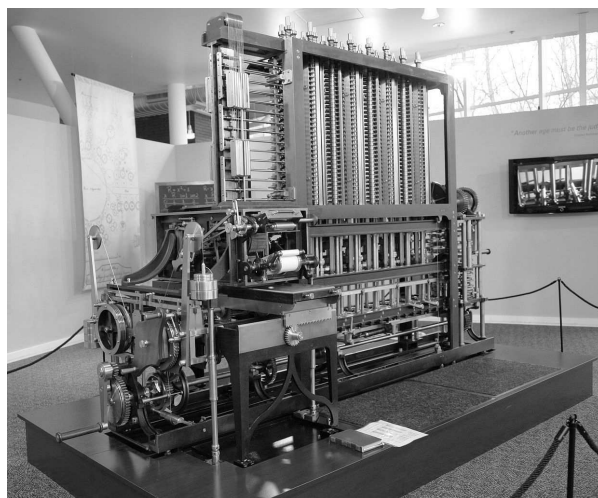


W następnym numerze odwiedzimy Dolinę Krzemową.




Fot. Jitze Couperus. Zdjęcie udostępnione na licencji Creative Commons Attribution 2.0 Generic.

SPIS TREŚCI NUMERU 6 (457)


Dni Matematyki
w Białymstoku i okolicach
Zbigniew Bartosiewicz str. 1

 Zadania str. 3

Kilka zadań, o których...
Krzysztof Ciesielski str. 4

 Pasażerowie na gapę
Magdalena Fikus str. 5

W rozumowaniach był błąd
Marek Kordos str. 6

 Lekcja rysunku (1)
Zdzisław Pogoda str. 8


Jak mierzyć odległości
na nieboskłonie, gdy brakuje
odpowiedniego sprzętu?
Aktualności str.10

Podsumowania Olimpiad str.11

Informatyczny kącik olimpijski
(52): Robot sortujący
Jakub Radoszewski str.15

Wyznaczanie wysokości wzgórz
na powierzchni Księżyca
Andrzej Branicki str.16


Test na liczbę pierwszą
Wojciech Czerwiński str.18

 VII Olimpiada
Matematyczna
Gimnazjalistów
Waldemar Pompe str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Polaris
Michał Bejger str.24

Niebo jak własna kieszeń:
Czerwiec str.24

 Punkt w trójkącie
Joanna Jaszewska str.25

Niemal dwieście lat temu Charles Babbage rozpoczął pracę nad maszyną różnicową – pierwszym urządzeniem, które można nazwać komputerem. Na powyższym zdjęciu widzimy jedną z dwóch istniejących maszyn (zbudowanych wiele lat po śmierci Babbage'a) na wystawie w muzeum historii komputerów w Mountain View, w Dolinie Krzemowej. To właśnie tam w latach 50. XX wieku rozpoczęła się rewolucja, dzięki której współczesne „maszyny liczące” konstruowane są z półprzewodników, a nie z brązu i stali.

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Ewa Czuchry, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. naczej, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Urszula Swianiewicz, Krzysztof Turzyński – z-ca red. naczej, Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delta*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Warunki prenumeraty w RUCH-u:

Cena prenumeraty w 2012 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

1. **Prenumerata krajowa:** Zamówienia na prenumeratę przyjmują Zespoły Prenumeraty właściwe dla miejsca zamieszkania klienta do 5. dnia każdego miesiąca poprzedzającego okres rozpoczęcia prenumeraty; www.prenumerata.ruch.com.pl

2. **Prenumerata ze zleceniem wysyłki za granicę:** Informacji o warunkach prenumeraty i sposobie zamawiania udziela RUCH S.A. Biuro Kolportażu – Zespół Obrotu Zagranicznego, 03-236 Warszawa, ul. Annopol 17a. Tel. 48 22 532 88 23, 532 88 16; www.ruch.pol.pl

3. **Prenumerata opłacana za granicą:** przelewem na nasze konto:

SWIFT banku: PKOPPLPWXXX;

w USD: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL54 1240 1053 1787 0000 0443 0508;

w EUR: PEKAO SA IV O/W-wa IBAN PL46 1240 1053 1978 0000 0443 0511;

kserokopię polecenia przelewu z podaniem adresu i tytułu prosimy przesłać faksem pod numer +48-22-53-28-731. Płatność kartą kredytową – jak w p. 2.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

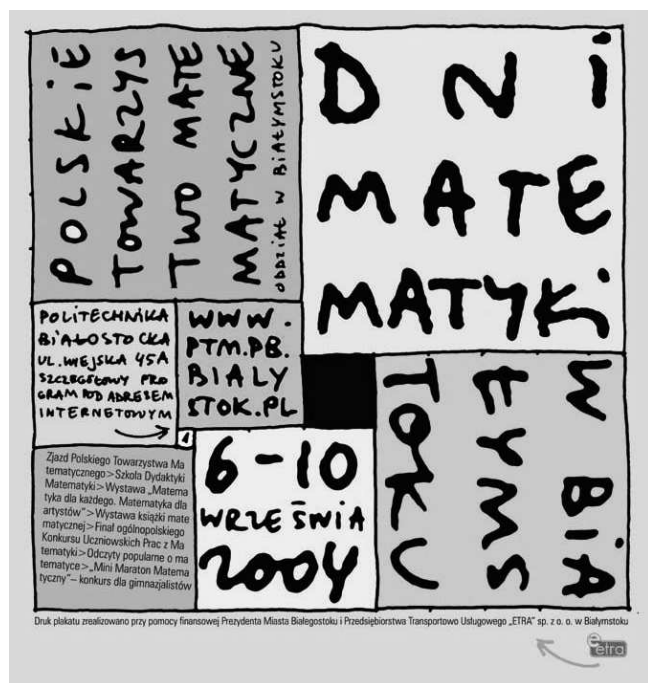
Cena 1 egzemplarza 4 zł

Dni Matematyki w Białymstoku i okolicach

*Oddział Białostocki PTM, „Signum”,
Politechnika Białostocka

Zbigniew BARTOSIEWICZ*

Od roku 2004, zwykle co dwa lata, Oddział Białostocki Polskiego Towarzystwa Matematycznego organizuje Dni Matematyki w Białymstoku. Ostatnie Dni, w roku 2011, nazywały się Podlaskie, bo kilka imprez wyszło poza Białystok.



W roku 2004 Dni Matematyki towarzyszyły Zjazdowi Polskiego Towarzystwa Matematycznego w Białymstoku. Z czasem okazało się jednak, że to Zjazd był częścią Dni Matematyki, co zostało uwiecznione na plakacie anonsującym te wielkie wydarzenia. Śmiała koncepcja plakatu na początku mało komu się podobała, ale szybko dopisano mu modny przymiotnik „kultowy” i jego kolejne reaktywacje zdobyły Dni Matematyki w latach 2007, 2009 i 2011.

Zarówno pierwsze, jak i kolejne Dni Matematyki miały za cel promowanie i popularyzację matematyki. Adresowane były do całej społeczności Białegostoku, a potem Podlasia, lecz główny cel stanowili młodzi ludzie ze szkół, zwłaszcza ponadgimnazjalnych. W roku 2004 oprócz tradycyjnych imprez okołozjazdowych, jak finał Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki, pojawił się specjal lokalny – wystawa

Matematyka dla każdego. Matematyka dla artystów, przygotowana przez grupę osób z Katedry Matematyki Politechniki Białostockiej pod kierunkiem dr. Ryszarda Janiszewskiego. Znaczna część eksponatów została wykonana przez studentów architektury, bardziej artystów niż inżynierów, stąd hasło „artyści” w tytule wystawy.

Ponieważ były to jeszcze czasy „przedkopernikańskie”, gdy matematykę i inne mądre nauki podawano raczej *ex cathedra*, a nie bawiono się nimi w centrach nauki, „dotykalskość” wystawy robiła duże wrażenie. Pamiętam dziennikarkę z lokalnej telewizji, którą trzeba było prawie siłą zaciągnąć na wystawę i którą potem trzeba było siłą z niej wyrzucać. Wystawa stała się znana w Polsce, bo przewinęła się przez nią większość uczestników Zjazdu. Była potem prezentowana we Wrocławiu w czasie Festiwalu Nauki.

Warto też wspomnieć o pokazywanym na wystawie „prawdziwym” dywanie Sierpińskiego, wykonanym przez białostocką Fabrykę Dywanów Agnella. Dywan początkowo miał leżeć na podłodze, ale ostatecznie zawisł na stelażu, dzięki czemu nadal świetnie się prezentuje.

Kolejne Dni Matematyki w Białymstoku przynosiły nowe pomysły promowania matematyki. Rok 2007 zapoczątkował wychodzenie z matematyką na miasto. Najpierw był Happening Matematyczny na białostockich Plantach. Zachęcaliśmy spacerujących do rozcinania wstęgi Möbiusa, zagrania w samotnika, narysowania fraktala na chodniku. Zanurzając kształtki z drutu w misce z mydlinami, można było wyprodukować powierzchnię minimalną.





Dwa lata później na Rynku Miejskim odbył się Piknik Matematyczny. Członków Oddziału Białostockiego PTM wsparli goście z Aveiro w Portugalii oraz z Wałbrzycha. Pojawiły się nowe zabawki: mosty królewieckie, układanki, stanowiska do rysowania krzywych stożkowych. Można było wziąć udział w loterii fantowej. Młodzież brała udział w konkursie matematycznym przygotowanym przez mgr Katarzynę Kowejszę. Niestety, pogoda nie sprzyjała matematyce na świeżym powietrzu. Namioty, które chroniły nas przed deszczem, mało nie zostały porwane przez wiatr. W roku 2011 schroniliśmy się więc w Galerii Handlowej „Alfa”, prezentując Kiermasz Matematyczny, kontynuowany następnego dnia na Politechnice Białostockiej. Natomiast Piknik Matematyczny na świeżym powietrzu został przeniesiony do Michałowa, gdzie wzbogacił obchody Dnia Dziecka. Wyjścia na miasto organizowała dr Dorota Mozyrska.

Z wyjściem, czy raczej wyjazdem na miasto, wiąże się inna impreza wymyślona i przeprowadzona przez dr. Rajmunda Stasiewicza: *Autobusowe łamanie główki*. Przez dwa tygodnie w białostockich autobusach wisiały proste zadania matematyczne i łamigłówki logiczne. Nie wymagały znajomości wielkiej matematyki i zwykle można je było rozwiązać w głowie, bez skomplikowanych rachunków. Odpowiedzi można było znaleźć na stronie internetowej Dni Matematyki.

Jedną z bardziej spektakularnych imprez był Konkurs Matematyczny dla VIP-ów przeprowadzony w roku 2007 przez dr Marzenę Filipowicz-Chomko i dr Ewę Girejko. Notalnie niezbyt garnęli się do konkursu, wielu odmówiło, niektórzy prominenci wysłali podwładnych – VIP-ów niższej rangi, jeden nie dojechał. Ale stawili się: rektor Politechniki, wicekurator oświaty, komendant policji i rektor seminarium duchownego. Konkurenci walczyli w pięciu dyscyplinach matematycznych: matematyce cięcia papieru, matematyce zegara, matematyce uwalniania, matematyce dodawania i matematyce działki. Ekspertsi komentowali poszczególne zadania stawiane uczestnikom konkursu, wydobywając ukryte przed postronnymi głębokie treści matematyczne. Walka była wyrównana, nic więc dziwnego, że wszyscy zajęli wspólnie pierwsze miejsce.

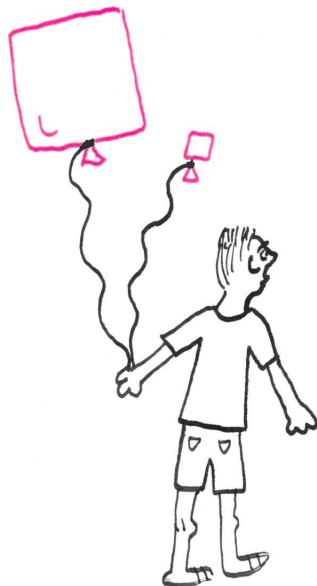


Dr Edward Zych od ponad 30 lat konstruuje wielościany z tworzywa sztucznego i ma pewnie największą ich kolekcję w Polsce. Nie mogło go zabraknąć na Dniach Matematyki. W roku 2007 demonstrował wielościany na Uniwersytecie w Białymstoku, a później na Politechnice Białostockiej. Pokazy były ubarwione opowieściami o wielościanach i wzbogacone warsztatami, na których można było poznać tajniki konstruowania wielościanów.



Origami towarzyszyło Dniom Matematyki od początku. Warsztaty prowadzone przez nauczycielkę matematyki, mgr Teresę Ceterę, podkreślały związki origami z matematyką, szczególnie z geometrią przestrzenną. Oprócz kwiatków i zwierzączek z kolorowego papieru pojawiały się wielościany i powierzchnie. Warsztaty były wielokrotnie powtarzane. Przychodziły na nie całe klasy i przypadkowi przechodnie.

Γλῆρο ἡγορητὸν ἰσομετρίῳ·
 ἢ ἡμετέραν δὲ τὴν ἀμετρίαν ἀποδείξει
 ὅτι ἀμετρίῳ ἴσους ἔσονται ἀμετρίαι· ἢ ἡμετέραν
 ἀμετρίαν ἀποδείξει· ἢ ἡμετέραν ἀμετρίαν ἀποδείξει
 ὅτι ἀμετρίῳ ἴσους ἔσονται ἀμετρίαι· ἢ ἡμετέραν
 ἀμετρίαν ἀποδείξει· ἢ ἡμετέραν ἀμετρίαν ἀποδείξει



W czasie Dni Matematyki zawsze prezentowane były wykłady popularne dotyczące matematyki i jej zastosowań. Zwykle były skierowane do uczniów szkół ponadgimnazjalnych. Niektóre były adresowane do studentów i nauczycieli akademickich. Oprócz lokalnych wykładowców z Politechniki i Uniwersytetu pojawiali się goście z Warszawy, Krakowa i Łodzi. Jeden lub dwa wykłady kończyły zawsze uroczystość rozdania nagród w Konkursie Matematycznym dla uczniów szkół ponadgimnazjalnych, imprezę obecną na wszystkich Dniach Matematyki. W roku 2011 część wykładów odbyła się w szkołach w Białymstoku i w Łomży.

W roku 2007 dr Edward Zych, przy udziale kilku laureatów Olimpiady Matematycznej, poprowadził warsztaty dla przyszłych olimpijczyków. W tym samym roku w Wyższej Szkole Matematyki i Informatyki Użytkowej odbył się Festiwal Gier Matematycznych, w którym uczestniczyły setki dzieci i młodzieży. Stałe imprezy Dni Matematyki to Konkurs Plastyczny i Konkurs Fotograficzny prac dotyczących matematyki.

Dni Matematyki w roku 2011 wzbogaciły się o pokaz filmu o tematyce matematycznej. Studenckie Koło Miłośników Gier Logicznych zorganizowało turniej gry go. Dr Ewa Girejko i dr Dorota Mozyrska zorganizowały miniwarsztaty dla nauczycieli *Nietypowa lekcja matematyki*, z udziałem Marka Matejuka, twórcy i producenta układanek Happy Cubes, które stale towarzyszyły Dniom Matematyki.

Od roku 2007 Dni Matematyki były współorganizowane przez Wydział Informatyki Politechniki Białostockiej, a dokładniej przez Centrum Popularyzacji Matematyki „Signum”, kierowane przez dr Annę Poskrobko. Z „Signum” wywodzi się większość organizatorów i wykonawców Dni Matematyki. W wielu imprezach, zwłaszcza na świeżym powietrzu, brali udział studenci: w roku 2007 z Wyższej Szkoły Matematyki i Informatyki Użytkowej, w latach 2009 i 2011 z Politechniki Białostockiej.



Zadania

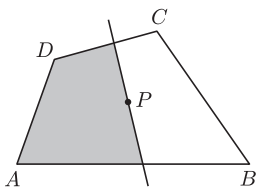
F 813 (Hamilton). Cykloida to tor punktu okręgu toczącego się bez poślizgu po prostej. Wykazać, że dowolny pionowy promień oświetlający cykloidę od dołu, odbiwszy się od cykloidy, przechodzi przez punkt, w którym podczas wykreślenia cykloidy znajdował się środek tego okręgu.

Rozwiązanie na str. 15

F 814 (Huygens). Jaki kształt musi mieć obrotowo symetryczna miseczka, by obiegająca ją poziomo kulka na każdej wysokości poruszała się z tą samą prędkością kątową?

Rozwiązanie na str. 5

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1351. Punkty A, B, C i D są wierzchołkami czworokąta wypukłego. Udowodnić, że odcinki AB i CD są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy wewnątrz czworokąta $ABCD$ istnieje punkt P o następującej własności: każda prosta przechodząca przez P , która przecina odcinki AB i CD , dzieli czworokąt $ABCD$ na części o równych polach.

Rozwiązanie na str. 4

M 1352. Niech $1 \leq i \leq r \leq n$ będą liczbami naturalnymi. Rozważmy r -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$. Dla takiego podzbioru niech t_i oznacza jego i -ty element, przy założeniu, że elementy są uporządkowane malejąco. Udowodnić, że średnia arytmetyczna wszystkich tak uzyskanych liczb t_i wynosi $i \cdot \frac{n+1}{r+1}$.

Rozwiązanie na str. 19

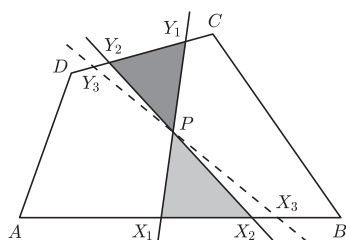
M 1353. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$ istnieją takie liczby naturalne k, l , że

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{l(l+1)}.$$

Rozwiązanie na str. 18



Rozwiązanie zadania M 1351.
Załóżmy najpierw, że istnieje punkt P o podanej własności. Poprowadźmy przez niego dwie proste. Jedna przecina boki AB i CD odpowiednio w punktach X_1 i Y_1 , a druga – w punktach X_2 i Y_2 .



Mamy

$$\begin{aligned} [AX_1PY_2D] + [PX_1X_2] &= \\ &= [AX_2Y_2D] = \frac{1}{2}[ABCD] = \\ &= [AX_1Y_1D] = [AX_1PY_2D] + [PY_1Y_2], \end{aligned}$$

gdzie $[F]$ oznacza pole figury F . Zatem

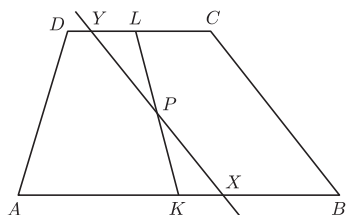
$$\begin{aligned} \frac{1}{2}PX_1 \cdot PX_2 \cdot \sin \sphericalangle X_1PX_2 &= \\ &= [PX_1X_2] = [PY_1Y_2] = \\ &= \frac{1}{2}PY_1 \cdot PY_2 \cdot \sin \sphericalangle Y_1PY_2, \end{aligned}$$

astąd $PX_1 \cdot PX_2 = PY_1 \cdot PY_2$. Prowadząc przez P trzecią prostą, przecinającą AB i CD odpowiednio w punktach X_3 i Y_3 , otrzymamy $PX_2 \cdot PX_3 = PY_2 \cdot PY_3$. Dzieliąc stronami ostatnie dwie równości, otrzymamy

$$\frac{PX_1}{PX_3} = \frac{PY_1}{PY_3},$$

co wobec twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa implikuje, że $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$, tzn. $AB \parallel CD$.

Odwrotnie, niech $AB \parallel CD$. Niech K i L będą odpowiednio środkami boków AB i CD . Niech P będzie środkiem odcinka KL .



Z wypukłości czworokąta $ABCD$ wynika, że punkt P leży w jego wnętrzu. Oczywiście $[AKLD] = \frac{1}{2}[ABCD]$ i $[PKX] = [PLY]$ dla dowolnej prostej przechodzącej przez P i przecinającej odcinki AB , CD odpowiednio w punktach X , Y . Zatem P ma własność, o której mowa w treści zadania.

Kilka zadań, o których...

Krzysztof CIESIELSKI*

Na IV Konferencji Stowarzyszenia Edukacji Matematycznej miałem przyjemność mówić o matematycznych zadaniach „o których nie wiedzieliście, że o nich nie wiedzieliście”. Sformułowanie to nawiązuje do niedawno przełożonej na język polski książki Johna Barrowa *100 essential things you didn't know you didn't know*, której tytuł w polskim przekładzie brzmi, nie wiedzieć czemu, *Jak wygrać na loterii? Czyli z matematyką na co dzień*. Poniżej – kilka spośród zadań, o których tam mówiłem.

1. Sznurek godzinny to taki sznurek, który po zapaleniu spala się przez równą godzinę – ale nierównomiernie i nie wiadomo jak. Czy można ugotować jajko, które nie może gotować się krócej niż 7 minut i dłużej niż 8 minut, mając do dyspozycji trzy sznurki godzinne, kuchenkę gazową, rondel i wodę?

2. Ile wynosi suma współczynników wielomianu

$$W(x) = (2x^2 - 3x + 1)^{2011} - (x^3 - 9x^2 + 5x + 3)^{2011} + (x^2 + x - 3)^{2011}?$$

3. Miary kątów w trójkącie mają się jak 1 : 5 : 6. Najdłuższy bok trójkąta to 6. Ile wynosi wysokość opuszczona na ten bok?

4. Na Wyspie Zagadkowej (jest to wyspa powstała mniej więcej 40 lat temu w *Rozkoszach Łamania Głowy* Lecha Pijanowskiego) mieści się ogród zoologiczny. Nie było w nim słonia. Dyrektor ZOO poprosił zatem listownie znanego łowcę zwierząt o dostarczenie słonia. Parę tygodni później łódź łowcy zwierząt ze słoniem na pokładzie przybiła do brzegu. Cena słonia, zależna od wagi, wydała się dyrektorowi mocno wygórowana. Na Wyspie Zagadkowej były jednak jedynie niewielkie wagi towarowe, nie było wagi, na której zmieściłby się słoń. Czy dyrektor mógł zważyć słonia i sprawdzić, czy łowca go nie oszukuje?

5. Ile, co najwyżej, ścian czworobocianu może być trójkątami rozwartokątnymi?

6. Liczba 9999...9999 jest zapisana za pomocą 999 dziewiątek. Ile wynosi suma cyfr kwadratu tej liczby?

7. Ile rozwiązań ma układ równań:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 2011? \end{cases}$$

8. Ile jest prostych dzielących trójkąt o bokach 2010, 2011, 2012 na dwa trójkąty o równych polach?

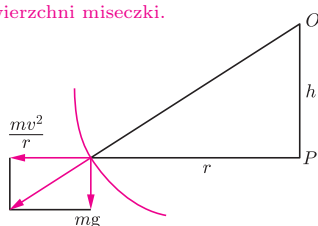
9. Czy można stwierdzić, czy liczba ludzi, którzy uścisknęli dłonie nieparzystej liczby ludzi (w całej dotychczasowej historii Ziemi), jest parzysta czy nieparzysta? Jeśli można, to jaka jest ta liczba?

Często urok zadania można docenić dopiero wtedy, gdy się nad tym zadaniem trochę (być może „całkiem spore trochę”) myślało. Na konferencji można było uczestników do tego zachęcić, wręczając im kartkę z tematami zadań wieczorem, w przeddzień referatu. W tekście wydrukowanym w miesięczniku – zamieszczone odpowiedzi często wręcz kuszą, by na nie rzucić okiem.

Delta rozwiązuje ten problem znakomitą pomysł „druku lustrzanego”. Dzięki temu wcale nie jest tak łatwo przeczytać rozwiązanie, nawet jeśli niechęć (lub pozornie niechęć) się na nie spojrzy... Zastosujemy tę metodę i tu, a dodatkową „pomocą” niech będzie fakt, że podane zostaną nie tyle pełne rozwiązania, co szkice czy istotne wskazówki (ale do rozwiązania raczej wystarczające). Nie będzie też rysunków, jako że lustrzane odbicie rysunku wygląda nad wyraz podobnie do oryginału. Mam jednak do Czytelników prośbę – by po lusterko sięgnęli dopiero w ostateczności. Wielką radość może sprawić satysfakcja osiągnięta dzięki samodzielnemu rozwiązaniu niestandardowego zadania. Na wszelki wypadek, by pokusa nie była zbyt wielka, wskazówki owe będą rozsiane po całym numerze.



Rozwiązanie zadania F 814. Ponieważ kulka toczy się poziomo, więc siła odśrodkowa i siła grawitacji mają wypadkową prostopadłą do powierzchni miseczki.



Oznaczmy przez O punkt przecięcia prostej zawierającej tę wypadkową z osią miseczki i przez P przecięcie tej osi z płaszczyzną ruchu kulki. Niech r będzie promieniem zataczanego okręgu i niech $h = OP$. Mamy

$$\frac{mv^2/r}{mg} = \frac{r}{h},$$

a więc

$$|v| = r\sqrt{g/h}.$$

Stąd czas obiegu to

$$2\pi r/|v| = 2\pi\sqrt{h/g}$$

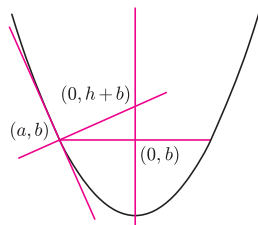
i prędkość kątową to $\sqrt{g/h}$. Jedyłą zmienną jest tu h , więc poszukujemy takiej krzywej (będącej przekrojem miseczki), dla której owo h , czyli OP , jest stałe.

Krzywą taką jest parabola, a konkretnie $x^2 = 2hy$. Istotnie, styczna do niej w punkcie (a, b) to

$$\frac{a}{h}x - y = \frac{a^2}{h} - b,$$

a normalna to

$$x + \frac{a}{h}y = a + \frac{a}{h}b.$$



Ta normalna przecina oś $x = 0$ w punkcie $\frac{a}{h}y = a + \frac{a}{h}b$, czyli $y = h + b$, miseczka jest zatem paraboloidą obrotową.

Pasażerowie na gapę

W małym, drewnianym letnim domku mojej kuzynki po zimie pozostał trudno usuwalny zapach. Co gorsza – pozostały również zimowe mieszkanki domku – polne myszy, wraz z przychówkiem. Gniazda miały m.in. w szufladzie z papierowymi serwetkami, żywiły się różnymi, nieopatrznie pozostawionymi, precelkami.

Myszy towarzyszą ludzkim domostwom od dawna. W VIII–X wieku Vikingowie, migrujący po północnych morzach Europy, z dzisiejszej Norwegii do Szkocji, Irlandii, Islandii, Nowej Fundlandii i Grenlandii, zabierali w nieznanne konie, owce, kozy, kury. Współczesne badania genetyczne świadczą też o tym, że bliżej nowego miejsca osiedlenia porywali na statki tamtejsze kobiety. Nie wiedzieli zapewne o tym, że w ich Arkach Noego osiedliły się również myszy.

Historię migracji tych myszy badają uczeni z zainteresowanych krajów: Wielkiej Brytanii, Islandii, USA, Danii i Szwecji. Poddali analizie DNA myszy „wykopaliskowych” i dziś żyjących na terenach podbijanych przez Vikingów. Dwanaście stuleci ewolucji gryzoni na tyle zmieniło ich genotypy, że można określić regiony świata, z których pochodzą współczesne myszy. Najpierw myszy „norweskie” wylądowały w Islandii, a kontynuowały swoje podróże aż na Grenlandię. Nie znaleziono genetycznych dowodów na średniowieczne pochodzenie dzisiejszych myszy nowofundlandzkich; te myszy zostały przywiezione przez Europejczyków z późniejszych fal emigracyjnych.

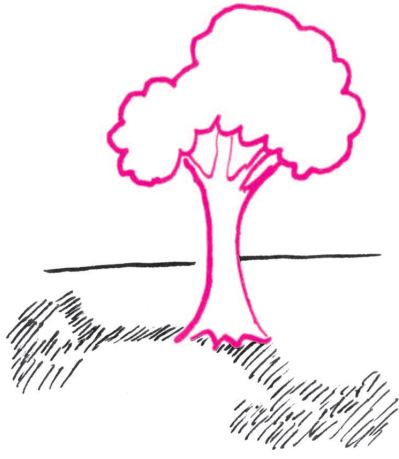
Wspólne losy ludzi i towarzyszących im pasożytów, bakterii i zwierząt rozszyfrowywane są obecnie dzięki taniejącym, a więc łatwiej dostępnym, szybkim metodom sekwencjonowania DNA. Gdy myślimy o ciele ludzkim, coraz częściej powinniśmy widzieć je jako cały wszechświat dla współzasiadających je mikroorganizmów. Takimi są, na przykład, bakterie *Helicobacter pylori*, obecne w przewodzie pokarmowym ponad 50% ludzi, wywołujące wrzody żołądka. Poznanie układu helikobakteria-człowiek umożliwia równoległość zdarzeń ewolucyjnych w obu gatunkach. Składają się na to takie okoliczności jak te, że jedynym gospodarzem dla tych bakterii jest tylko jeden gatunek (ludzie), że zakażenie rozprzestrzenia się w najbliższej rodzinie, do dzieci i najbliższych krewnych (ach, te całuski dla niemowląt!) oraz że przekazanie niewielkiej liczby mikroorganizmów wystarcza do zakażenia.

Można ocenić, że *H. pylori* była już w ludzkich żołądkach w czasie fali migracji z Afryki 58 000 lat temu, ale jak długo przedtem (niektórzy sądzą, że ponad 100 000 lat temu) nie wiadomo. W tym czasie ewoluowali i ludzie, i bakterie, pewne dane wskazują także na niezależne początki zakażenia ludzi przez różne gałęzie ewolucyjne bakterii.

Jeszcze bardziej złożony system ko-ewolucji przedstawia *Plasmodium falciparum* (zarodziec malarii) wraz z człowiekiem i komarem. Nie ma wątpliwości, że można wykazać wzajemne wpływanie na ewolucję każdego z tych gatunków. Sądzi się, że zarodziec przeniósł się na ludzi z małp na przełomie okresu mezolitycznego z neolitem. Później malaria wpływała w sposób zasadniczy na ludzi z basenu Morza Śródziemnego, ich kulturowe, dietetyczne zachowania oraz powstawanie cech adaptacyjnych. W ten sposób prawdopodobnie doszło do wyselekcjonowania ludzi bardziej odpornych na zakażenie, co zmniejszyło fatalne skutki demograficzne tej choroby. Z kolei porównania różnych gatunków zarodźca prowadzą do wniosku, że i one ewoluowały i stawały się coraz bardziej zakaźne dla ludzi. I komary, i zarodźce należą do gatunków współzamieszkujących te same tereny, głównie rolnicze, co ludzie.

I czy ktoś jeszcze może zaprzeczyć, że podróże w czasie (w każdym razie do tyłu) nie są możliwe?

Magdalena FIKUS

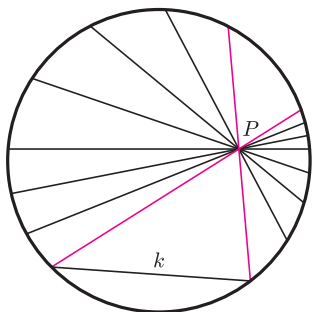


Felix Klein (1849–1925), matematyk niemiecki, wywarł ogromny wpływ na rozwój matematyki, proponując oparcie jej nie na aksjomatach i naśladowaniu fizyki, lecz na przekształceniach, a zwłaszcza grupach przekształceń. W ciągu stulecia spowodowało to zasadniczą restrukturyzację matematyki zwaną przełomem bourbakistowskim.

Hermann Helmholtz (1821–1894) przytoczoną w tekście pracę napisał w 1868 roku pod wpływem lektury wykładu habilitacyjnego Bernharda Riemanna (1826–1866) z 1854 roku, *O hipotezach, które leżą u podstaw geometrii*, w którym Riemann wskazuje na możliwość tworzenia bogatej rodziny geometrii nieeuklidesowych – tak uprawia się geometrię dzisiaj.

János Bolyai (czyt. bojój) (1802–1860), matematyk węgierski; jego praca dotycząca geometrii nieeuklidesowej (1823) została źle przyjęta przez środowisko naukowe i ukazała się dopiero w 1832 roku jako dodatek do książki ojca poświęconej dydaktyce matematyki. Gdy okazało się, że w Niemczech wydano i pozytywnie przyjęto pracę Łobaczewskiego, János załamał się i spędził resztę życia w całkowitym odosobnieniu.

Nikołaj Łobaczewski (1792–1856), matematyk rosyjski (z polskimi korzeniami), opublikował w 1826 roku w Kazaniu pracę *O началх геометрии*, którą powszechnie poznano po wydrukowaniu jej w 1840 roku po niemiecku. Wobec wątpliwości co do jej filozoficznego (i religijnego) znaczenia Łobaczewski został usunięty ze stanowiska rektora uniwersytetu w Kazaniu i przeniesiony na emeryturę.



Rys. 1

W rozumowaniach był błąd

Marek KORDOS

W poprzednim numerze *Delty* przedstawiłem trzy dowody V postulatu Euklidesa. Dla wszystkich Czytelników było jasne, że zawierają one błędy. Fakt, że mimo to każdy z nich przez pewien czas był uznany za poprawny, wskazuje na ogromny kłopot, jakim dla myślicieli – już niekoniecznie matematyków – było przyjęcie do wiadomości, że mogą istnieć dwie wykluczające się, ale poprawne, a więc w szczególności niesprzeczne teorie opisujące ten sam obiekt, w tym przypadku przestrzeń. A przecież przestrzeń, w której „odbywa się” Wszechświat, jest jedna.

Powstało więc pytanie, jak – niezależnie od odwoływania się do Natury – można stwierdzić poprawność teorii. Rozwiązanie przyniosła lekka modyfikacja tego pytania przez Felixa Kleina: zapytał on

jak stwierdzić, że jedna teoria jest co najmniej tak poprawna, jak druga?

I odpowiedział na to pytanie: *jeśli w teorii T_1 można zbudować model teorii T_2 , to teoria T_2 jest co najmniej tak samo poprawna, jak teoria T_1 .*

Po czym zbudował (w 1870 roku) model geometrii powstającej przez dołączenie do czterech początkowych postulatów Euklidesa zaprzeczenia piątego postulatu w geometrii euklidesowej (*model Kleina*) oraz w tej geometrii model geometrii euklidesowej (*horysfera*). W ten sposób wykazał, że obie geometrie są jednakowo poprawne.

A filozoficzny problem istnienia dwu teorii opisujących ten sam obiekt został niewiele później rozstrzygnięty według pomysłu fizyka, Hermanna Helmholtza, który w pracy *O faktach, które leżą u podstaw geometrii* zaproponował, by matematyki nie uważać za naukę przyrodniczą, lecz za skrzynkę z narzędziami do uprawiania nauk przyrodniczych.

Model Kleina

Do wskazania błędów w przytoczonych dowodach V postulatu potrzebny będzie nam – rzecz jasna – tylko pierwszy z modeli zbudowanych przez Kleina. Oto on.

- Płaszczyzną będzie wnętrze koła (bez brzegu! – oznaczmy ten brzeg o).
- Prostymi będą cięciwy tego koła (oczywiście, bez końców).
- Proste będą prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy przedłużenie jednej z nich przechodzi przez punkt przecięcia stycznych do o w końcach drugiej (okazuje się, że jest to relacja symetryczna) lub gdy jedna z nich przechodzi przez środek koła, a druga jest euklidesowo do niej prostopadła.

To określa model całkowicie, a wynika z tego, między innymi, że

- odległość punktów A i B to

$$\lambda \cdot \left| \ln \frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP} \right|,$$

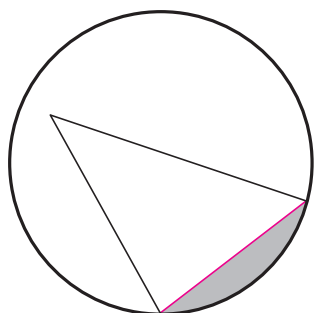
gdzie P i Q to końce prostej AB , XY to euklidesowa długość odcinka XY , a λ jest dowolnie ustaloną stałą dodatnią;

- punkty równoodległe od prostej tworzą elipsę styczną do o w końcach tej prostej;
- kąt między prostymi to euklidesowy kąt, jaki tworzą okręgi prostopadłe do o i przechodzące przez końce tych prostych.

Czytelnik Ciekawski może z tego wyprowadzić wszelkie własności tej nieeuklidesowej geometrii zwanej geometrią Bolyaia–Łobaczewskiego na cześć dwóch odważnych matematyków, którzy pierwsi uparli się, że taka geometria istnieje (lub geometrią hiperboliczną ze względu na jej analityczne własności). My zauważymy wstępnie, że nie jest w niej spełniony V postulat: przez punkt P poza prostą k przechodzi nieskończenie wiele prostych z nią rozłącznych (rys. 1). O tych dwu, które mają z k wspólne końce, mówimy, że są do k równoległe, o pozostałych – że są nadrównoległe.

Na czym polegały błędy?

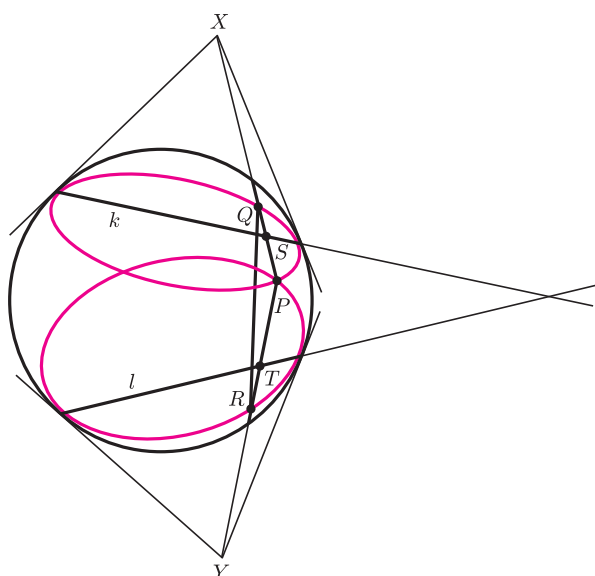
Już z oglądu rysunku 1 można stwierdzić, że Saccheri żadnego błędu **matematycznego** nie popełnił – w geometrii Bolyaia–Łobaczewskiego (B–Ł) proste równoległe są asymptotyczne. Mylił się tylko w intuicji, że takie coś prostym przydarzyć się nie może. Faktycznie jego praca *Euclides ab omni naevo vindicatus* była pierwszą pracą z geometrii B–Ł, ale o tym przekonano się dopiero dwa wieki później.



Rys. 2

Legendre popełnił – można powiedzieć – pół błędu: pierwsza część jego dowodu, gdy wykazuje, że suma kątów trójkąta w geometrii absolutnej nie może być większa od π , jest poprawna. Uzyskany wynik dziś nazywa się *twierdzeniem Saccheriego–Legendre’a*, bo i u Saccheriego można znaleźć podobne rozumowanie.

Natomiast dowód, że nie ma trójkątów o sumie kątów mniejszej od π , korzysta ze zdawałoby się oczywistej przesłanki: *przez punkt wewnątrz kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba jego ramiona*. Jej fałszywość widać na rysunku 2. Kolorowa prosta jest równoległa do obu ramion kąta – nazywa się ją *prostą zagradzającą*. Zacięnięty obszar za nią składa się – co łatwo sprawdzić linijką – z punktów, przez które nie można poprowadzić prostej przecinającej oba ramiona kąta (punkty A' i B' z dowodu Legendre’a mogą nie istnieć).



Rys. 3

Sprawa z dowodem Farkasa Bolyaia jest (chyba) prostsza, choć obrazek będzie większy. Okazuje się bowiem, że w geometrii B–Ł istnieją trójkąty, na których nie można opisać okręgu – po prostu symetralne ich boków nie przecinają się! Pokazuje to rysunek 3.

Nieprzecinające się proste k i l będą symetralnymi trójkąta, który buduje się tak. Bierzymy między nimi jakiś punkt P i rysujemy elipsy przechodzące przez ten punkt i styczne do o odpowiednio w końcach prostych k i l – są to linie, które składają się z punktów odległych tak jak P odpowiednio od prostej k i l (druga czarna kropka na poprzedniej stronie) – zatem S jest środkiem PQ , a T środkiem PR . Każda prosta, której przedłużenie przechodzi przez X (przez Y), jest prostopadła do k (do l) – trzecia kolorowa kropka. Zatem k jest symetralną PQ , a l symetralną PR . Wobec tego na trójkącie PQR nie można opisać okręgu.

Można, oczywiście, zbudować trójwymiarowy model Kleina. Będzie to kula bez brzegu – reszta bez zmian. **Horysfera** to elipsoida obrotowa (powierzchnia), której oś obrotu przechodzi przez środek tej kuli, i która jest styczna do brzegu tej kuli (a więc bez jednego punktu!). Dodatkowo zakładamy, że (gdy kulę potraktujemy jak jednostkową) pozostałe osie mają długość równą kwadratowi długości osi obrotu. Na tej powierzchni za proste uważamy przecięcia jej z płaszczyznami model Kleina przechodzącymi przez brakujący punkt. Uważamy te proste za prostopadłe, gdy powstały z płaszczyzn prostopadłych. Geometria na tej powierzchni jest wtedy identyczna z geometrią płaszczyzny euklidesowej.

Ale to już opowieść na inną okazję.

Inne zdania równoważne V postulatowi

Zatem każde ze zdań

- *przez punkt wewnętrzny kąta wypukłego można poprowadzić prostą przecinającą oba ramiona kąta;*
- *na trójkącie można opisać okrąg;*

jest równoważne V postulatowi na gruncie początkowych czterech.

Czytelnik Zainteresowany sprawdzi, że podobnie jest ze zdaniami:

- *istnieją nieprzystające trójkąty podobne;*
- *na płaszczyźnie każda prosta przecina przynajmniej jedną z przecinających się prostych;*
- *istnieją trzy współliniowe punkty jednakowo odległe od danej prostej;*
- *odległość punktów zorientowanej prostej od innej prostej jest funkcją monotoniczną;*
- *odległość punktów prostej od współpłaszczyznowej i rozłącznej z nią prostej jest ograniczona (do wyboru: z góry lub z dołu);*
- *istnieje prostokąt;*
- *wysokości trójkąta przecinają się*

itd.



mała delta

Lekcja rysunku (1)

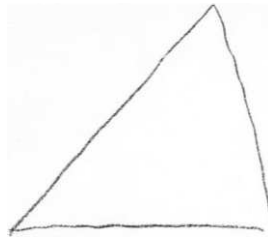
Wydaje się, że w czasach szybkich komputerów, programów graficznych i innych gadżetów nie ma sensu zajmowanie się rysunkiem odręcznym. Równie dobrze jednak można by zrezygnować z nauki pisania i tabliczki mnożenia – są przecież odpowiednie edytory i kalkulatory. Zdarza się jednak, że rozwiązując jakieś zadanie, dobrze byłoby podeprzeć naszą wyobraźnię właśnie rysunkiem, a nie ma pod ręką supernowoczesnych narzędzi.

Niemal każdy nauczyciel matematyki wie, że odpowiedni rysunek do zadania z geometrii to często ponad połowa sukcesu przy rozwiązaniu. Gdy jednak trzeba narysować choćby trójkąt wpisany w okrąg, to można usłyszeć o braku zdolności rysunkowych. A przecież wykonanie nawet pozornie zawilego rysunku nie musi być trudne. Wystarczy pamiętać, że rysunek jest to skończony ciąg kresek prowadzonych w odpowiedniej kolejności.

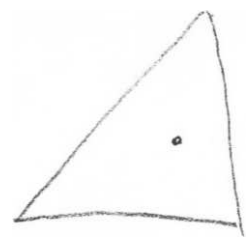
Oto pierwsza lekcja. Zaczniemy od rysunku czworościanu. Z tym na pewno nie ma problemu. Najpierw rysujemy trójkąt (rys. 1),



Rys. 1

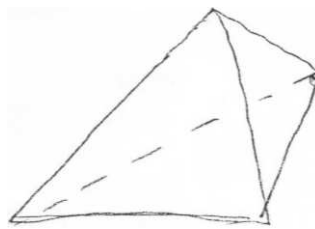


Rys. 2a

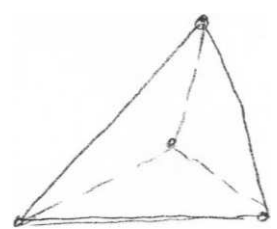


Rys. 2b

potem wybieramy punkt (rys. 2), najczęściej na zewnątrz trójkąta (choć czasem potrzebny jest taki punkt wewnątrz), i łączymy go z wierzchołkami trójkąta (rys. 3). To wie niemal każdy.

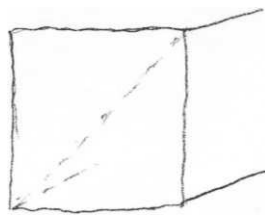


Rys. 3a

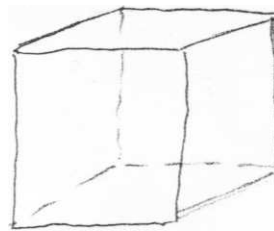


Rys. 3b

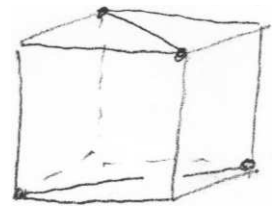
A gdyby tak spróbować narysować czworościan stojący nie na solidnej podstawie, tylko na krawędzi? Dla specjalisty to nic trudnego, jednak wydaje się, że bez wprawy nie jest łatwo wykonać poprawny rysunek. Jest jednak sposób, żeby narysować to prosto. Najpierw szkicujemy pomocniczo sześcian – z tym chyba też nie ma problemu (rys. 4). Rysując go, pamiętajmy, żeby krawędzie idące w głąb nie były równoległe do przekątnych ściany przedniej. Na ścianach równoległych (górnej i dolnej) naszkicujemy przekątne prostopadłe (rys. 5).



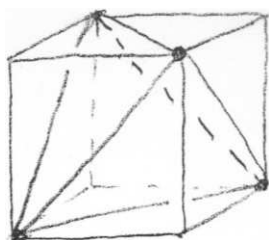
Rys. 4a



Rys. 4b



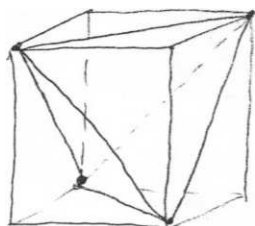
Rys. 5



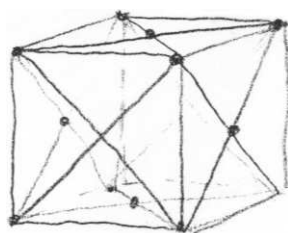
Rys. 6

Końce tych przekątnych są wierzchołkami poszukiwanego czworościanu, a przekątne – jego krawędziami. Wystarczy teraz tylko połączyć te wierzchołki każdy z każdym (rys. 6). Czworoscian, stojący na krawędzi, gotowy. Ponadto, powinien to być czworoscian foremny (przynajmniej teoretycznie) – prawda?

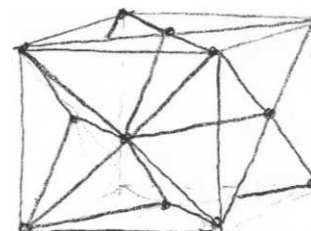
Widzimy też, że w sześcianie są dwa takie czworościany („ten drugi” jest na rysunku 7). Możemy je narysować jednocześnie (rys. 8) – po prostu zaznaczamy przekątne wszystkich ścian. Dobrze jest jeszcze zaznaczyć wspólne linie – są to odcinki łączące środki sąsiednich ścian sześcianu (rys. 9).



Rys. 7



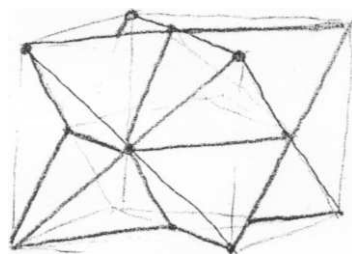
Rys. 8



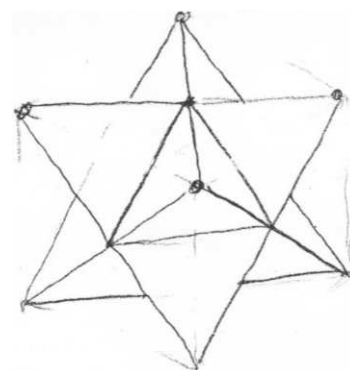
Rys. 9

W ten sposób dostaliśmy gwiazdę ośmioramienną (*stella octangula*), kompozycję dwóch czworościanów foremnych. Dla lepszego efektu można odpowiednio pokolorować widoczne ściany, czyli „zapomnieć” o sześcianie, z którego *stella* powstała (rys. 10). Jeśli całą procedurę powtórzymy w nieco przekreślonym sześcianie, to otrzymamy gwiazdę obróconą – w innej perspektywie (rys. 11).

одповідний чворосціан
іхавіахціне го сціа' аковітіпцієніу
рорноасціє в біаєтілєні тєі рипікє
твоіацілє інієдієлє сорє ієтіл 150°
одціпкі ієсцієє го з мїєаєсрїєкіані
і мзіієє в ієго мїєтілєні тєкі рипікє' ріл
па біаєаєацілєніє тієіієкіє іоааітєієтілє
є' Мєацієтіє сцієтілє і Млєтілєніу іоааієлє



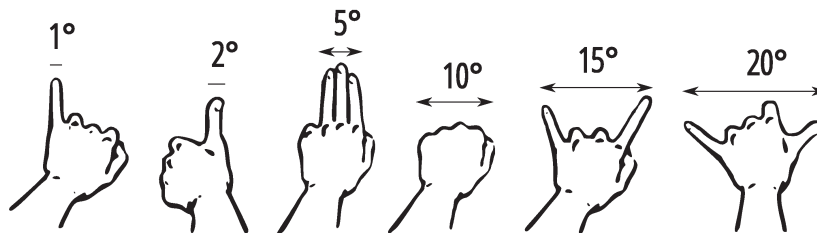
Rys. 10



Rys. 11

Pisał i rysował Zdzisław POGODA

Jak mierzyć odległości na nieboskłonie, gdy brakuje odpowiedniego sprzętu?



Amatorskie obserwacje można z powodzeniem wykonywać, nie przejmując się ząadto skomplikowaną aparaturą – do oszacowania rozmiarów kątowych oraz odległości pomiędzy obiektami na sferze niebieskiej wystarczy sprawna dłoń. Dla przykładu Księżyc, którego tarcza ma około 0,5° łuku (30 minut kątowych, podobnie jak Słońce – nawiasem mówiąc, ta ciekawa koincydencja zapewnia nam widowiskowe zaćmienia!) mieści się z dużym zapasem w obrysie małego palca, natomiast tylne gwiazdy Wielkiego Wozu znajdują się w odległości trzech palców, czyli około 5° łuku. Zachęcamy do samodzielnego przetestowania tej hipotezy!

Źródło rysunku:
<http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Mani.png>
 GNU v1.2 Creative Commons Attribution-Share Alike 3.0 Unported

M. B.

Wymiana splątania z opóźnionym wyborem

Tak tłumaczy się angielski termin *delayed choice for entanglement swapping*. Oczywiście, chodzi o splątane stany kwantowe. A skoro tak, to, ani chybi, o kolejne badanie ujawniające, jak bardzo odjechana jest mechanika kwantowa, czyli ponowne wykazanie nieadekwatności klasycznej (niekwantowej) intuicji.

Tytułowe określenie dotyczy myślowego eksperymentu [1], w którym o tym, czy stany kwantowe dwóch obiektów są splątane, decydujemy już po tym, jak zostały one zmierzone. Koncepcja ta została właśnie zrealizowana doświadczalnie [2].

Sytuacja została zaaranżowana za pomocą (nieożywionych) obserwatorów: Alicji, Boba oraz Wiktora. Wytwarzano dwie (kwantowo) splątane pary fotonów 1 i 2 oraz 3 i 4 poprzez spontaniczną konwersję ultrafioletowych (404 nm) fotonów w dwóch kryształach BBO na pary fotonów podczerwonych (808 nm). Natężenie początkowego femtosekundowego impulsu było tak dobrane, żeby, przy niskim prawdopodobieństwie konwersji, praktycznie nie zdarzało się skonwertowanie dwóch fotonów w pojedynczym kryształu.

Następnie foton 1 był przesyłany do Alicji, foton 4 do Boba, a fotony 2 i 3, za pomocą dużo dłuższych światłowodów, do Wiktora. Dla każdej pary odbieranych fotonów Alicja i Bob wybierali (uprzednio) jedną z trzech niezależnych baz polaryzacyjnych, a następnie dokonywali pomiaru polaryzacji, zanim para fotonów 2 i 3 dotarła do Wiktora.

Wiktor, za pomocą kwantowego generatora liczb losowych, decydował, czy splątać fotony 2 i 3, czy nie. Zgodnie z mechaniką kwantową splątanie takie powoduje splątanie pary 1 i 4, a rozplątanie początkowo splątanych par 1 i 2 oraz 3 i 4, czyli tytułową wymianę splątań. Tylko że pomiary polaryzacji fotonów 1 i 4 zostały już dokonane i to w chwili, gdy nie wiadomo było, czy Wiktor będzie plątał, czy nie będzie.

Ponieważ wszystkie wyniki pomiarów polaryzacyjnych były rejestrowane, więc za pomocą badania korelacji można było stwierdzić, czy wymiana splątania nastąpiła, gdy Wiktor plątał, oraz czy nie nastąpiła, gdy tego nie robił.

Wyniki eksperymentu [2] potwierdziły wymianę splątań w pierwszym oraz jej brak w drugim przypadku.

Tymczasem klasyczna intuicja skłania nas do przypisania obiektywnego znaczenia pojedynczym obserwowanym przez nas zdarzeniom, np. dokonaniem przez nas pomiarowi polaryzacji fotonu, ale w takim razie możliwe byłoby wpływanie na przeszłość.

Jak widać, pokusie takiego przypisania należy się oprzeć i uznać, że można kwantowo plątać nie tylko stany rozdzielone przestrzennie, ale i te rozdzielone czasowo.

Piotr ZALEWSKI

[1] Asher Peres, *Delayed choice entanglement swapping*, J. Mod. Opt. **47**(2000)139–143.

[2] Xiao-song Ma, Stefan Zotter, Johannes Kofler, Rupert Ursin, Thomas Jennewein, Časlav Brukner i Anton Zeilinger, *Experimental delayed-choice entanglement swapping*, Nature Physics, doi:10.1038/nphys2294, 22 kwietnia 2012.

Polskie dziewczęta są najlepsze!

W tym roku w dniach 12–13 kwietnia odbyła się po raz pierwszy Europejska Olimpiada Matematyczna Dziewcząt. W zawodach rozegranych w Murray Edwards College w Cambridge uczestniczyło 70 uczestniczek z 19 krajów, nie tylko europejskich. Każdy uczestniczący w Olimpiadzie kraj mógł wystawić co najwyżej czteroosobową drużynę.

Polska reprezentacja, kierowana przez Michała Pilipczuka (obecnie doktorant na Uniwersytecie w Bergen w Norwegii) i Joannę Ochremiak (doktorantkę w IM UW), odniosła pełny sukces, wygrywając w klasyfikacji drużynowej ze 122 pkt. Tuż za nimi uplasowała się drużyna Rumunii (121 pkt.), a dalej Ukraina (117 pkt.) i Stany Zjednoczone AP (110 pkt.). Najlepszy wynik w drużynie uzyskała Barbara Mroczek (36 pkt. i złoty medal), pozostałe uczestniczki: Anna Siennicka (31 pkt.), Agata Latacz (28 pkt.) i Anna Olech (27 pkt.) zdobyły medale srebrne.

Warto podkreślić, że to już trzecie w ostatnim czasie zwycięstwo uzdolnionej matematycznie polskiej młodzieży, po wygranej na Środkoeuropejskiej Olimpiadzie Matematycznej (MEMO 2011) i na Olimpiadzie Matematycznej Państw Bałtyckich (Baltic Way 2011).

W. B.



Olimpiada

61. Olimpiada Fizyczna 2011/2012

W dniach 13–17 kwietnia br. odbył się w Warszawie finał 61. Olimpiady Fizycznej. Do tegorocznych zawodów trzeciego stopnia zakwalifikowało się 69 zawodników, w tym jedna dziewczyna. W sobotę 14 kwietnia zawodnicy w dwóch turach rozwiązywali zadanie doświadczalne polegające na badaniu rozciągania włosa pod wpływem przyłożonej siły oraz na wyznaczeniu jego modułu Younga. Przeprowadzenie eksperymentu wymagało użycia jako ciężarków monet jednocentowych, które – co warto podkreślić – zachowały się w niezmiętej liczbie 210 sztuk do końca zawodów doświadczalnych. Okazało się, że zadanie to dobrze różnicowało uczestników Olimpiady, można bowiem było wykonać doświadczenie na wiele sposobów, ale nie wszystkie z nich zapewniały odpowiednio dokładne wyniki. Jedno rozwiązanie wyróżniało się pod względem pomysłowości i dokładności przeprowadzonych pomiarów. Jego autor, **Szymon Pińkowski**, otrzymał za nie wyróżnienie oraz wszystkie wykorzystywane w części doświadczalnej monety.

W niedzielę 15 kwietnia zawodnicy rozwiązywali zadania teoretyczne. Pierwsze, którego tematem było pole elektryczne wokół wygiętego i naładowanego drutu, okazało się stosunkowo proste. Drugie zadanie,

wymagające analizy równowagi cieplnej ciała umieszczonego wewnątrz kąta dwuściennego utworzonego przez dwa zwierciadła, dobrze różnicowało uczestników olimpiady, a rozwiązaniu autorstwa **Mateusza Mańki** przyznano wyróżnienie. Trzecie zadanie, w którym występowała ramka z prądem poruszająca się w polu magnetycznym, było wyraźnie najtrudniejsze i żadnego rozwiązania nie można było uznać za bezbłędne. Największe kłopoty sprawiła zawodnikom dyskusja poprawności założeń przyjętych dla rozwiązania tego zadania.

Na podstawie uzyskanych ocen Komitet Główny Olimpiady Fizycznej, stosując regułę regulaminową, wyłonił spośród finalistów osiemnastu laureatów. Zwycięzcą 61. Olimpiady Fizycznej został z wynikiem 84 pkt. **Michał Pacholski** z Warszawy, który otrzymał nagrodę główną: tablet ufundowany przez firmę Labis z Warszawy.

Treści zadań wraz z wzorcowymi rozwiązaniami z tegorocznej edycji Olimpiady Fizycznej można znaleźć na stronie Komitetu Głównego Olimpiady Fizycznej <http://www.kgof.edu.pl/>.

Konrad DZIATKOWSKI

A oto laureaci w kolejności zajętych miejsc:

1. **Michał Pacholski**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
2. **Bartłomiej Zawalski**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
3. **Kacper Oreszczuk**, VI LO im. J. Kochanowskiego w Radomiu,
4. **Jan Rydzewski**, V LO im. Ks. J. Poniatowskiego w Warszawie,
5. **Filip Ficek**, V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie,
6. **Maciej Gałka**, II LO im. W. Pniewskiego w Gdańsku,
7. **Jakub Mroźek**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
8. **Mateusz Zieliński**, Zespół Szkół Uniwersytetu Mikołaja Kopernika Gimnazjum i Liceum,
9. **Remigiusz Lewandowski**, Technikum nr 1 w Siedlcach,
10. **Paweł Nałęcz-Jawecki**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
11. **Konrad Szymański**, V LO im. A. Witkowskiego w Krakowie,
12. **Mateusz Mańko**, IX LO im. C. K. Norwida w Częstochowie,
13. **Robert Przybycień**, IV LO im. T. Reytana w Warszawie,
14. **Jakub Supeł**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
15. **Piotr Urbańczyk**, VIII LO im. M. Skłodowskiej-Curie w Katowicach,
16. **Jacek Łysiak**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie,
17. **Michał Szyszkowski**, III LO im. A. Mickiewicza we Wrocławiu,
18. **Radosław Rzepliński**, XIV LO im. S. Staszica w Warszawie.



LV Olimpiada Astronomiczna

Wybór zadań

Druga seria zadań zawodów I stopnia

1. Czas zakrywania planetoidy przez Księżyc, czyli czas jaki upłynął od pierwszego do drugiego kontaktu wyniósł $\Delta t = 1,4$ sekundy. W czasie pomiaru obserwowaną na sferze zmianę położenia planetoidy względem Księżyca można uznać za jednostajną po linii prostej z prędkością kątową $\omega = 0,530/\text{godz}$. Dodatkowo wiemy, że podczas zakrycia minimalna odległość pomiędzy środkami Księżyca i planetoidy wyniosła $3/4$ promienia kąтового Księżyca. Jakie wynikają stąd kątowe rozmiary planetoidy jeśli obydwa ciała potraktować jako idealne kule i przyjąć, że Księżyc miał średnicę kątową $R = 32'$, a planetoida była w pobliżu opozycji?

2. Gwiazdy supernowe typu Ia, których jasność absolutna w maksimum wynosi $-19,3$ mag, stanowią niezwykle ważny wskaźnik odległości we Wszechświecie (tzw. świece standardowe). Podaj, w jakiej odległości od Ziemi znajdowałyby się gwiazda supernowa typu Ia, gdyby jej jasność obserwowana była taka, jak jasność obserwowana Słońca. Oceń, jakie skutki dla życia na Ziemi mógłby spowodować wybuch supernowej w takiej odległości. Brakujące dane wyszukaj samodzielnie.

Zadania zawodów II stopnia

1. W grudniu 2011 roku doniesiono o odkryciu pozasłonecznej planety „Kepler 22-b” o promieniu ponad dwukrotnie większym od promienia Ziemi, obiegającej macierzystą gwiazdę w ciągu 290 dni. Gwiazda ma promień $0,98$ promienia Słońca i masę $0,97$ masy Słońca oraz temperaturę efektywną 5500 K, a planeta obiega ją po orbicie zbliżonej do okręgu. Traktując planety jak ciała doskonale czarne, porównaj warunki termiczne planety Kepler 22-b z warunkami termicznymi planet znajdujących się w strefie ekosfery naszego Słońca. Wymień w punktach inne warunki, które powinny być spełnione, aby na tej planecie mogło istnieć życie w formach spotykanych na Ziemi.

2. Rozpatrujemy keplerowską orbitę gwiazdy podwójnej w układzie związanym z jednym z jej składników, nazywanym gwiazdą centralną. Oblicz mimośród e tej orbity oraz kąt nachylenia i jej płaszczyzny do płaszczyzny prostopadłej do kierunku widzenia, gdy obserwowana orbita, tj. rzut orbity keplerowskiej na płaszczyznę prostopadłą do kierunku widzenia, jest:

- elipsą o wielkiej półosi $a = 1,6''$ i małej półosi $b = 1,1''$, a gwiazda centralna leży w środku tej elipsy, to znaczy w punkcie przecięcia jej osi;
- okręgiem, a gwiazda centralna leży w połowie promienia tego okręgu;
- elipsą o wielkiej półosi $a = 2,1''$ i małej półosi $b = 1,4''$, a gwiazda centralna leży dokładnie w połowie małej półosi tej elipsy.

Zadania zawodów III stopnia

1. Z początkiem roku 2011 doniesiono o znalezieniu ciała o masach kilkunastu mas Jowisza i temperaturach zbliżonych do ziemskich. Oszacuj tempo stygnięcia takich ciał. W tym celu załóż dla uproszczenia, że temperatura ciała zmienia się jednakowo w całej objętości, a ciało ma masę 10 mas Jowisza, gęstość 1000 kg/m³ i temperaturę efektywną 300 K oraz zbudowane jest z gazu doskonałego o masie molowej 2 g/mol. W szczególności określ ile lat będzie trwało zmniejszenie temperatury o 1 stopień. Przyjmij, że ciepło molowe rozpatrywanego gazu wynosi $\frac{5}{2}R$, gdzie R jest stałą gazową, a masa Jowisza jest równa $2 \cdot 10^{27}$ kg.

2. Na podstawie obserwacji przelotu satelity stwierdzono, że odległość kątową od zenitu do wysokości $h = 40^\circ$ pokonał on w czasie $\Delta t = 105$ s. Wyznacz okres obiegu T tego satelity oraz promień R jego kołowej orbity. W rozwiązaniu pominij wpływ ruchu obrotowego Ziemi i przyjmij: promień Ziemi $r = 6370$ km; wartość pierwszej prędkości kosmicznej $v_I = 7,91$ km/s.

3. Obiegający Ziemię satelita składa się z dwóch części o jednakowych masach równych 100 ton każda, połączonych liną, której kierunek stale pokrywa się z kierunkiem promienia wodzącego satelity. Przyjmując, że orbita satelity jest okręgiem, oblicz okres obiegu tego satelity oraz naprężenie liny rozumiane jako siła przenoszona przez linę. Przyjmij, że odległość „dolnej” części satelity od środka Ziemi wynosi 6600 km, długość liny wynosi 100 km, a sama lina ma znikomą masę.

Końcowa klasyfikacja zawodów finałowych (I–V: laureaci, VI–XXV: finaliści):

- Filip Ficek (Kraków),
- Kacper Bucki (Kęty),
- Jakub Klencki (Łódź),
- Aleksandra Hamanowicz (Toruń),
- Przemysław Kuta (Tarnów),
- Mateusz Krakowczyk (Rybnik),
- Jerzy Knopik (Łódź),
- Mieszko Rutkowski (Kraków),
- Magdalena Stasiewicz (Białystok),
- Mateusz Czyżnikiewicz (Toruń),
- Łukasz Pietrasik (Wrocław),
- Piotr Kołaczek-Szymański (Szczecin),
- Joanna Starobrat (Lublin),
- Jakub Ahaddad (Krosno),
- Konrad Szymański (Kraków),
- Maciej Głowacki (Krosno),
- Damian Mazurek (Lublin),
- Szymon Popławski (Białystok),
- Martyna Chruślińska (Szczecin),
- Remigiusz Lewandowski (Sielce),
- Małgorzata Kaczmarczyk (Wrocław),
- Przemysław Gumieny (Knurów),
- Ewelina Kucal (Radziejów),
- Henryka Netzel (Wrocław),
- Piotr Staroń (Kraków).



Wyniki XIX Olimpiady Informatycznej

W dniach od 27 do 30 marca 2012 r. w Trójmieście odbyły się zawody III stopnia XIX Olimpiady Informatycznej. Do finału zostało zakwalifikowanych rekordowo wielu, bo aż 100 zawodników. W ciągu dwóch dni zawodów finałowych zawodnicy mieli do rozwiązania w sumie sześć zadań programistycznych ocenianych od 0 do 100 punktów.

Komitet Główny przyznał łącznie 30 tytułów laureata i wyróżnił zawodników, którzy uzyskali co najmniej 150 punktów. Poniżej publikujemy listę nagrodzonych zawodników (w nawiasach liczba zdobytych punktów, szkoła oraz opiekun naukowy):



Laureaci I miejsca

1. **Karol Farbiś** (464, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6 im. J. Kochanowskiego, Radom, opiekun naukowy: Mirosław Mortka, Marcin Andrychowicz)

2. **Wojciech Nadara** (461, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Bartosz Szreder)

3.–4. **Bartłomiej Dudek** (450, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Marcin Dublański, Damian Rusak, Dawid Matla)

Wiktor Kuropatwa (450, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Lech Duraj, Adam Polak)

5. **Mateusz Gołębiewski** (442, Zespół Szkół nr 14, Wrocław, o.: Dawid Matla, Damian Rusak)

6.–7. **Krzysztof Pszeniczny** (430, Gimnazjum i Liceum im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek, Rzeszów, o.: Grzegorz Owsiany)

Bartosz Tarnawski (430, Katolickie Liceum Ogólnokształcące, Katowice, o.: Antoni Salamon)

8. **Marcin Smulewicz** (426, Liceum Ogólnokształcące im. B. Prusa, Skierniewice)

Laureaci II miejsca

9. **Michał Zając** (367, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Lech Duraj)

10. **Mateusz Kopeć** (350, I Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza, Białystok, o.: Ireneusz Bujnowski, Iwona Bujnowska)

11.–12. **Michał Łowicki** (334, Liceum Ogólnokształcące nr III, Wrocław, o.: Michał Śliwiński)

Szymon Stankiewicz (334, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6 im. J. Kochanowskiego, Radom, o.: Mirosław Mortka, Marcin Andrychowicz)

13. **Szymon Łukasz** (310, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Grzegorz Herman, Andrzej Dyrek)

14. **Przemysław Jakub Kozłowski** (307, Społeczne Liceum Ogólnokształcące i Społeczne Gimnazjum nr 8 STO, Białystok, o.: Ireneusz Bujnowski, Iwona Bujnowska)

15. **Sebastian Daniel Nowak** (301, I Liceum Ogólnokształcące im. A. Mickiewicza, Białystok, o.: Ireneusz Bujnowski, Iwona Bujnowska)

16. **Stanisław Dobrowolski** (286, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska)

17. **Konrad Paluszek** (282, Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42, Warszawa)

18. **Kamil Żyła** (280, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

19. **Jakub Kołodziej** (278, I Liceum Ogólnokształcące im. W. Kętrzyńskiego, Giżycko, o.: Evelyn Jelec)

Laureaci III miejsca

20.–23. **Wojciech Janczewski** (250, I Liceum Ogólnokształcące im. T. Kościuszki, Legnica, o.: Romualda Laskowska, Marcin Panasiuk)

Konrad Kijewski (250, I Liceum Ogólnokształcące im. M. Konopnickiej, Suwałki, o.: Marek Gałaszewski)

Błażej Magnowski (250, III Liceum Ogólnokształcące im. Marynarki Wojennej RP, Gdynia, o.: Ryszard Szubartowski)

Rafał Stefański (250, XIV Liceum Ogólnokształcące im. S. Staszica, Warszawa, o.: Joanna Śmigielska, Maciej Matraszek)

24. **Krzysztof Kiewicz** (236, VIII Liceum Ogólnokształcące i 58 Gimnazjum im. Władysława IV, Warszawa, o.: Agnieszka Samulska)

25. **Wojciech Szalapski** (233, I Liceum Ogólnokształcące im. S. Żeromskiego, Ozorków)

26. **Aleksander Kramarz** (231, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6, Bydgoszcz, o.: Małgorzata Piekarska, Krzysztof Hyżyk)

27.–28. **Piotr Bejda** (230, V Liceum Ogólnokształcące im. A. Witkowskiego, Kraków, o.: Lech Duraj, Adam Polak)

Paweł Nowak (230, XIII Liceum Ogólnokształcące, Szczecin, o.: Czesław Drozdowski)

29. **Łukasz Majcher** (225, Ponadgimnazjalne IV Liceum Ogólnokształcące, Rzeszów, o.: Robert Świder, Grzegorz Owsiany)

30. **Michał Kowalczyk** (217, Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 6, Bydgoszcz, o.: Małgorzata Piekarska, Maciej Borsz)

Finałiści z wyróżnieniem

Krzysztof Kleiner (208, V LO, Kraków), Piotr Jarosz (200, I LO, Ciechanów), Marek Sokołowski (200, I LO, Łomża), Grzegorz Białek (198, ZSO nr 6, Bydgoszcz), Krzysztof Kulig (198, V LO, Kraków), Kamil Rychlewicz (194, I LO, Łódź), Michał Piekarz (189, V LO, Kraków), Stanisław Barzowski (183, III LO, Gdynia), Grzegorz Świrski (175, V LO, Kraków), Paweł Tabaszewski (174, XIV LO, Warszawa), Andrzej Białokozowicz (168, I LO, Białystok), Leszek Kania (168, V LO, Kraków), Konrad Cichy (166, LO nr III, Wrocław), Michał Kownacki (161, ZS nr 14, Wrocław), Maciej Kacprzak (154, VIII LO, Warszawa), Antoni Zawodny (150, XIV LO, Warszawa).



LXIII Olimpiada Matematyczna

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 1409 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 622 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 104 uczniów. Komitet Główny Olimpiady Matematycznej na posiedzeniu w dniu 20 kwietnia br. postanowił przyznać 24 osobom tytuł laureata oraz nagrody pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia, zaś 3 osobom – wyróżnienie.

Laureatami LXIII OM zostali (w nawiasie podano liczbę uzyskanych punktów na 36 możliwych):



Nagroda stopnia pierwszego

Maciej Dulęba (36) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Nagrody stopnia drugiego

Igor Kotrański (30) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Wojciech Nadara (30) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Nagrody stopnia trzeciego

Łukasz Bożyk (26) – VI Liceum Ogólnokształcące im. Tadeusza Reytana w Warszawie

Grzegorz Białek (24) – VI Liceum Ogólnokształcące im. Jana i Jędrzeja Śniadeckich w Bydgoszczy

Karol Kaszuba (24) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Michał Zając (24) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Paweł Nałęcz-Jawecki (23) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Michał Seweryn (23) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Nagrody stopnia czwartego

Damian Rupa (19) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

Teodor Jerzak (18) – IV Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Rzeszowie

Sławomir Kubicki (18) – I Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Dubois w Koszalinie

Adam Malinowski (18) – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

Barbara Mroczek (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Anna Olech (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Konrad Jan Paluszek (18) – Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42 w Warszawie

Kamil Rychlewicz (18) – I Liceum Ogólnokształcące im. Mikołaja Kopernika w Łodzi

Bartłomiej Żak (18) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Paweł Kura (17) – VIII Liceum Ogólnokształcące im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach

Anna Siennicka (17) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Stanisława Staszica w Warszawie

Marcin Smulewicz (17) – Liceum Ogólnokształcące im. Bolesława Prusa w Skierniewicach

Kacper Świerzowicz (17) – Liceum Ogólnokształcące im. Jana Pawła II Sióstr Prezentek w Rzeszowie

Grzegorz Adamski (16) – I Liceum w Szamotułach

Kajetan Ożarowski (16) – XIV Liceum Ogólnokształcące im. Polonii Belgijskiej we Wrocławiu

Wyróżnienia

Grzegorz Głuch (14) – III Liceum Ogólnokształcące im. Adama Mickiewicza we Wrocławiu

Janusz Schmude (14) – IV Liceum Ogólnokształcące Zespołu Szkół Ogólnokształcących nr 4 im. Tadeusza Kościuszki w Toruniu

Michał Ziobro (14) – V Liceum Ogólnokształcące im. Augusta Witkowskiego w Krakowie

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej dziękuje wszystkim, którzy pomagali laureatom i wyróżnionym uczniom w przygotowaniach do zawodów.

VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W zawodach stopnia pierwszego wzięło udział 14 176 uczniów, do zawodów stopnia drugiego zakwalifikowano 1403 uczniów, a do zawodów stopnia trzeciego – 214 uczniów.

Komitet Główny Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów na posiedzeniu w dniu 17 marca br. postanowił przyznać 149 osobom tytuł laureata pierwszego, drugiego, trzeciego i czwartego stopnia.

Tytuł laureata pierwszego stopnia otrzymali:

Anna Czerwińska – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie

Konrad Majewski – Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42 w Warszawie

Dariusz Marzec – Gimnazjum w Otmuchowie

Marcin Michorzewski – Zespół Szkół Ogólnokształcących nr 7 w Szczecinie

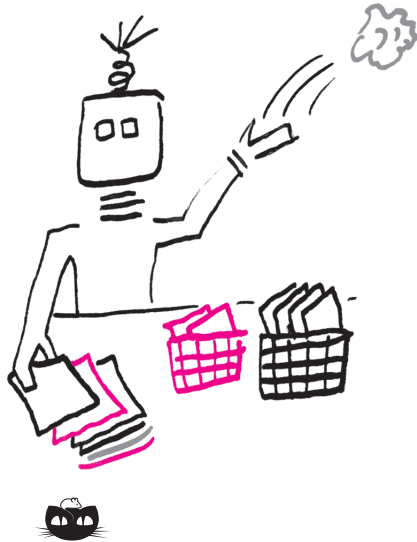
Paweł Milczek – Gimnazjum nr 24 w Gdyni

Konrad Paluszek – Gimnazjum z Oddziałami Dwujęzycznymi nr 42 w Warszawie

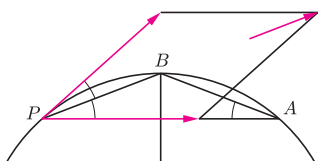
Oskar Szymański – Katolickie Gimnazjum im. św. Stanisława Kostki w Kielcach

Jan Tabaszewski – Zespół Szkół nr 51 im. Ignacego Domeyki w Warszawie

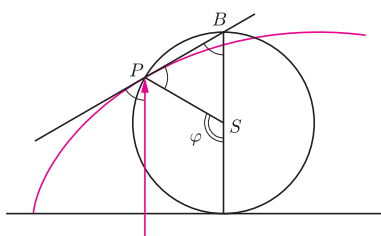




Rozwiązanie zadania F 813. Styczna do cykloidy w każdym punkcie P przechodzi przez najwyższy punkt wyznaczającego ją okręgu. Istotnie, ponieważ nie ma poślizgu, więc prędkości ruchu „obrotowego” i postępowego są równej długości, a ich wypadkowa (czyli wektor styczny) jest dwusieczną kąta między nimi.



Prosta pozioma przechodząca przez punkt P przecina okrąg w punkcie A . Pionowa średnica okręgu przecina go u góry w punkcie B . Z symetrii mamy $\sphericalangle PAB = \sphericalangle APB$, ale kąt PAB jako wpisany równy jest kątowi dopisanemu między cięciwą PB i styczną do okręgu w P . Zatem PB jest dwusieczną kąta między wektorami.



Rozpatrzmy punkt P powstały po obrocie okręgu o kąt φ . Niech S będzie środkiem okręgu. Wówczas $\sphericalangle SPB = \sphericalangle SBP = \varphi/2$. Pionowy promień jest równoległy do SB i tworzy ze styczną ten sam kąt co SB , a więc ten sam co SP , co kończy dowód.

Mogłoby się wydawać, że ponieśliśmy porażkę – tyle wysiłku, a na końcu i tak algorytm jest kwadratowy. Możemy jednak osiągnąć lepszą złożoność czasową, jeśli tylko dostrzeżemy mocną stronę naszego algorytmu: otóż na samym początku jest on bardzo szybki. Koszt pierwszych k kroków algorytmu to $O(k^2)$. Przyjmijmy $k = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$; wówczas podane kroki wykonujemy w czasie $O(n)$. Kolejne kroki byłyby bardziej kosztowne, dlatego zamiast nich zrobimy... porządek. Możemy mianowicie wypisać *explicite* wszystkie wyrazy ciągu powstałego po k odwróceniach, ponumerować je kolejno, wyznaczyć od nowa tablicę indeksów poszczególnych

Informatyczny kącik olimpijski (52): Robot sortujący

Tym razem omówimy zadanie *Robot sortujący* (ang. *Robotic Sort*) z Mistrzostw Europy Środkowej w Programowaniu Zespołowym 2007 (CERC 2007). W zadaniu występuje nietypowy algorytm sortowania n -elementowego ciągu liczb całkowitych. W i -tym kroku (dla $i = 1, \dots, n$) znajdujemy w ciągu i -ty najmniejszy element; założmy, że znajduje się on na pozycji j_i . Następnie odwracamy fragment ciągu znajdujący się między pozycjami i -tą a j_i -tą i w ten sposób rozważany element trafia na docelową pozycję w posortowanym ciągu. Naszym zadaniem jest efektywnie zasymulować ten algorytm, a dokładniej, wyznaczyć ciąg pozycji j_1, \dots, j_n . Przykładowo, jeśli ciągiem do posortowania jest 3, 4, 5, 1, 6, 2, to wynikowy ciąg pozycji odpowiadających prawym końcom kolejnych odwróceń to 4, 6, 4, 5, 6, 6. Dla uproszczenia założymy, że wyjściowy ciąg jest permutacją liczb $1, \dots, n$. W oryginalnym zadaniu ciąg nie musiał być różnowartościowy, ale sprowadzenie ogólnego przypadku do przypadku permutacji jest całkiem proste.

Bezpośrednia implementacja algorytmu sortowania przez odwracanie ma złożoność czasową $\Theta(n^2)$. Można się o tym przekonać, sprawdzając działanie algorytmu dla ciągu 2, 4, 6, 8, ..., 7, 5, 3, 1 – właśnie w tym przypadku wykonujemy największą liczbę operacji.

W takim razie spróbujemy zastosować jakieś inne podejście. Ponumerujemy elementy ciągu po kolei, od lewej do prawej, od 1 do n . Założmy, że najmniejszy element ciągu znajduje się na pozycji a . Wówczas po pierwszym odwróceniu elementy ciągu będą ustawione w następującej kolejności:

$$a, a-1, \dots, 1, a+1, a+2, \dots, n.$$

Widzimy, że tak naprawdę struktura ciągu zmieniła się dosyć nieznacznie. Jeśli teraz drugi najmniejszy element znajdował się, przykładowo, na pozycji $b < a$, to po drugim odwróceniu ciąg będzie miał postać:

$$a, b, b+1, \dots, a-1, b-1, b-2, \dots, 1, a+1, a+2, \dots, n.$$

Domyślamy się już, co będzie dalej. Po i -tym odwróceniu ciąg będzie miał postać

$$s_1, s_2, \dots, s_i, (a_1, b_1, r_1), (a_2, b_2, r_2), \dots, (a_m, b_m, r_m),$$

dla pewnego $m \leq i$, przy czym s_1, \dots, s_i to numery i najmniejszych elementów ciągu, zaś (a_j, b_j, r_j) oznacza ciąg liczb a_j, a_j+1, \dots, b_j ustawionych w takim właśnie porządku (jeśli $r_j = 0$) lub odwrotnie, malejąco (jeśli $r_j = 1$).

Zauważmy, że używając takiej reprezentacji, kolejne odwrócenie w ciągu możemy wykonać w czasie $O(m)$, o ile tylko będziemy dla każdego elementu $1, \dots, n$ pamiętać, na której pozycji wyjściowego ciągu się znajdował (oznaczenie: $p[i]$). Założmy, że $p[i+1] = k$. Znajdujemy teraz taką grupę (a_j, b_j, r_j) , że $k \in [a_j, b_j]$, rozbijamy ją na dwie, a następnie między te dwie części wstawiamy, odwrócone, wszystkie wcześniejsze grupy. Przykładowo, jeśli $r_j = 0$, to wynikowy ciąg ma postać:

$$s_1, s_2, \dots, s_i, k, (a_j, k-1, 1), (a_{j-1}, b_{j-1}, 1-r_{j-1}), \dots, (a_1, b_1, 1-r_1), \\ (k+1, b_j, 0), (a_{j+1}, b_{j+1}, r_{j+1}), \dots, (a_m, b_m, r_m).$$

Przypadek $r_j = 1$ rozpatrujemy analogicznie. Po każdej operacji przybywa co najwyżej jedna grupa – być może zero, jeśli k znajdowało się na skrajcu grupy (a_j, b_j, r_j) . To jednak oznacza, że liczba grup może rosnąć liniowo, więc koszt czasowy całego algorytmu może być rzędu $\Theta(n^2)$. Pozostawiamy Czytelnikowi znalezienie złośliwego przykładu, wymuszającego wykonanie takiej liczby operacji – co ciekawe, poprzednio podany złośliwy przykład nie ma tej własności.

elementów w ciągu (p) i kolejne odwrócenia wykonywać już za pomocą nowego ciągu.

Uporządkowanie ciągu po \sqrt{n} odwróceniach zajmuje czas $O(n)$, taki sam jak symulacja tych \sqrt{n} odwróceń. W trakcie całego algorytmu takich większych faz musimy wykonać mniej więcej \sqrt{n} , co daje łączną złożoność czasową $O(n\sqrt{n})$.

Na koniec warto dodać, że całe zadanie można rozwiązać także w czasie $O(n \log n)$, używając struktur danych opartych na drzewach zrównoważonych. Jednak takie rozwiązanie nie było nigdy autorowi kącika do szczęścia potrzebne.

Jakub RADOSZEWSKI

Wyznaczanie wysokości wzgórz na powierzchni Księżyca

Andrzej BRANICKI*

Terminator to granica między oświetloną i nieoświetloną częścią Księżyca lub planety. Płaszczyzna terminatora jest prostopadła do kierunku Księżyc-Słońce.

Zdjęcia Księżyca można znaleźć na przykład na stronie <http://legault.perso.sfr.fr/quarters.html> lub <http://www.astrosurf.com/cidadao/moon.htm>.

Cienie widoczne na tarczy Księżyca są cennym źródłem informacji o ukształtowaniu jego powierzchni. Widoczna z Ziemi długość cienia dowolnego wzniesienia zależy od fazy Księżyca. Największa jest wtedy, gdy w pobliżu nierówności, rzucającej cień, przebiega linia terminatora. Najbardziej „chropowaty” Księżyc zobaczymy wtedy, gdy jasna jest połowa tarczy, natomiast w czasie pełni jego powierzchnia wydaje się zupełnie płaska. Pomiar kątowej długości cienia umożliwia wyznaczenie wysokości wzniesienia względem powierzchni, na którą ów cień pada. Pomiarów możemy dokonywać na podstawie bezpośrednich obserwacji wizualnych oraz zdjęć Księżyca wykonanych samodzielnie lub dostępnych w Internecie.

Zadanie postawione w tytule jest bardzo łatwe do rozwiązania w przypadku, gdy widzimy dokładnie połowę tarczy Księżyca (rys. 1). Załóżmy, że wzniesienie W leży w płaszczyźnie wyznaczonej przez środki Słońca i Księżyca oraz położenie ziemskiego obserwatora. Z trójkąta, w którym jedną z przyprostokątnych jest wysokość wzgórza H (patrz: powiększony szczegół po prawej stronie rysunku 1), wynika, że

$$(1) \quad H = r \varepsilon_{\perp} \sin h,$$

gdzie r oznacza odległość Ziemia-Księżyc, ε_{\perp} – obserwowaną kątową długość cienia wzniesienia, zaś h – kątową wysokość Słońca ponad horyzontem w miejscu, w którym położone jest wzniesienie. Symbole opatrzone „ \perp ” dotyczą chwili, gdy patrzymy na Księżyc prostopadle do kierunku Księżyc-Słońce (gdy Księżyc jest w pierwszej lub ostatniej kwadrze). Gdy r oznacza odległość Ziemia-Księżyc, R – promień Księżyca (w dalszych rozważaniach jego wartość przyjmijmy za daną) i δ – kątowy promień jego tarczy, mamy $r = R/\delta$. Wobec tego zależność (1) można zapisać w postaci:

$$H = R \frac{\varepsilon_{\perp}}{\delta} \sin h.$$

W omawianym przypadku wysokość Słońca ponad horyzontem h w miejscu, w którym znajduje się wzniesienie, jest łatwa do wyznaczenia. Jest ona równa kątowi między płaszczyzną terminatora a prostą łączącą środek Księżyca i wzniesienie. Skoro tak, to

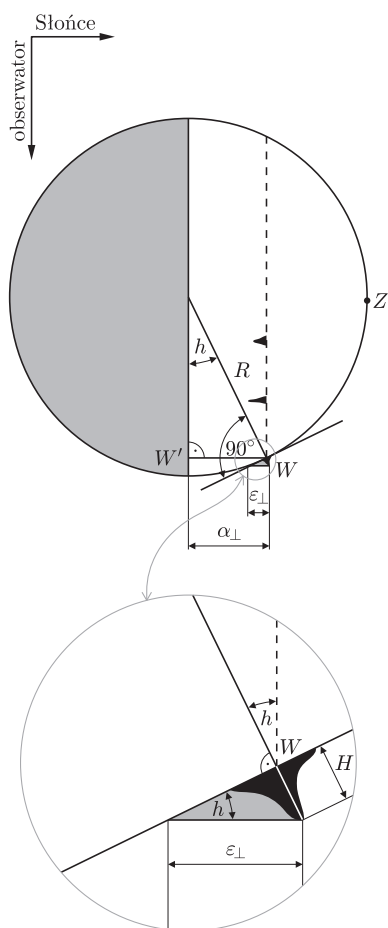
$$\sin h = \frac{|WW'|}{R} = \frac{r \alpha_{\perp}}{R} = \frac{\alpha_{\perp}}{\delta},$$

gdzie α_{\perp} jest kątową odległością wzniesienia W od płaszczyzny terminatora, czyli

$$(2) \quad H = R \frac{\varepsilon_{\perp}}{\delta} \frac{\alpha_{\perp}}{\delta}.$$

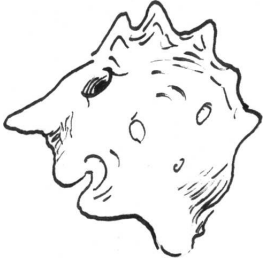
W przedstawionej sytuacji wyznaczenie wysokości wzniesienia wymagało będzie zmierzenia kątowej średnicy tarczy Księżyca δ , kątowej długości cienia wzniesienia ε_{\perp} oraz kątowej odległości tego wzniesienia od płaszczyzny terminatora α_{\perp} .

Otrzymane rozwiązanie dotyczy bardzo szczególnej chwili, gdy oświetlona jest dokładnie połowa tarczy Księżyca, oraz szczególnej lokalizacji wzniesienia. Wystarczy jednak chwila zastanowienia, by usunąć drugie z wymienionych ograniczeń. Zauważmy bowiem, że płaszczyzna horyzontu jest w każdym miejscu styczna do globu, czyli jest prostopadła do kierunku ku centrum globu (patrz rys. 1). Skoro tak, to wysokość h Słońca ponad horyzontem w dowolnym miejscu globu jest równa kątowi między kierunkiem ku centrum globu i płaszczyzną terminatora. Oznacza to, że ma ona jednakową wartość we wszystkich miejscach globu, które są równoodległe od płaszczyzny terminatora. Punkty o jednakowej wartości h tworzą na powierzchni Księżyca okręgi równoległe do płaszczyzny terminatora, których środki są położone na prostej łączącej środki Księżyca i Słońca. Największym z tych okręgów jest terminator, dla którego $h = 0$. Kątowa wysokość Słońca wzrasta ze wzrostem odległości od terminatora. W punkcie Z Słońce jest w zenicie. Zależność (2) można zatem stosować do wyznaczania wysokości wzniesienia położonego w dowolnym miejscu tarczy, lecz tylko wtedy, gdy Księżyc jest bliski pierwszej lub ostatniej kwadry.



Rys. 1. Wzniesienie na powierzchni Księżyca i rzucony przez nie cień. Płaszczyznę rysunku wyznaczają środki Słońca i Księżyca oraz położenie ziemskiego obserwatora. Wszystkie wzniesienia W , leżące na okręgu, którego płaszczyzna jest równoległa do płaszczyzny terminatora (na rysunku jest to linia przerywana), są oświetlane przez Słońce pod tym samym kątem ($h = \text{const}$).

*Wydział Fizyki, Uniwersytet w Białymstoku



Rozwiązanie (2) pozostaje jednak mało użyteczne ze względu na pierwsze z wymienionych ograniczeń. Okresy, w których Księżyc położony jest blisko prostokątnego narożnika trójkąta, są krótkie i mogą pokrywać się z okresami niepogody. Nietrudno jest jednak otrzymać rozwiązanie ogólniejsze.

Jeśli licznik i mianownik zależności (2) pomnożymy przez r^2 , dostaniemy

$$H = \frac{(r\varepsilon_{\perp})(r\alpha_{\perp})}{R}$$

Poczyny $r\varepsilon_{\perp}$, $r\alpha_{\perp}$ są odcinkami równoległymi do kierunku Księżyc–Słońce. Gdy widzimy połowę tarczy Księżyca, to na odcinki te patrzymy prostopadle.

Przy innej fazie patrzymy na nie pod pewnym kątem f (wartości $f = 0$ odpowiada pierwsza kwadra, $f = 90^\circ$ – pełnia, $f = 180^\circ$ – ostatnia kwadra, $f = 270^\circ$ – nów). Rysunek 2 przedstawia sytuację, gdy Księżyc jest w fazie między pierwszą kwadrą i pełnią. Wynika z niego następująca zależność między długością odcinków $r\varepsilon$ i $r\alpha$ oraz $r\varepsilon_{\perp}$ i $r\alpha_{\perp}$:

$$\frac{r\varepsilon}{r\varepsilon_{\perp}} = \cos f, \quad \frac{r\alpha}{r\alpha_{\perp}} = \cos f.$$

Zależności te pozwalają uogólnić wzór (2) dla dowolnej fazy Księżyca:

$$(3) \quad H = R \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\alpha}{\delta} \frac{1}{\cos^2 f}.$$

Widać, że zależność wysokości wzgórza H od kąta f jest słaba dla niewielkich jego wartości. Przyjmijmy np., że $|f| \approx 13^\circ$, co odpowiada odstępowi około 1 doby od pierwszej lub ostatniej kwadry. Kształt jasnej części Księżyca, odpowiadający tym chwilom, jest pokazany na rysunku 3. Użycie zależności (2) zamiast (3) jest wtedy źródłem błędu względnego rzędu 5%. Tymczasem rozmycie granicy cienia i linii terminatora skutkuje dużymi błędami pomiaru kątów ε i α , czego finalnym skutkiem jest względny błąd wartości H nie mniejszy niż 10%. Wynika stąd, że do wyznaczania wysokości wzniesień w chwilach bliskich momentowi, gdy widoczna jest połowa tarczy Księżyca, można wykorzystywać zależność (2).

Jeśli kształt jasnej części Księżyca będzie wyraźnie różnił się od połowy okręgu, to na podstawie rysunku 4 możemy sformułować zależność umożliwiającą wyznaczenie wartości kąta f i uwzględnienie jej w zależności (3)

$$\sin f = \frac{r\beta}{R} = \frac{\beta}{\delta}.$$

Tak więc dla dowolnej fazy Księżyca (dowolnej wartości kąta f) zależność (3) wygląda następująco:

$$H = R \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\alpha}{\delta} \frac{1}{(1 - (\beta/\delta)^2)},$$

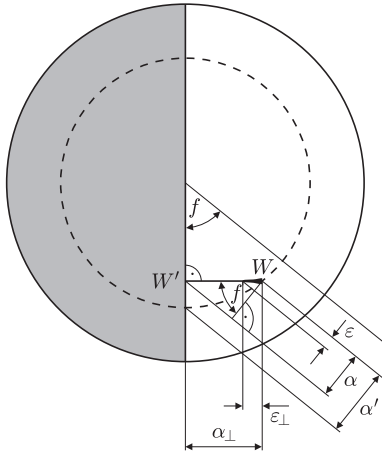
Ponieważ w praktyce znacznie łatwiej można zmierzyć kąt γ niż β , zależność powyższą – pamiętając, że $\gamma = \delta + \beta$ – możemy zapisać jako funkcję kąta γ :

$$(4) \quad H = R \frac{\varepsilon}{\delta} \frac{\alpha}{\delta} \frac{1}{(\gamma/\delta)(2 - \gamma/\delta)}.$$

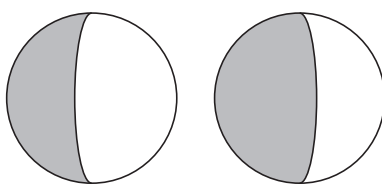
Krótkiego komentarza wymaga jeszcze problem pomiaru kąta α . Jak wynika z rysunku 2, jest to kąt, pod jakim widoczny jest odcinek WW' , gdzie W' jest rzutem punktu W na płaszczyznę terminatora (punkt W' jest położony pod powierzchnią Księżyca). Dokładny pomiar tego kąta nie jest więc możliwy poza szczególnym przypadkiem, gdy widoczna jest dokładnie połowa tarczy Księżyca. Wtedy bowiem punkt W' będzie położony dokładnie na linii terminatora, tzn. $\alpha = \alpha'$. Jeżeli obserwacji dokonano w chwili bliskiej momentowi wystąpienia pierwszej lub ostatniej kwadry, to punkt W' będzie znajdował się bardzo blisko terminatora, w odległości niewiele większej niż nieostryść jego granicy. Możemy wtedy przyjąć, że $\alpha \cong \alpha'$. Zauważmy jednak, że również dla dowolnej fazy Księżyca problem określenia wartości α rozwiązuje się sam. Cienie wzgórz dostatecznie długie, by można było mierzyć je w miarę dokładnie, są widoczne tylko blisko terminatora, a wtedy punkt W' również będzie bardzo blisko linii terminatora. Skoro tak, to niezależnie od fazy Księżyca możemy przyjmować, że $\alpha \cong \alpha'$.

Przyglądając się zależności (4), będącej rozwiązaniem postawionego zadania, warto zauważyć, że wielkości kątowe występują w niej wyłącznie w postaci ilorazów.

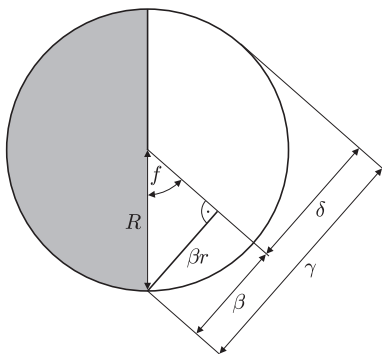
Słońce
obserwator



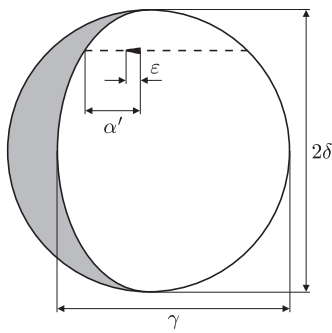
Rys. 2. Obserwowana kątowa długość odcinka $|WW'|$ (α) oraz długość cienia (ε) zależą od kąta f (czyli od fazy Księżyca). Okrąg narysowany linią przerywaną jest śladem przecięcia z globem Księżyca płaszczyzny równoległej do płaszczyzny rysunku i przechodzącej przez wzniesienie. Ślad ten dla ziemskiego obserwatora będzie odcinkiem prostopadłym do prostej łączącej punkty kontaktu terminatora z brzegiem tarczy Księżyca.



Rys. 3



Rys. 4. Kąt f można wyznaczyć, mierząc kąty β i δ bądź γ i δ .



Rys. 5. Kąty, które należy zmierzyć, aby wyznaczyć wysokość wzniesienia. Linia przerywana łączy punkty jednakowo odległe od płaszczyzny wyznaczonej przez położenie obserwatora, środka Księżyca i środka Słońca.



Rozwiązanie zadania M 1353.

Zauważmy, że

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n(n-1)},$$

ale

$$\frac{1}{k} - \frac{1}{l+1} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) + \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l+1}\right) = \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} + \dots + \frac{1}{l(l+1)},$$

zatem wystarczy przyjąć $k = n - 1$, $l = n(n - 1) - 1$.

зберігається властивість зростаючої
 бієспрохідної функції і деякі бієспрохідні
 функції: в бієспрохідній функції
 яка функція і інші бієспрохідні бієспрохідні
 в: бієспрохідні і інші бієспрохідні бієспрохідні

Więcej szczegółów o algorytmie RSA i o teście Millera–Rabina można przeczytać m.in. w książkach *Wprowadzenie do algorytmów* T. Cormena, R. Leisersona, R. Rivesta i C. Steina oraz *Kryptografia. W teorii i w praktyce* D. Stinsona.

* doktorant, Instytut Informatyki, Uniwersytet Warszawski

Dzięki temu do wyznaczenia wysokości wzniesienia nie jest potrzebna znajomość kątowej skali obrazu Księżyca obserwowanego w lunecie bądź kątowej skali fotografii Księżyca. Otrzymane zależności są, oczywiście, prawdziwe dla dowolnego kulistego obiektu oświetlonego odległym, niemal punktowym źródłem światła.

* * *

Jeśli R uznamy za wielkość znaną, to do wyznaczenia wysokości wzniesienia konieczne będzie zmierzenie czterech kątów: ε , α' , γ , δ (rys. 5). Można je zmierzyć w trakcie bezpośredniej obserwacji wizualnej lub wykorzystując do pomiarów zdjęcie Księżyca.

Zrobienie zdjęcia Księżyca, umożliwiające wykonanie niezbędnych pomiarów z rozsądną dokładnością, wymaga użycia obiektywu o ogniskowej zbliżonej do 1 m. Rolę takiego obiektywu spełniają zazwyczaj obiektyw lunety lub zwierciadło teleskopu. Decydujący wpływ na dokładność pomiaru ma wielkość i ostrość obrazu Księżyca. Ze względu na drgania układu fotografującego powodowane powiewami wiatru i turbulencją atmosferyczną czas naświetlania nie powinien przekraczać 1/30 sekundy. Ponieważ jedną z mierzonych wielkości jest promień tarczy Księżyca, a wielkość tę można wyznaczyć najdokładniej, mierząc średnicę tarczy, zdjęcie powinno obejmować całą oświetloną część tarczy.

Bezpośredni (wizualny) pomiar kątów ε , α' , γ , δ będzie wymagał użycia lunety lub teleskopu umożliwiające osiągnięcie ponad stokrotnego powiększenia. Typując wzniesienia przewidziane do pomiaru, należy wybierać takie, których otoczenie wydaje się w miarę płaskie i poziome. Jedyną wskazówką, umożliwiającą ocenę stopnia spełnienia tego warunku, jest światłocieniowy obraz otoczenia. Jeśli zależy nam na zmierzeniu wysokości konkretnego wzniesienia, należy poczekać na wieczór, w którym znajdzie się ono w pobliżu terminatora.

Test na liczbę pierwszą

Wojciech CZERWIŃSKI*

Chyba wszyscy lubimy liczby pierwsze. Szczególne wrażenie robią te naprawdę duże, wydają się skrywać w sobie jakąś nadzwyczajną tajemnicę: dlaczego akurat one stały się swego rodzaju wybranymi spośród innych liczb i mają tak niezwykle właściwości?

Matematycy od dawna zastanawiają się, jak sprawdzać, czy liczba jest pierwsza. Dawniej robili to tylko (a może aż) z ciekawości i poczucia doniosłości zadania. W dzisiejszych czasach mają także bardziej praktyczne motywacje. Przykładowo, na potrzeby algorytmu RSA chcielibyśmy umieć sprawdzać, czy liczba mająca około 500 cyfr jest pierwsza, czy też złożona.

Powszechnie stosowany i w praktyce najszybszy jest test pierwszości Millera–Rabina (w skrócie test MR), wymyślony w 1980 roku. Wykorzystuje on losowość i opiera się na następującym pomysle. Powiedzmy, że chcemy sprawdzić, czy liczba n jest pierwsza. Okazuje się, że jeżeli n jest złożona, to co najmniej połowa liczb ze zbioru $\{1, 2, \dots, n - 1\}$ jest *świadkami złożoności* tej liczby (to zresztą bardzo mało dokładne oszacowanie). Nazwa bierze się stąd, że jeżeli dla pewnej liczby n istnieje liczba $1 \leq a \leq n - 1$ będąca jej świadkiem złożoności, to wiadomo, że n jest liczbą złożoną.

Stosunkowo łatwo jest sprawdzić, czy dana liczba a jest świadkiem złożoności dla n , ale nie będziemy teraz wchodzić w szczegóły, co to znaczy i jak się to robi. Co więcej, odpowiednie obliczenia można wykonać szybko – jeżeli liczba n ma k cyfr, to algorytm sprawdzający, czy a jest świadkiem złożoności dla n , wykonuje mniej więcej k^3 operacji. To znaczy, że dla n będącej liczbą pięćsetcyfrową wykona on mniej więcej 500^3 , czyli 125 milionów operacji. Nasz domowy komputer potrzebuje na to mniej więcej jednej setnej sekundy – czyli nie jest źle.

οδηγεῖς τὴν ἀπόδειξη: ἢ σο φέρει;
 ἢ ἂν τοῦ ἀριθμοῦ – φέρει; κοινός; ἢ
 ἢ ἂν τοῦ ἀριθμοῦ πηλίκου τοῦ ἀριθμοῦ
 ἢ ἂν τοῦ ἀριθμοῦ ποσῶν τοῦ ἀριθμοῦ
 ἢ ἂν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ; ἢ ἂν
 ἢ ἂν τοῦ ἀριθμοῦ τοῦ ἀριθμοῦ;

Zwróćmy uwagę, że jeśli liczba n ma k cyfr, to k jest rzędu $\log n$. Zatem test MR wykonuje *de facto* rzędu $\log^3 n$ operacji. Jednak naturalną miarą wielkości liczby danej na wejściu jest właśnie liczba jej cyfr. Dlatego wymagamy, by algorytm wielomianowy rozwiązujący problem testowania pierwszości wykonywał rzędu $\log^i n$ operacji; n^i to za dużo.



Rozwiązanie zadania M 1352.
 Wykażemy najpierw, że

$$\sum_{k=i}^{i+(n-r)} \binom{k}{i} \binom{n-k}{r-i} = \binom{n+1}{r+1}.$$

Rozważmy w tym celu $(r+1)$ -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, n+1\}$, dla których $t_{i+1} = k+1$. Wtedy $i \leq k \leq n - (r-i)$. Zatem elementy t_1, \dots, t_i i t_{i+2}, \dots, t_{r+1} możemy wybrać na $\binom{k}{i} \binom{n-k}{r-i}$ sposobów. Sumując te możliwości po dozwolonych wartościach k , dostajemy żądany wzór.

Rozważmy teraz r -elementowe podzbiory zbioru $\{1, \dots, n\}$. Takich podzbiorów, dla których $t_i = k$, jest $\binom{k-1}{i-1} \binom{n-k}{r-i}$, gdzie $i \leq k \leq n - r + i$. Zatem średnia arytmetyczna liczb t_i wynosi

$$\frac{1}{\binom{n}{r}} \sum_{k=i}^{n-r+i} k \binom{k-1}{i-1} \binom{n-k}{r-i}.$$

Ale $\binom{k-1}{i-1} = \frac{i}{k} \binom{k}{i}$, więc ta średnia jest równa

$$\begin{aligned} \frac{i}{\binom{n}{r}} \sum_{k=i}^{n-r+i} \binom{k}{i} \binom{n-k}{r-i} &= \\ &= \frac{i}{\binom{n}{r}} \binom{n+1}{r+1} = i \cdot \frac{n+1}{r+1}. \end{aligned}$$

Zatem aby sprawdzić, czy liczba n jest pierwsza, postępujemy tak: losujemy a z przedziału od 1 do $n-1$ i sprawdzamy, czy a jest świadkiem złożoności dla n . Jeżeli jest, to wiemy, że n jest złożona. Jeśli nie, to n przeszła pierwszą próbę i sprawdzamy dalej. Ponieważ dla dowolnego n świadkowie złożoności to przynajmniej połowa liczb z przedziału od 1 do $n-1$, więc prawdopodobieństwo, że liczba złożona n przejdzie pojedynczą próbę, jest nie większe niż $1/2$. Losujemy więc kolejne a i znów sprawdzamy, czy jest ono świadkiem złożoności dla n . Jeżeli liczba n jest złożona, to prawdopodobieństwo przejścia 30 testów bez znalezienia świadka złożoności jest mniejsze niż $1/2^{30}$ (czyli również mniejsze niż $1/10^9$). Po 100 testach prawdopodobieństwo tego, że błędnie uznamy liczbę złożoną za pierwszą, jest już mniejsze niż szansa na to, że w ciągu następnej minuty wielki meteorit uderzy w Ziemię i zakończy wszelkie nasze matematyczne dywagacje. Czyli mamy pewność zupełnie wystarczającą. Przeprowadzenie 100 testów zajmie na domowym komputerze nie więcej niż sekundę – to bardzo niewiele.

Matematykom jednak problem testowania pierwszości nadal nie dawał spokoju. Chcieli mieć metodę dającą pewność absolutną, obliczającą wynik w sensownym czasie, a nie tylko wystarczającą do celów praktycznych.

Powiemy, że algorytm jest *wielomianowy*, jeżeli dla danych rozmiaru k wykonuje co najwyżej $W(k)$ operacji, gdzie W to pewien wielomian. Czyli, na przykład, test MR jest algorytmem wielomianowym, gdyż dla liczby o k cyfrach wykonuje co najwyżej $C \cdot k^3$ operacji dla pewnej stałej C . Algorytmy wielomianowe są umownie uważane za szybkie, a te o większej złożoności – za wolne. W informatyce teoretycznej dla danego problemu bardzo ważnym pytaniem jest, czy da się skonstruować algorytm wielomianowy rozwiązujący go, który podaje poprawną odpowiedź zawsze, a nie tylko z dużym prawdopodobieństwem. Dla problemu testowania pierwszości pytanie to do niedawna było problemem otwartym. Test MR nie jest rozwiązaniem, ponieważ zawiera element losowości.

Chociaż przez wiele lat nie udawało się znaleźć odpowiedzi, większość matematyków wierzyła w istnienie wielomianowego testu pierwszości. Aż wreszcie w roku 2002 trzech naukowców z Uniwersytetu w Kampurze ogłosiło znalezienie pierwszego takiego algorytmu. Nazwano go algorytmem AKS, od pierwszych liter nazwisk twórców: Agrawal, Kayal, Saxena. To był wielki sukces – kwestia trudności testowania pierwszości została ostatecznie rozstrzygnięta. Autorzy otrzymali za to osiągnięcie m.in. nagrodę Gödla – najbardziej prestiżowe wyróżnienie w dziedzinie informatyki teoretycznej. Co ciekawe, test AKS działa w praktyce wolniej niż test MR. Po pewnych poprawkach dla liczby o k cyfrach wykonuje rzędu k^6 operacji, a oryginalny algorytm jest nawet jeszcze nieco wolniejszy. To nie umniejsza jednak doniosłości wyniku.

Opis algorytmu mieści się na zaledwie kilku stronach, co jest zupełnie niespotykane dla osiągnięć matematycznych tej trudności. Co więcej, używa (po paru poprawkach) jedynie elementarnej matematyki. Opiera się na kilku bardzo sprytnych spostrzeżeniach. Korzystając z okazji, przyjrzyjmy się temu algorytmowi z lotu ptaka. Głównym pomysłem jest następujące spostrzeżenie.

Lemat. Niech $a, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ oraz $\text{NWD}(a, n) = 1$. Wówczas n jest pierwsza wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(1) \quad (x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{n}.$$

Dowód. Kongruencję z lematu rozumiemy jako równość modulo n współczynników przy odpowiednich potęgach x^i . W wyrażeniu $(x+a)^n$ współczynnik przy x^i to $\binom{n}{i} a^{n-i}$. Wystarczy więc zastanowić się, kiedy n dzieli $\binom{n}{i}$ dla $1 \leq i \leq n-1$ oraz czy $a^n \equiv a \pmod{n}$. Gdy n jest pierwsza, to łatwo sprawdzić, że liczby $\binom{n}{i}$ oraz $a^n - a$ są podzielne przez n (ten ostatni fakt to małe twierdzenie Fermata), więc teza jest prawdziwa.

Przypuśćmy teraz, że n jest złożona i liczba pierwsza q dzieli n . Niech m będzie takim maksymalnym wykładnikiem, że $q^m \mid n$. Wówczas jednak mamy

$$q^m \nmid \binom{n}{q} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-q+1)}{q!},$$

gdź q dzieli licznik w m -tej potędze, a mianownik w pierwszej. Liczba q jest względnie pierwsza z a , czyli $q \nmid \binom{n}{q} a^{n-q}$, a zatem $n \nmid \binom{n}{q} a^{n-q}$, co dowodzi tezy również dla liczb złożonych. □

Równość wielomianów $W(x)$ i $V(x)$ modulo pewien wielomian $Z(x)$ oznacza, że reszty z dzielenia wielomianów W i V przez wielomian Z są takie same. Zapis

$$(x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{n, x^r - 1}$$

interpretujemy tak: najpierw obliczamy reszty $r_1(x)$ i $r_2(x)$ z dzielenia wielomianów $(x+a)^n$ i $x^n + a$ przez $x^r - 1$, a następnie porównujemy współczynniki wielomianów r_1 i r_2 – sprawdzamy, czy są przystające modulo n . Inaczej, możemy sprawdzić, czy reszta z dzielenia wielomianu $(x+a)^n - x^n - a$ przez $x^r - 1$ jest wielomianem, którego wszystkie współczynniki są podzielne przez n .

Годомоношъ еккѣшъ мѣрокожсѣ:
оѣбомѣрнѣго флѣкѣтѣ ѣромороснѣго
ѣш ѣкѣ ѣѣт ѣѣносѣѣнѣ боѣѣѣѣ
ѣо мѣрѣѣ ѣѣо ѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ
ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ ѣѣѣѣѣ

Czytelnik zainteresowany szczegółami bez problemu znajdzie w Internecie artykuł autorów algorytmu *Primes is in P*, napisany naprawdę przystępnie i przejrzysto.

By rozstrzygnąć, czy n jest pierwsze, wystarczy więc sprawdzić, czy wielomiany $(x+a)^n$ i $x^n + a$ mają wszystkie współczynniki przystające modulo n . Gdybyśmy jednak sprawdzali je po kolei przy każdej potędze x , to wykonalibyśmy przynajmniej rzędu n operacji. To za dużo, więc trzeba obliczać współczynniki sprytnie.

Kolejny pomysł to sprawdzanie równości (1) modulo wielomian postaci $x^r - 1$ dla pewnego $r \in \mathbb{N}$, czyli

$$(2) \quad (x+a)^n \equiv x^n + a \pmod{n, x^r - 1}.$$

Może się jednak okazać, że niektóre liczby złożone spełniają równość (2), mimo że nie spełniają równości (1). Rozwiązaniem tego problemu jest sprawdzanie (2) dla odpowiednio dobranego r i dla wszystkich dodatnich wartości a , nie większych niż $\lfloor \sqrt{\phi(r)} \log n \rfloor$ (gdzie $\phi(r)$ oznacza liczbę liczb mniejszych od r i względnie pierwszych z r). Okazuje się, że liczba n , spełniająca wszystkie takie równości, musi być pierwsza. Właśnie w wykazaniu prawdziwości tego spostrzeżenia leży główna trudność techniczna dowodu.

Niech $o_r(n)$ będzie taką najmniejszą liczbą k , że $n^k \equiv 1 \pmod{r}$. Algorytm AKS działa według następującego schematu:

1. jeśli $n = a^b$ dla $a \in \mathbb{N}$, $b > 1$, to zwróć ZŁOŻONA
2. znajdź taką najmniejszą liczbę r , że $o_r(n) > \log^2 n$
3. jeśli $1 < \text{NWD}(a, n) < n$ dla jakiegoś $a \leq r$, to zwróć ZŁOŻONA
4. jeśli $n \leq r$, to zwróć PIERWSZA
5. dla a od 1 do $\lfloor \sqrt{\phi(r)} \log n \rfloor$ wykonuj:
jeśli $(x+a)^n \not\equiv x^n + a \pmod{n, x^r - 1}$, to zwróć ZŁOŻONA
6. zwróć PIERWSZA

Bez wielkiej trudności można stwierdzić, że jeśli algorytm zakończy działanie w jednym z pierwszych pięciu kroków, to odpowiedź jest poprawna. Jeżeli zwróci wynik w punkcie 1, to robi, oczywiście, słusznie. Jeżeli znajdzie w punkcie 3 taką liczbę $k = \text{NWD}(a, n)$, że $1 < k < n$, to k jest nietrywialnym dzielnikiem n , czyli istotnie n jest złożona. Z kolei jeżeli w punkcie 4 okaże się, że $n \leq r$, to znaczy, że w punkcie 3 sprawdziliśmy wszystkie $a \leq n$ i każda była względnie pierwsza z n , czyli faktycznie n jest pierwsza. Jeśli w punkcie 5 równość modulo n nie jest spełniona, to nie zachodzi również zależność (1), czyli istotnie n jest złożona. Pozostaje jedna wątpliwość co do poprawności algorytmu: czy wynik zwracany w punkcie 6 jest poprawny?

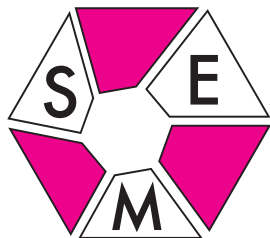
Dowód opiera się na analizie funkcji f oraz liczb $m \in \mathbb{N}$ spełniających równanie

$$f(x)^m \equiv f(x^m) \pmod{x^r - 1, p}$$

dla pewnego konkretnego czynnika pierwszego p liczby n . Jeśli liczba n przeszła testy w punkcie 5, to dla każdej funkcji postaci $f(x) = x + a$ oraz $m = n$ powyższa kongruencja jest prawdziwa. Można wyprowadzić analogiczne zależności dla innych funkcji f i liczb m i, idąc tym tropem, udowodnić, że algorytm słusznie zwraca wynik PIERWSZA w punkcie 6. To rozumowanie pozwala zakończyć dowód poprawności algorytmu, ale wymaga trochę pracy nad szczegółami.

Czytelnik Uważny chciałby pewnie zapytać, czy istotnie algorytm AKS jest wielomianowy. Tę sprawę rozwiązuje lemat, z którego wynika, że dla $n > 2$ istnieje r nie większe niż $\lceil \log^5 n \rceil$ spełniające własność z drugiego kroku algorytmu. Analizując dokładnie dalsze kroki (do czego przydaje się pewne doświadczenie w szacowaniu złożoności), zauważymy, że ten fakt rzeczywiście pozwala na oszacowanie czasu działania algorytmu przez wielomian zależny od $\log n$. Dobrym zadaniem na początek jest znalezienie sposobu wykonania pierwszego kroku w czasie wielomianowym od $\log n$.

Te wyniki nie oznaczają bynajmniej, że cała sprawa liczb pierwszych doczekała się ostatecznego zamknięcia. Istnieje naprawdę ogromnie dużo nierozwiązanych problemów dotyczących liczb pierwszych. Wiele z nich ma także znaczenie praktyczne. Chyba najważniejszym takim problemem jest zagadnienie faktoryzacji liczb, czyli znajdowania ich rozkładu na czynniki pierwsze. Do dziś nie ma dla tego problemu żadnych algorytmów działających w zadowalającym czasie, choćby takich, które wykorzystują losowość, albo nawet takich, które wydają się poprawne, ale na razie nie umiemy tego udowodnić.



VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

W dniu 18 marca 2012 r. zakończyła się VII Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów. W zawodach pierwszego stopnia wzięło udział 14176 uczniów z 1312 szkół, w tym z kilku szkół polskich w Wilnie. Do zawodów drugiego stopnia zakwalifikowano 1403 uczniów z 627 szkół, a do zawodów trzeciego stopnia (finałowych) – 214 uczniów ze 111 szkół.

Zawody finałowe, podczas których uczestnicy zmagali się z pięcioma zadaniami w czasie trzech godzin, odbyły się 17 marca 2012 r. w Warszawie.

Poniżej przedstawiamy dwa zadania z zawodów finałowych. Pierwsze z nich okazało się dla uczestników najłatwiejsze, a drugie – najtrudniejsze.

1. Wyznacz wszystkie takie liczby rzeczywiste x , dla których liczby $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$ są wymierne.

Szkic rozwiązania. Oznaczmy przez a i b odpowiednio liczby wymierne $x + \sqrt{3}$ oraz $x^2 + \sqrt{3}$. Wówczas $x = a - \sqrt{3}$. Stąd otrzymujemy

$$b = (a - \sqrt{3})^2 + \sqrt{3} = (1 - 2a)\sqrt{3} + a^2 + 3,$$

czyli

$$(1 - 2a)\sqrt{3} = b - a^2 - 3.$$

Przypuśćmy, że liczba $1 - 2a$ jest różna od zera. Wówczas

$$\sqrt{3} = \frac{b - a^2 - 3}{1 - 2a}.$$

Liczba po prawej stronie ostatniej równości jest wymierna, jako iloraz dwóch liczb wymiernych. Otrzymujemy więc sprzeczność, z której wynika, że $1 - 2a = 0$. Wobec tego $a = \frac{1}{2}$, czyli $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$.

Bezpośrednio sprawdzamy, że liczba $x = \frac{1}{2} - \sqrt{3}$ spełnia warunki zadania. Na mocy powyższego rozumowania jest to jedyna liczba o żądanej własności.

2. Czy na powierzchni każdego czworościanu można wskazać takie cztery punkty, które są wierzchołkami kwadratu, i z których żadne dwa nie leżą na jednej ścianie tego czworościanu? Odpowiedź uzasadnij.

Szkic rozwiązania. Wykażemy, że takie cztery punkty istnieją w *każdym* czworościanie.

Rozważmy dowolny czworościan $ABCD$, w którym $BC = a$, $AD = b$. Na krawędziach AB , AC , DB i DC wybierzmy odpowiednio takie punkty K , L , M , N , że

$$\frac{AK}{KB} = \frac{AL}{LC} = \frac{DM}{MB} = \frac{DN}{NC} = \frac{b}{a}.$$

Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Talesa wynika, że proste KL i MN są równoległe. Wobec tego punkty K , L , M , N leżą na jednej płaszczyźnie. Ponadto z twierdzenia Talesa obliczamy

$$\frac{KL}{BC} = \frac{AK}{AB} = \frac{b}{a+b},$$

skąd

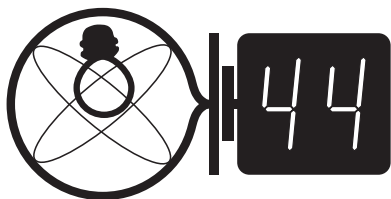
$$KL = BC \cdot \frac{b}{a+b} = \frac{ab}{a+b}.$$

Analogicznie wykazujemy, że każdy z odcinków LN , NM , MK ma długość $ab/(a+b)$. Stąd wniosek, że czworokąt $KLNM$ jest rombem.

Niech P będzie środkiem rombu $KLNM$. Punkty przecięcia prostych, zawierających dwusieczne kątów KPM i MPN , z bokami rombu tworzą wierzchołki czworokąta. Czworokąt ten jest kwadratem, gdyż jego przekątne są równe i przecinają się pod kątem prostym.

Waldemar POMPE

μαθηματικά και φυσική. Η λύση των προβλημάτων θα πρέπει να είναι πλήρης και να περιλαμβάνει τις απαραίτητες εξηγήσεις. Η βαθμολογία των λύσεων θα γίνεται με βάση την ορθότητα των αποτελεσμάτων και την πληρότητα των εξηγήσεων. Η βαθμολογία των λύσεων θα γίνεται με βάση την ορθότητα των αποτελεσμάτων και την πληρότητα των εξηγήσεων.



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2012

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
528 ($WT = 2,25$) i 529 ($WT = 2,40$)
z numeru 12/2011

Marian Łupieżowiec	Gliwice	41,85
Jacek Piotrowski	Rzeszów	41,02
Michał Koźlik	Gliwice	36,95
Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	36,71
Krzysztof Magiera	Łosiów	20,98

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 540, 541

Redaguje Ewa CZUCHRY

540. Po poziomym torze rusza z miejsca długi pociąg towarowy i na drodze $l = 1$ km osiąga prędkość $v = 60$ km/h. Lokomotywa ma masę $M = 200$ ton, a każdy z czteroosiowych wagonów o masie $m_1 = 20$ ton ma ładowność $m_2 = 80$ ton i koła o promieniu $r = 500$ mm. Ile maksymalnie obciążonych wagonów może mieć ten pociąg?

541. Szklana kulka o średnicy 5 mm znajduje się roztworze gliceryny. W chwili początkowej kulka ta została upuszczona i zaczęła spadać. Znaleźć początkowe przyspieszenie i prędkość graniczną, jaką osiągnie kulka.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2012

Redaguje Jerzy B. BROJAN

Przypominamy treść zadań:

532. Ciężarek o masie m_1 wisiał na sprężynie o stałej sprężystości k i drgał z amplitudą A_1 . Z góry sypie się w tempie $\alpha = dm/dt$ cienki strumień piasku, który spada ze stałą prędkością v_p (stałą wskutek np. działania siły oporu powietrza). Piasek pada na ciężarek i przykleja się, dalej drgając razem z nim. Po czasie długim w porównaniu z okresem drgań masa ciężarka wraz z piaskiem wzrosła do wartości m_2 . Znaleźć końcową amplitudę drgań. Założyć, że prędkość ruchu ciężarka nie przekraczała prędkości spadku piasku.

533. Wodór H_2 znajduje się w temperaturze 300 K pod ciśnieniem 100 Pa w naczyniu o stałej objętości. Ile będzie wynosić ciśnienie w naczyniu, jeśli ogrzać wodór do temperatury $3 \cdot 10^6$ K?

532. Przyjmijmy, że ciężarek porusza się z prędkością v do góry, wtedy jego prędkość względem piasku wynosi $v + v_p$. Ponieważ masa piasku na jednostkę długości strumienia jest równa α/v_p , więc masa piasku przyklejonego w ciągu czasu dt wynosi $dm' = \alpha(v + v_p)dt/v_p$. Energia przekształcona w ciepło jest równa

$$dQ = \frac{1}{2}(v + v_p)^2 dm' = \frac{\alpha}{2v_p}(v + v_p)^3 dt.$$

W ciągu jednego okresu masa ciężarka nie zmienia się znacząco i można przyjąć, że jego ruch jest w przybliżeniu harmoniczny: $v = A\omega \sin \omega t$, gdzie A jest amplitudą, $\omega = \sqrt{k/m}$. Gdy podstawimy zależność $v(t)$ do dQ , rozwiniemy sześcian i scałkujemy względem okresu, niezerowy wkład do całki dadzą tylko parzyste potęgi $\sin \omega t$ – zerowa i druga:

$$Q = \int_0^T dQ = \frac{1}{2}\alpha v_p^2 T + \frac{3}{4}\alpha A^2 \omega^2 T.$$

Pierwszy składnik po prawej stronie jest początkową energią kinetyczną piasku przyklejonego w ciągu okresu, zatem drugi składnik (Q_2) jest spadkiem

energii drgań w tym czasie. Przechodząc do dłuższej skali czasu, należy wyrażenie $Q_2/T = \frac{3}{4}\alpha A^2 \omega^2$ przyrównać do $-dE/dt$, gdzie E jest energią drgań ciężarka, $E = \frac{1}{2}kA^2$. Stąd

$$\frac{dA}{dt} = -\frac{3\alpha}{4m}A.$$

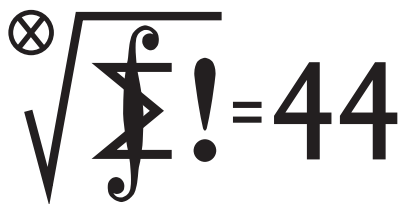
Podstawienie $\alpha dt = dm$ i scałkowanie prowadzi do wyniku $Am^{3/4} = \text{const}$, czyli

$$A_2 = A_1 \left(\frac{m_1}{m_2} \right)^{3/4}.$$

Jak widać, wartość prędkości piasku nie ma znaczenia.

533. Średnia energia ruchów termicznych $k_B T$ w temperaturze $3 \cdot 10^6$ K wynosi – w przeliczeniu na elektronowolty – około 300 eV, czyli znacznie więcej zarówno od energii dysocjacji cząsteczek wodoru, jak i energii jonizacji atomowego wodoru. Każda cząsteczka H_2 rozpadnie się więc po podgrzaniu na cztery cząstki – dwa jądra i dwa elektrony. Ciśnienie wzrośnie $4 \cdot 10^4$ razy i wyniesie 4 MPa.

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań:
31 VIII 2012

Czołówka ligi zadaniowej Klub 44 M po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 627 (WT = 2,50) i 628 (WT = 1,33) z numeru 10/2011

Paweł Kubit	Kraków	42,27
Tomasz Tkocz	Rybnik	39,93
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,25
Jerzy Cisło	Wrocław	36,67
Michał Miodek	Zawiercie	35,88
Roksana Słowik	Knurów	35,87
Adam Dzedzej	Gdańsk	32,39

Zadania z matematyki nr 643, 644

Redaguje Marcin E. KUCZMA

643. Wyznaczyć wszystkie pary (m, n) liczb całkowitych $m \geq 3, n \geq 6$, spełniające równanie

$$\binom{n}{6} = \frac{8m-4}{15m} \binom{m}{3}.$$

644. Dana jest liczba rzeczywista $\alpha > 1$. Obliczyć minimalną wartość funkcji

$$f(x) = (2-x)^\alpha (1+x^\alpha)$$

na przedziale $\langle 0; 1 \rangle$.

Zadanie 644 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 2/2012

Przypominamy treść zadań:

635. Niech A, B, C, D, K będą pięcioma różnymi punktami, leżącymi na jednym okręgu. Odległości punktu K od prostych AB, BC, CD, DA wynoszą odpowiednio a, b, c, d . Znaleźć wzór algebraiczny, pozwalający wyznaczyć dowolną z liczb a, b, c, d , gdy znane są trzy pozostałe.

636. Ciąg (x_n) jest określony rekurencyjnie:

$$x_0 = 1, \quad x_{n+1} = \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wykazać, że ciąg $(2^n x_n)$ jest zbieżny i obliczyć jego granicę.

635. Niech R będzie promieniem danego okręgu – opisanego na każdym z trójkątów KAB, KBC, KCD, KDA . Zachodzi równość

$$\frac{|AB| \cdot a}{2} = \frac{|AB| \cdot |KA| \cdot |KB|}{4R},$$

której obie strony wyrażają pole trójkąta KAB . Po uproszczeniu dostajemy pierwszą z wypisanych poniżej równości, a dalsze trzy są jej cyklicznymi odpowiednikami:

$$a = \frac{|KA| \cdot |KB|}{2R}, \quad b = \frac{|KB| \cdot |KC|}{2R}, \quad c = \frac{|KC| \cdot |KD|}{2R}, \quad d = \frac{|KD| \cdot |KA|}{2R}.$$

Stąd wynika wzór, o który pyta zadanie: $ac = bd$.

636. Wyrazy ciągu (x_n) są liczbami dodatnimi. Zapiszmy każdy z nich jako tangens pewnego kąta ostrego:

$$x_n = \operatorname{tg} \alpha_n, \quad 0 < \alpha_n < \pi/2.$$

Wykażemy, że $\alpha_n = 2\alpha_{n+1}$. Zaczynamy od oczywistej zależności

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha_{n+1}}{1 - (\operatorname{tg} \alpha_{n+1})^2} = \frac{2x_{n+1}}{1 - x_{n+1}^2}.$$

Przekształcamy mianownik ostatniego ułamka:

$$\begin{aligned} 1 - x_{n+1}^2 &= 1 - \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}} \right)^2 = 1 - \left(1 + \frac{1}{x_n^2} - 2 \cdot \frac{1}{x_n} \sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2} + \frac{1}{x_n^2}} \right) = \\ &= \frac{2}{x_n} \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x_n^2} - \frac{1}{x_n}} \right) = \frac{2x_{n+1}}{x_n}. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do poprzedniej równości otrzymujemy związek

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{n+1}) = x_n = \operatorname{tg} \alpha_n$$

i w konsekwencji $2\alpha_{n+1} = \alpha_n$ (obie liczby: $2\alpha_{n+1}$ i α_n leżą w przedziale $(0; \pi)$).

Tak więc $\alpha_{n+1} = \alpha_n/2$ dla wszystkich n ; a skoro $x_0 = 1$, czyli $\alpha_0 = \pi/4$, wnosimy stąd, że

$$\alpha_n = \frac{\pi}{2^{n+2}} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots$$

Wystarczy teraz zauważyć, że $\alpha_n \rightarrow 0$ i skorzystać ze znanej relacji granicznej

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\alpha} = 1.$$

Otrzymujemy odpowiedź:

$$2^n x_n = 2^n \operatorname{tg} \alpha_n = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\operatorname{tg} \alpha_n}{\alpha_n} \rightarrow \frac{\pi}{4} \quad \text{przy } n \rightarrow \infty.$$



Ізак Бейнхардтс рі:
р¹ · 1¹ ієт қйз кәзқегіо і тәкз зшшз,
іісрлф бейкларфр ро бейкларфс іісрл
зшшз р¹ + ... + р^к ктқіз іқмшзз ієт
бодқієрз бйкзх з' іітєієшїє нзз
мїєс р¹ · 1¹ + ... + р^к · 1^к тєз ієт
і ієт то іісрлф бодқієрз бйкзх з'

$$+ р¹ · 1¹ + ... + р^к · 1^к$$

$$\alpha¹ · 1¹ + ... + \alpha^к · 1^к +$$

мззлєткіср ієсієқом то
зшз – шєбейкларф' Бодқієрз зшшз
1¹ · ... · 1^к то іісрл бейкларф' 1¹ · ... · 1^к
1¹ · ... · 1^к озорш' бйкзх сшшз
– іісрл флср' ктқізл ієсієшїє қйшє
1¹ · ... · 1^к озорш' шғошшзшз р¹ · ... · р^к
ієсієшїє қйшє – оқбодқієрз
\alpha¹ · ... · \alpha^к то рєтқш іісрл флср' ктқізл
ктқізл шїє ктқілқоймїєк зқшкзлїл: шїєср
\alpha' Бойісшшл мззлєткіє ієсієшїє қйшї'

Prosto z nieba: Polaris

Poważne badania przekonują jednak, że nie należy polegać na tym sposobie nawigacji w terenie.

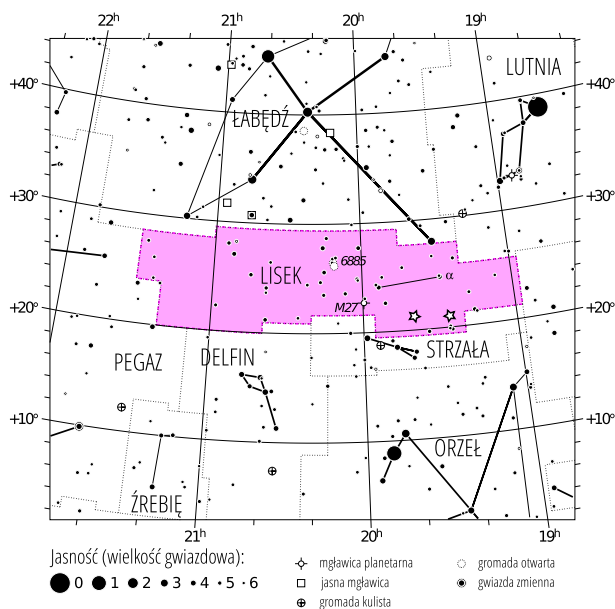
Ezoterycznie usposobieni Czytelnicy wiedzą zapewne, że zjawisko precesji, czyli ruch punktu Barana, leży u podstaw popularnego w drugiej połowie XX w. ruchu filozoficznego *New Age*.

Polaris, którą obserwujemy gołym okiem jako jedną gwiazdę, jest w rzeczywistości układem potrójnym, którego najjaśniejszy składnik jest gwiazdą pulsującą typu δ Cephei. W Kosmosie mało co jest naprawdę niezmiennie; dokładne obserwacje Polaris były prowadzone od lat czterdziestych XIX w., a ich porównanie ze współczesnymi danymi pokazuje wzrost średniej jasności o około 15%. Także okres pulsacji, wynoszący obecnie 4 dni, wydłuża się średnio o 4,5 sekundy rocznie. To szybkie w astronomicznej skali czasu tempo zmian

W jaki sposób zidentyfikować kierunek północny, gdy w pobliżu nie ma ani jednego drzewa pokrytego mchem z odpowiedniej strony? Nie budzi w nas najmniejszego sprzeciwu stwierdzenie, że Polaris (α Ursae Majoris, najjaśniejsza gwiazda Małej Niedźwiedzicy) „z definicji” jest związana z kierunkiem północnym. Nie zawsze jednak tak było: oddziaływanie grawitacyjne w układzie Ziemia-Księżyc-Słońce sprawia, że ziemską oś obrotu sama obraca się wokół pewnego kierunku w przestrzeni (ulega precesji) z okresem około 26000 lat. W wyniku tego efektu za około 14000 lat Gwiazdą Polarną będzie Wega (α Lyrae). Z takim samym okresem przesuwa się po niebie punkt Barana, czyli punkt przecięcia ekliptyki (toru ruchu Słońca) z równikiem niebieskim (rzutem równika ziemskiego na sferę niebieską) – to dokładnie w tym punkcie znajduje się Słońce w momencie równonocy wiosennej (początku wiosny). Z powodu precesji punkt ów znajduje się obecnie w gwiazdozbiorze Ryb i przesuwa się powoli w kierunku Wodnika.

jest zdumiewające i zupełnie nie pasuje do teoretycznych modeli ewolucji – uważają badający Polaris astronomowie. Obecna burzliwa faza życia Polaris jest związana z kurczeniem się gwiazdy, połączonym z wyrzucaniem w przestrzeń kosmiczną ogromnych ilości materii (około masy Ziemi rocznie). Może to świadczyć o przebudowie jej wnętrza – zmianie „paliwa termojądrowego” z wodoru na hel w jądrze. Wydaje się, że jest to jedynie przejściowy stan aktywności, nie powinniśmy się więc martwić, że z nieboskłonu zniknie nagle nasz naturalny kompas...

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Liska. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. Pięciokątne gwiazdki oznaczają pozycje pulsarów (szczegóły w tekście). [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu „Sky & Telescope” (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

W trakcie pełni Księżyca 4 czerwca nastąpi jego częściowe zaćmienie, widoczne na Pacyfiku, w Australii i Azji; nów przewidziano na 19 czerwca. Czerwcowe roje meteorów to: niezbyt „szybkie”, a więc miłe do obserwacji Bootydy o radiancie w gwiazdozbiorze Wolarza i maksimum przypadającym na koniec miesiąca, a także Arietydy, które z powodu dość małej odległości radiantu (Baran) od Słońca są czasem widoczne w ciągu dnia. Głównym wydarzeniem czerwca jest jednak bezdyskusyjnie przejście planety Wenus

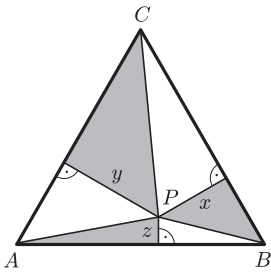
Niebo jak własna kieszeń: Czerwiec

W czerwcu przyjrzymy się jednemu ze słabiej widocznych gwiazdozbiorów letniego nieba, Liskowi (łac. *Vulpecula*). Wytyczony przez Jana Heweliusza pomiędzy Lutnią, Orłem a Łabędziem (w środku Trójkąta Letniego, którego wierzchołkami są Wega, Altair i Deneb) i przedstawiany pierwotnie jako lisek z gęsią w pysku (łac. *Vulpecula et Anser*). Na pamiątkę wielkiej wyobraźni gdańskiego astronoma – zauważyć takie szczegóły wśród gwiazd czwartej wielkości i słabszych to nie lada osiągnięcie – najjaśniejsza gwiazda Liska (α Vulpeculae, 4,44 mag) zwana jest czasami Gęsią (*Anser*). W gwiazdozbiorze Liska znajduje się kilka obiektów niewidocznych gołym okiem, ale szczególnie godnych uwagi, wśród nich *pierwszy pulsar*, PSR B1919+21, odkryty w 1967 r. przez Jocelyn Bell (okres obrotu wokół osi 1,33 s). Tuż obok niego znajduje się historycznie pierwszy pulsar milisekundowy, przez wiele lat najszybciej rotujący znany pulsar, PSR B1937+21 (okres obrotu 1,56 ms, czyli 641 razy na sekundę!). Oprócz pulsarów, zaznaczonych na mapie gwiazdkami, Lisek zawiera również mgławicę planetarną Hantle (obiekt Messiera M27), którą można z łatwością zaobserwować przez lornetkę (7,5 mag). Wewnątrz mgławicy (obłoku kolorowego zjonizowanego gazu) znajduje się biały karzeł – wypalone węglowo-tlenowe jądro czerwonego olbrzyma, którego odrzucona w trakcie ewolucji otoczka to właśnie M27.

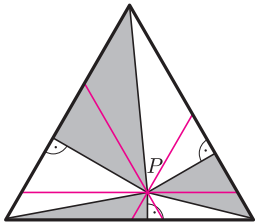
przed tarczą Słońca – bardzo rzadkie zdarzenie (następne dopiero w 2117 r.), które w Polsce będzie widoczne częściowo w trakcie wschodu Słońca 6 czerwca (idealne warunki do obserwacji całego tranzytu panować będą za to na Pacyfiku, np. we francuskiej Polinezji na wyspie Tahiti, gdzie w 1769 r. analogiczne zjawisko obserwował kapitan Cook). Czerwiec to, oczywiście, także miesiąc przesilenia letniego, które w tym roku wypada 21., zaraz po północy (o pierwszej 9). Wszelkiej pomyślności w Noc Kupały!

M. B.

Punkt P leży wewnątrz trójkąta równobocznego ABC o boku długości a i o wysokości h . Rzutujemy ten punkt na boki trójkąta oraz łączymy go z wierzchołkami. Odległości punktu P od boków BC, CA, AB oznaczamy odpowiednio przez x, y, z .

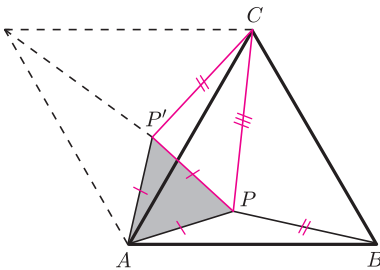


Rys. 1

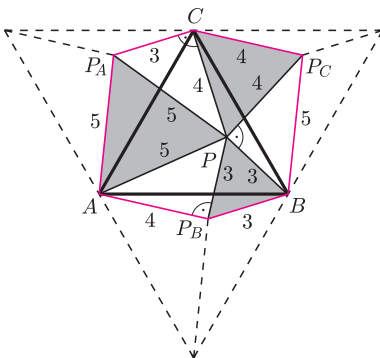


Rys. 2

Nawias kwadratowy oznacza pole figury.



Rys. 3. Obracamy w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara.



Rys. 4

Zadanie 3 pochodzi z VI Olimpiady Matematycznej.

1. Wykaż, że suma pól szarych trójkątów na rysunku 1 nie zależy od położenia punktu P .
2. Udowodnij, że suma $x + y + z$ nie zależy od położenia punktu P .
3. W jakiej części trójkąta ABC powinien leżeć punkt P , aby z odcinków o długościach x, y, z można było zbudować trójkąt?
4. Wykaż, że z odcinków o długościach PA, PB, PC można zbudować trójkąt.
5. Wyznacz miary kątów trójkąta o bokach PA, PB, PC , jeśli $\sphericalangle BPC = \alpha$, $\sphericalangle CPA = \beta$, $\sphericalangle APB = \gamma$.
6. Wyznacz pole trójkąta ABC , jeśli $PA = 5, PB = 3, PC = 4$.
7. Udowodnij, że $PA + PB + PC \geq 2(x + y + z)$.

Rozwiązania

R1. Poprowadźmy przez punkt P proste równoległe do boków trójkąta (rys. 2). Dzielą one trójkąt ABC na trzy trójkąty równoboczne i trzy równoległoboki. Połowa każdej z tych sześciu figur jest szara. Wobec tego suma pól szarych trójkątów równa jest połowie pola trójkąta ABC . \square

R2. Niezależnie od położenia punktu P suma $x + y + z$ równa jest h , ponieważ $\frac{ah}{2} = [ABC] = [PBC] + [PCA] + [PAB] = \frac{ax}{2} + \frac{ay}{2} + \frac{az}{2} = \frac{a(x + y + z)}{2}$. \square

R3. Z rozwiązania poprzedniego zadania wiemy, że $x + y + z = h$. Stąd nierówność trójkąta $z < x + y$ równoważna jest warunkowi $z < h/2$. Analogicznie powinny być spełnione warunki $x < h/2$ oraz $y < h/2$. Oznacza to, że punkt P powinien leżeć wewnątrz trójkąta utworzonego przez środki boków trójkąta ABC . \square

R4. Z nierówności trójkąta mamy $PA + PB > AB$. Ponadto $AB = BC$ oraz $BC > PC$, stąd $PA + PB > PC$. Analogicznie $PA + PC > PB$ oraz $PB + PC > PA$. \square

R4 inaczej. Obróćmy trójkąt o 60° wokół wierzchołka A (rys. 3); obraz punktu P oznaczmy przez P' . Wtedy $\sphericalangle P'AP = 60^\circ$ oraz $P'A = PA$, zatem trójkąt APP' jest równoboczny. Stąd trójkąt $CP'P$ ma boki o żądanych długościach $P'P = PA, P'C = PB$ oraz PC . \square

Jeszcze inne rozwiązanie, korzystające z twierdzenia Ptolemeusza, opisano w *deltoidzie* 6/2009.

R5. W sytuacji z rysunku 3 mamy $\sphericalangle P'PC = \sphericalangle APC - \sphericalangle APP' = \beta - 60^\circ$, podobnie $\sphericalangle CP'P = \gamma - 60^\circ$. Stąd, korzystając z równości $\alpha + \beta + \gamma = 360^\circ$ i z sumy miar kątów trójkąta $CP'P$, otrzymujemy $\sphericalangle PCP' = \alpha - 60^\circ$. \square

R6. Obróćmy trójkąt o 60° wokół wierzchołka A (rys. 4). Niech P_A będzie obrazem punktu P . Tak jak na rysunku 3, trójkąt APP_A jest równoboczny. Trójkąt CP_AP ma boki długości $P_AP = PA = 5, P_AC = PB = 3, PC = 4$, więc jest prostokątny.

Analogicznie zdefiniujmy punkty P_B i P_C jako obrazy P przy obrotach wokół odpowiednio wierzchołków B i C . Wtedy trójkąty BPP_B i CPP_C są równoboczne o bokach odpowiednio długości 3 i 4, a trójkąty AP_BP i BP_CP oba są prostokątne o bokach długości 3, 4, 5.

Pole kolorowego sześciokąta $AP_BP_PC CP_A$ jest równe $[ABC]$ plus „dodatki”: $[ABC] + [AP_BP] + [BP_CP] + [CP_AP] = [ABC] + [CP_B] + [AP_C] + [BP_A] = 2[ABC]$. Jednocześnie pole to jest równe sumie pól trzech szarych trójkątów równobocznych i trzech białych prostokątnych:

$$\frac{5^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{50\sqrt{3}}{4} + 18.$$

Szukane pole trójkąta ABC jest więc dwukrotnie mniejsze: $[ABC] = \frac{25\sqrt{3}}{4} + 9$. \square

Wskazówka 7. Skorzystaj z rysunku 3 lub 4 oraz z rozwiązania zadania 2.