłę elektromotoryczną indukcji w każdym oczku jako  $\mathcal{E}$  i przyjmijmy, że ma ona zwrot prawoskrętny – oczywiście wtedy prąd płynie przez oba oporniki prawoskrętnie. Napięcia na woltmeterach ( $U_1$ ,  $U_2$  i  $U_3$ ) niech będą dodatnie, gdy plus jest po prawej stronie. Dla kolejnych oczek obowiązują równania

$$0 = -U_1 - IR, \quad \mathcal{E} = U_2 + IR, \quad \mathcal{E} = -U_2 + IR, \quad \mathcal{E} = U_3 - IR.$$

Widzimy, że  $U_2 = 0$ ,  $U_1 = -\frac{1}{2}U_3 = -0,5 V$ .

**527.** Oznaczmy symbolami  $n_0$  i  $n_1$  początkową liczbę moli powietrza w naczyniu oraz liczbę moli w chwili osiągnięcia temperatury  $T_1$ . Z równania adiabaty w zmiennych  $p$ - $T$

$$pT^{\gamma/(1-\gamma)} = \text{const},$$

gdzie  $\gamma = C_p/C_V = 1,4$ , po przekształceniach znajdujemy  $n_1$ :

$$n_1 = n_0 \left( \frac{T_1}{T_0} \right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Wyznamy teraz pracę pompy próżniowej przy odpompowaniu niewielkiej ilości powietrza  $dn$ , przy założeniu, że ciśnienie w naczyniu pozostaje w przybliżeniu stałe i równe  $p$ . Jeśli objętość cylindra pompy jest równa  $V_c$  (zgodnie z podanym założeniem  $V_c$  jest znacznie mniejsze od objętości naczynia), to wejdzie do niego  $dn = pV_c/RT_0$

moli powietrza, a praca przeciw sile parcia z zewnątrz wyniesie  $W_1 = (p_0 - p)V_c$ . Sprężanie powietrza w cylindrze zachodzi izotermicznie, zatem praca

$$W_2 = \int_{V_c} (p_0 - p') dV = \int_{V_c} \left( p_0 - \frac{pV_c}{V} \right) dV,$$

gdzie dolna granica całki odpowiada zerowaniu się wyrażenia podcałkowego. Praca całkowita jest różnicą  $W_1 - W_2$  i okazuje się równa

$$dW = W_1 - W_2 = RT_0 \ln(p_0/p) \cdot dn.$$

Podczas odpompowania adiabatycznego ciśnienie  $p$  zależy od liczby moli  $n$  pozostałej w naczyniu wg równania  $p = p_0(n/n_0)^\gamma$  i w wyniku całkowania otrzymujemy

$$W_{\text{ad}} = RT_0 \int_{n_1}^{n_0} \ln \left( \frac{p_0}{p} \right) dn = RT_0 \gamma \left( n_0 - n_1 \left( 1 + \frac{1}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) \right) \right).$$

Dla odpompowania izotermicznego zależność  $p(n)$  ma postać  $p = n \cdot p_0 T_1 / n_0 T_0$  i całkowanie daje wynik

$$W_{\text{izot}} = RT_0 n_1 \left( 1 + \frac{\gamma}{\gamma-1} \ln \left( \frac{T_0}{T_1} \right) \right).$$

Pozostaje obliczenie ciepła pobranego podczas odpompowania izotermicznego. W „zwykłej” przemianie

**534.** Jaki jest opór między punktami A i B układu pokazanego na rysunku 1?

**535.** Szpulka nici toczy się bez poślizgu po poziomej powierzchni. Prędkość końca nitki jest skierowana poziomo i ma wartość  $v_0$ , wewnętrzny i zewnętrzny promień szpulki to  $r$  i  $R$  odpowiednio. Na szpulce opiera się deseczka zaczepiona zawiasem w punkcie A (rys. 2). Znaleźć prędkość kątową  $\omega$  deseczki w zależności od kąta  $\alpha$ .

*Jak widać, Jerzy B. Brojan, po ponad 21 latach sterowania nawą Ligi Fizycznej, przekazuje dowództwo Ewie Czuchry. W imieniu redakcji składam dotychczasowemu Redaktorowi serdeczne podziękowania i jednocześnie zapewniam, iż dołożymy wszelkich starań, by Liga utrzymała swą dotychczasową rangę.*

Marek Kordos

### Rozwiązania zadań z numeru 11/2011

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

**526.** Poniżej linii przerywanej (p. rys. 3) występuje jednorodne, prostopadłe do płaszczyzny rysunku i zmienne w czasie pole magnetyczne, a powyżej tej linii pola nie ma ( $B = 0$ ). Oporności oporników są jednakowe, jednakowe są także trzy pola powierzchni objęte oczkami obwodu: między linią przerywaną a środkowym woltmeterem, między środkowym woltmeterem a dolnym opornikiem oraz między dolnym opornikiem a dolnym woltmeterem. Jeśli dolny woltmeter wskazuje 1 V, to jakie jest wskazanie pozostałych woltmeterzy?

**527.** Lodówka pobiera ciepło od ciała A o temperaturze  $T_1 = -5^\circ\text{C}$  i oddaje ciepło otoczeniu o temperaturze  $T_0 = 20^\circ\text{C}$ , działając na następującej zasadzie. Naczynie o stałej objętości początkowo zawiera powietrze atmosferyczne o temperaturze  $T_0$  i ciśnieniu  $p_0 = 10^5 \text{ Pa}$ , następnie przy zachowaniu doskonałej izolacji termicznej pompa próżniowa obniża ciśnienie w naczyniu do osiągnięcia temperatury  $T_1$ . Dalej odpompowuje się powietrze aż do stanu bliskiego próżni, przy czym temperatura pozostaje równa  $T_1$  wskutek pobierania ciepła od A. Następnie naczynie jest ponownie napełniane powietrzem atmosferycznym i cykl się powtarza. Ile wynosi minimalna wartość pracy pompy niezbędnej do odprowadzenia 1 J ciepła od A?

Pompa zawiera niewielki cylinder pozostający stale w temperaturze  $T_0$  i tłok. Otwarcie zaworu łączącego cylinder z naczyniem następuje w chwili dojścia tłoka „do końca” (objętość cylindra równa zero), po osiągnięciu przez tłok położenia przeciwnego następuje zamknięcie tego zaworu, a po cofnięciu tłoka do położenia, w którym powietrze pobrane z naczynia zostanie sprężone do ciśnienia  $p_0$ , następuje otwarcie zaworu umożliwiającego odprowadzenie na zewnątrz sprężonej partii gazu. Ten zawór zostaje zamknięty tuż przed otwarciem pierwszego. Na każdy cykl przemian w naczyniu próżniowym przypada wiele cykli pracy pompy. Powietrze należy uważać za gaz doskonały o ciepłe molowym  $C_V$  równym  $(5/2)R$ .



izotermicznej (tzn. gdy  $n = \text{const}$ ,  $V$  jest zmienną) ciepło to jest równe

$$dQ = -dW = p dV.$$

Tutaj zamiast zmiany objętości należy wprowadzić zmianę liczby moli  $dn$ , która jest równoważna  $dV$ , o ile  $dV/V = -dn/n$ . Dlatego  $dQ = -RT_1 dn$ , a jeśli stanem końcowym jest próżnia, to  $Q = RT_1 n_1$ . Szukany iloraz

$$\eta = \frac{W_{\text{ad}} + W_{\text{izot}}}{Q} = \frac{T_0(\gamma n_0 - \gamma n_1 + n_1)}{T_1 n_1}$$

dla danych  $T_0$ ,  $T_1$  i  $\gamma$  przyjmuje wartość 1,48, co można porównać z

$$\frac{T_0}{T_1} - 1 = 0,093$$

dla cyklu Carnota. Głównym powodem tej dużej rozbieżności jest nieodwracalność wpuszczenia powietrza atmosferycznego do opróżnionego naczynia – gdyby wykorzystać pracę ciśnienia atmosferycznego w tej fazie (odjąć ją od  $W_{\text{ad}} + W_{\text{izot}}$ ), to wartość  $\eta$  zmalałaby do 0,109.

## Marzec

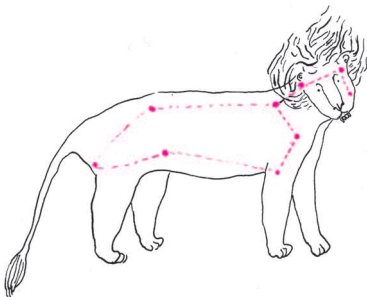
Marcowe noce są jeszcze dosyć długie, a że już coraz cieplejsze, zachęcają do obserwacji. Nisko, nad południowo-zachodnim horyzontem, na pograniczu Barana, Wieloryba i Ryb, wschodzić będzie Jowisz ( $-2,2$  mag). Choć możemy podziwiać go przez cały miesiąc, to jednak z każdym dniem będzie zachodził coraz wcześniej, w pierwszej połowie nocy. Podobnie też wyjątkowo jasną Wenus ( $-4,2$  mag), pojawiającą się w Rybach nad zachodnim horyzontem, obserwować można będzie przez cały miesiąc, ale jedynie wieczorem. Tuż po zachodzie Słońca, na wschodzie, w gwiazdozbiornie Lwa, ujrzymy Marsa ( $-1,2$  mag) – do końca miesiąca widoczny on będzie przez całą noc. Późnym wieczorem w Pannie wschodzi nieco ciemniejszy Saturn ( $+0,4$  mag).

Neptun, podobnie jak Merkury i Uran, pojawia się nad horyzontem w blasku wschodzącego Słońca. Najwcześniej wschodzi Uran, ale ze względu na swą niewielką jasność ( $+5,9$  mag) i wschodzące Słońce raczej nie będzie się nadawał do obserwacji.

W marcowe noce warto spojrzeć na gwiazdozbiór Lwa. Łatwo go odnaleźć, bowiem leży tuż pod górującą niemal w zenicie Wielką Niedźwiedzicą. Jest to dosyć rozległa i bogata w gwiazdy konstelacja – przy dobrej pogodzie nawet nieuzbrojonym okiem możemy dostrzec 70 gwiazd. Najjaśniejszą gwiazdą i sercem Lwa jest Regulus ( $\alpha$  Leo). Nazwę tę, oznaczającą „Małego Króla”, nadał mu Mikołaj Kopernik. Z jasnością  $+1,35$  mag jest Regulus jedną z najjaśniejszych gwiazd naszego nieba, ale nie to czyni go ciekawym obiektem. Już za pomocą niewielkiej lornetki dostrzeżemy, że jest to gwiazda podwójna. Składnik główny jest karłem typu widmowego B7 i jasności 150 razy większej niż Słońce. Natomiast składnik wtórny w niewielkim teleskopie sam okazuje się układem dwóch karłów (Regulus B i C) o typach widmowych K2 i M4 oraz jasnościach, odpowiednio,  $+8,1$  mag i  $+13,5$  mag. Separacja tych składników wynosi 100 jednostek astronomicznych, a okres orbitalny 2000 lat. Układ Regulus B i C jest oddalony od składnika A o 4200 jednostek astronomicznych. Zupełnie niedawno, bo w 2008 roku, odkryto, że Regulus A ma jeszcze jednego, słabego towarzysza. Jest nim biały karzeł o masie około  $0,3 M_{\odot}$ , obiegający składnik główny z okresem 40,11 dnia w odległości prawdopodobnie 0,35 jednostki astronomicznej. Układ ten (Regulus A i biały karzeł) jest szczególnie ciekawy ze względu na większą gwiazdę. Regulus A, przy promieniu kilka razy większym niż promień Słońca, obraca się wokół swojej osi z okresem 15,9 godziny. Dla porównania okres rotacji Słońca wynosi, w zależności od szerokości heliograficznej, od 25 dni na równiku do 31 dni na biegunach. Prędkość rotacji Regulusa A jest bliska wartości, przy której siła odśrodkowa staje się większa niż grawitacja i gwiazda może ulec zniszczeniu. Przy tak krótkim okresie obrotu gwiazda jest mocno spłaszczona, promień biegunowy wynosi 3,15 promienia Słońca ( $3,15 R_{\odot}$ ), równikowy zaś aż  $4,16 R_{\odot}$ . Nie jest jasne, czy orbita białego karła, krążącego wokół tak zdeformowanej gwiazdy, jest stabilna, a zatem jaka będzie przyszłość tego skomplikowanego układu.

Pełnia Księżyca przypada 8 III, a nów 22 III. Wiosna rozpoczyna się 20 III. W marcu można będzie obserwować szereg koniunkcji: 13 III Antaresa z Księżycem (kiedy to odległość między nimi wynosić będzie  $4^{\circ}44'$ ), 14 III Wenus i Jowisza ( $3^{\circ}01'$ ), 25 III Księżyca i Jowisza ( $3^{\circ}01'$ ) oraz 26 III Księżyca i Wenus ( $1^{\circ}50'$ ). Tylko trzy roje meteorów o średniej aktywności będą miały swoje maksima w marcu: 13 III Gamma Normidy, z przewidywanymi 8 zjawiskami na godzinę, Virginidy (obecnie Antyhelion), kilka maksimów w okresie od 15 III do 15 IV z 5 zjawiskami na godzinę, oraz 30 III Delta Pavidy, również z 5 zjawiskami na godzinę. Zatem czystego nieba!

Agnieszka MAJCZYNA



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 522 ( $WT = 2,10$ ) i 523 ( $WT = 2,00$ ) z numeru 9/2011

Tomasz Wietecha	Tarnów	45,71
Jacek Piotrowski	Rzeszów	38,72
Michał Koźlik	Gliwice	30,22

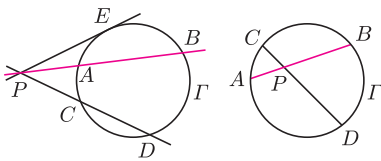
Ósmy raz przebiegł Pan Tomasz metę 44 punktów w Klubie 44 F!



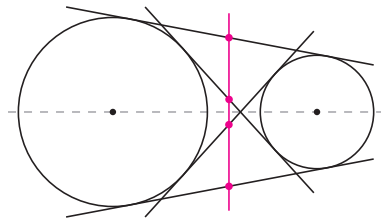
### Rozwiązanie zadania M 1344.

Dla każdej pary uczniów popatrzmy na zbiór zadań, których żaden z dwójki nie rozwiązał. Tych zbiorów jest  $\binom{100}{2}$ . Chcemy pokazać, że przynajmniej jeden z nich jest pusty. Zauważmy, że dla każdego zadania istnieje co najwyżej 44 uczniowie, którzy go nie rozwiązyali. Zatem każde zadanie należy do co najwyżej  $\binom{44}{2}$  spośród naszych zbiorów. Niepustych zbiorów jest więc co najwyżej  $5 \cdot \binom{44}{2} = 4730 < 4950 = \binom{100}{2}$ . Zatem istnieje para uczniów, dla której zbiór zadań, których żaden z uczniów z pary nie rozwiązał, jest pusty.

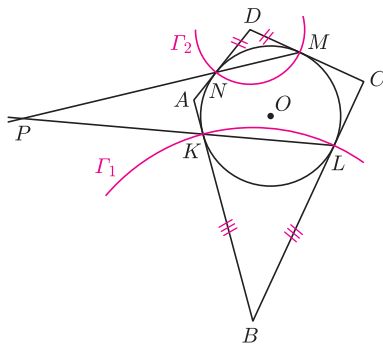
Prosta przechodząca przez punkt  $P$  przecina okrąg  $\Gamma$  w punktach  $A$  i  $B$ . Dla  $P$  na zewnątrz  $\Gamma$



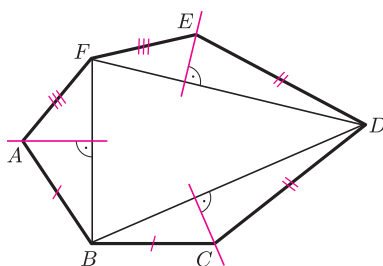
potęga punktu  $P$  względem okręgu  $\Gamma$  to  $\text{Pot}(P, \Gamma) = PA \cdot PB = PC \cdot PD = PE^2$ .  
Gdy  $P$  znajduje się wewnątrz  $\Gamma$ , to  $\text{Pot}(P, \Gamma) = -PA \cdot PB = -PC \cdot PD$ .  
Gdy  $P$  leży na  $\Gamma$ , to  $\text{Pot}(P, \Gamma) = 0$ .



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

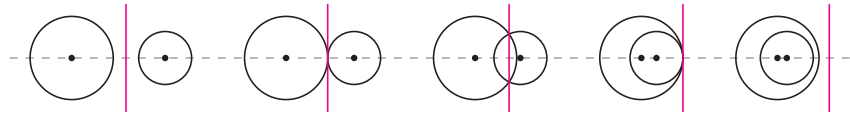
Zadanie 4 pochodzi z XLVI Olimpiady Matematycznej, a zadanie 7 – z II OM. Dowód twierdzenia 1 można znaleźć np. w *Delcie* 8/2009 (zad. M 1251).

## Osie potęgowe

Joanna JASZUŃSKA

Pojęcie potęgi punktu z poprzedniego *deltoidea* (przypomniane na marginesie) prowadzi do poniższych trudniejszych twierdzeń o ciekawych zastosowaniach.

**Twierdzenie 1.** Dla niewspółśrodkowych okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  zbiór punktów  $P$ , takich że  $\text{Pot}(P, \Gamma_1) = \text{Pot}(P, \Gamma_2)$ , jest prostą, zwaną *osią potęgową*  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  (rys. 1).



Rys. 1. Przykłady osi potęgowych. Oś potęgowa jest prostopadła do prostej łączącej środki.

**1.** Dane są dwa okręgi rozłączne zewnętrznie. Dla każdej z ich wspólnych stycznych rozważmy środek odcinka pomiędzy punktami styczności (rys. 2). Wykaż, że punkty te są współliniowe.

**2.** Okrąg o środku  $O$ , wpisany w czworokąt  $ABCD$ , jest styczny do boków  $AB, BC, CD, DA$  odpowiednio w punktach  $K, L, M, N$ . Proste  $KL$  i  $MN$  przecinają się w punkcie  $P$ . Wykaż, że proste  $OP$  i  $BD$  są prostopadłe.

**Twierdzenie 2.** Jeśli środki okręgów  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$  są parami różne, to osie potęgowe par okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$  oraz  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_3$  są równoległe (gdy środki tych okręgów są współliniowe) lub przecinają się w jednym punkcie (w przeciwnym przypadku).

**Dowód.** Jeśli środki okręgów leżą na jednej prostej, to osie potęgowe są prostopadłe do niej. W przeciwnym przypadku żadne dwie osie nie są równoległe; niech  $P$  będzie punktem przecięcia osi  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  z osią  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$ . Wtedy  $\text{Pot}(P, \Gamma_1) = \text{Pot}(P, \Gamma_2) = \text{Pot}(P, \Gamma_3)$ , więc  $P$  leży też na osi potęgowej okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_3$ .  $\square$

**3.** Dane są trzy okręgi o niewspółliniowych środkach; każda para okręgów się przecina. Wykaż, że proste zawierające ich wspólne cięciwy przecinają się w jednym punkcie.

**4.** Sześciokąt  $ABCDEF$  jest wypukły oraz  $AB = BC, CD = DE, EF = FA$ . Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów  $BCD, DEF, FAB$ , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków  $C, E, A$ , przecinają się w jednym punkcie.

**5.** Wewnątrz wielokąta wypukłego leży skończenie wiele parami rozłącznych okręgów. Wykaż, że można ten wielokąt podzielić na wielokąty wypukłe, z których każdy zawiera dokładnie jeden okrąg.

### Rozwiązania

**R1.** Środek  $P$  odcinka pomiędzy punktami styczności  $E$  i  $F$  ma jednakową potęgę  $PE^2 = PF^2$  względem każdego z okręgów, więc leży na ich osi potęgowej.  $\square$

**R2.** Niech  $\Gamma_1 = \mathcal{O}(B, BK)$  oraz  $\Gamma_2 = \mathcal{O}(D, DM)$  (rys. 3). Prosta  $OK$  jest styczna do  $\Gamma_1$ , bo  $OK \perp BK$ . Stąd  $\text{Pot}(O, \Gamma_1) = OK^2 = OM^2 = \text{Pot}(O, \Gamma_2)$ , więc  $O$  leży na osi potęgowej  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Ponadto  $\text{Pot}(P, \Gamma_1) = PK \cdot PL = \text{Pot}(P, \mathcal{O}(O, OK)) = PN \cdot PM = \text{Pot}(P, \Gamma_2)$ , więc  $P$  także leży na osi potęgowej  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ . Oś potęgowa  $OP$  okręgów  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$  jest prostopadła do prostej  $BD$  łączącej ich środki.  $\square$

**R3.** Proste te są osiami potęgowymi, więc teza wynika z twierdzenia 2.  $\square$

**R4.** Niech  $\Gamma_1 = \mathcal{O}(B, BC)$ ,  $\Gamma_2 = \mathcal{O}(D, DE)$  oraz  $\Gamma_3 = \mathcal{O}(F, FA)$  (rys. 4). Punkt  $C$  należy do  $\Gamma_1$  i  $\Gamma_2$ , więc osią potęgową tych okręgów jest rozważana w zadaniu prosta przechodząca przez  $C$  i prostopadła do prostej  $BD$  łączącej ich środki. Pozostałe rozważane proste są osiami potęgowymi okręgów  $\Gamma_2$  i  $\Gamma_3$  oraz  $\Gamma_3$  i  $\Gamma_1$ . Środki  $B, D, F$  okręgów nie są współliniowe, więc osie potęgowe przecinają się w jednym punkcie.  $\square$

**Wskazówka 5.** Do części  $W_\Gamma$ , zawierającej okrąg  $\Gamma$ , niech należą punkty, których potęga względem  $\Gamma$  jest mniejsza niż względem innych okręgów. Granice między częściami wyznaczają wtedy osie potęgowe (dlaczego?)...

### Zadania domowe

**6.** Różne okręgi  $\Gamma_1, \Gamma_2$  są współśrodkowe. Wykaż, że nie istnieje taki punkt  $P$ , że  $\text{Pot}(P, \Gamma_1) = \text{Pot}(P, \Gamma_2)$ .

**7.** Dany jest okrąg  $\Gamma$  oraz punkty  $A, B$  leżące w nierównych odległościach od środka tego okręgu. Udowodnij, że wspólne cięciwy okręgu  $\Gamma$  z okręgami przechodzącymi przez punkty  $A$  i  $B$  leżą na prostych mających jeden punkt wspólny.