




SPIS TREŚCI NUMERU 1 (464)

William Thurston i hipoteza
geometryzacyjna
Zdzisław Pogoda

str. 1

Wszechświat w łazience
Krzysztof Turzyński

str. 4

 *Slime* – niezwykła
żyjąca kula
Magdalena Fikus

str. 6

Ośrodek Kultury
Matematycznej w Mordach
– w dwudziestopięciolecie
*Andrzej Dąbrowski,
Zdzisław Pogoda*

str. 7

Kącik przestrzenny (15):
O sumie długości krawędzi
czworościanu
Michał Kieza

str.10

Linowe sito
Jakub Radoszewski

str.12

Największy wspólny dzielnik
Tomasz Kociumaka

str.14

Nieznane wykresy znanych
funkcji
Piotr Pikul

str.16

 Zadania

str.18

Informacyjny kącik olimpijski
(58): Dwa przyjęcia
Bartosz Szreder

str.19

Aktualności

str.20

Dwa słowa o zadaniu M 1360
Michał Krych

str.21

Klub 44


str.22

Prosto z nieba:
Cukier w Kosmosie
Michał Bejger

str.24

Niebo jak własna kieszeń:
Styczeń

str.24

 Okrąg Apoloniusza
Joanna Jaszńska

str.25

W następnym numerze polecamy zliczanie podziałów:

Liczbę 6 można przedstawić w postaci sumy liczb naturalnych
na 11 sposobów. Oto te podziały:

Są wśród nich cztery podziały na liczby nieparzyste, cztery na liczby
niepowtarzające się i pozostałych podziałów też jest cztery.

Czy dla każdej liczby takie zbiory jej podziałów są równoliczne?

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez
Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa
Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego
i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

str. 7

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel,
dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny,
dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks,
dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga,
dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur,
dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda,
dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

str.10

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger,
Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red.,
Marek Kordos – red. naczej., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik,
Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. naczej., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

str.12

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delt*y, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

str.16

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

str.18

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

str.19

Fran-Press: www.franpress.pl, infolinia 801-679-466

str.20

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

str.21

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

str.22

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

str.24

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie
www.prenumerata.ruch.com.pl

str.24

Ewentualne pytania

str.24

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta
pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7⁰⁰ – 18⁰⁰.

str.25

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

William Thurston i hipoteza geometryzacyjna

Zdzisław POGODA

Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński



Pod koniec lata 2012 roku wśród matematyków rozeszła się wiadomość, że 21 sierpnia zmarł William Thurston, matematyk, laureat medalu Fieldsa. Gdy w październiku 2010 roku zmarł Benoît Mandelbrot, pisały o tym niemal wszystkie gazety, informowały portale społecznościowe. O śmierci Thurstona dowiedzieli się – jak to najczęściej bywa w przypadku matematyków – głównie specjaliści. William Thurston zasłynął z postawienia, pod koniec lat siedemdziesiątych XX stulecia, hipotezy geometryzacyjnej i prób jej udowodnienia. Za te osiągnięcia, a miał jeszcze wiele innych, został uhonorowany medalem Fieldsa na Międzynarodowym Kongresie Matematyków w Warszawie w 1983 roku.

Spróbujmy się przyjrzeć, na czym polega hipoteza geometryzacyjna i jakie jest jej znaczenie.

Z dużym uproszczeniem można ją sformułować, na przykład, tak

Każda trójwymiarowa rozmaitość zamknięta może być „kanonicznie” rozłożona na prostsze cegielki-podrozmaitości, z których każda jest wyposażona w jedną z ośmiu „kanonicznych” geometrii.

Rozszyfrujmy występujące w tej wypowiedzi terminy. Obiektami, których dotyczy hipoteza geometryzacyjna, są rozmaitości, a dokładniej rozmaitości trójwymiarowe. Przypomnijmy krótko, że rozmaitość topologiczna wymiaru n jest to obiekt (przestrzeń topologiczna), który lokalnie wygląda jak przestrzeń \mathbb{R}^n . A zatem rozmaitość trójwymiarowa, dokładniej rozmaitość bez brzegu, lokalnie przypomina przestrzeń trójwymiarową. Taka jest, oczywiście, sama przestrzeń \mathbb{R}^3 , takie jest wnętrze kuli czy torusa. Gdy dopuścimy brzeg (ma go, na przykład, kula domknięta B^3), to jego punkty będą miały otoczenia wyglądające jak półprzestrzeń domknięta. Jednym z najważniejszych problemów od samego początku był problem klasyfikacji rozmaitości, czyli zrobienia pełnej listy obiektów z wyraźnym kryterium ich rozróżniania. Matematykom udało się sklasyfikować rozmaitości dwuwymiarowe, czyli powierzchnie. Zrobili to w 1907 roku, wykorzystując wcześniejsze wyniki Möbiusa, Jordana i Dycka, Max Dehn i Poul Heegaard.

Po tym sukcesie kolej przyszła na przestrzenie trójwymiarowe. Wydawało się, że odpowiednio uogólniając i rozszerzając metody, które doskonale sprawdziły się w przypadku dwuwymiarowym, uda się opisać „przestrzenie trójwymiarowe”, jak wtedy często nazywano 3-rozmaitości. Naturalnie matematycy mieli świadomość, że nie będzie to tylko proste uogólnienie. Nie spodziewali się jednak, że trudności okażą się aż tak ogromne. Świat rozmaitości trójwymiarowych jest niezwykle bogaty i – mimo sugestywnej nazwy „trójwymiarowe” – niepoddający się łatwo intuicji. Pojawiły się nowe, zaskakujące, trudne do uchwycenia efekty.

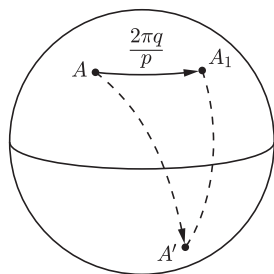
Już sama sfera trójwymiarowa sprawiała ogromne kłopoty. Potrzebna była jej prosta charakteryzacja jako obiektu odgrywającego, jak słusznie przypuszczano, kluczową rolę w klasyfikacji. Tak narodziła się Hipoteza Poincarégo, która – mimo wielu wysiłków – pozostawała nietknięta w swej klasycznej postaci.

Matematycy z jednej strony próbowali opisać ogólne konstrukcje 3-rozmaitości, a z drugiej sklasyfikować pewne wybrane ich rodziny. Pierwszą ogólną konstrukcję dla 3-rozmaitości zaproponował wspomniany już Heegaard. Każdą rozmaitość trójwymiarową można otrzymać przez sklejenie brzegiem dwóch n -krotnych pełnych torusów – nazywanych *torusami genusu n* .

Inny pomysł podsunął Max Dehn w 1910 roku, proponując wycinanie ze sfery trójwymiarowej otoczek tubularnych węzłów lub splotów (mówiąc potocznie: węzłów i splotów zrobionych z grubej liny, czyli obiektów topologicznie identycznych z torusami lub sumami mnogościowymi torusów) i ponowne ich wklejanie, tylko w inny sposób. Takie procedury nazwano *chirurgiami Dehna*. W tym przypadku znów okazało się, że można tak skonstruować każdą 3-rozmaitość, lecz problem z jednoznacznością pozostał.

Pełny torus genusu 1 jest to zwykły pełny torus, który można bardziej formalnie przedstawić jako iloczyn kartezjański koła i okręgu $B^2 \times S^1$ (przypomnijmy: klasyczny torus-powierzchnia to $S^1 \times S^1$), czyli mamy tu do czynienia z jedną dziurą. A dziur, jak wiadomo, może być więcej.

Przestrzeń soczewkowa (soczewki), pierwszy raz opisane przez Tietzego, są przykładem pierwszej rodziny 3-rozmaitości całkowicie scharakteryzowanych i sklasyfikowanych.



Rys. 1

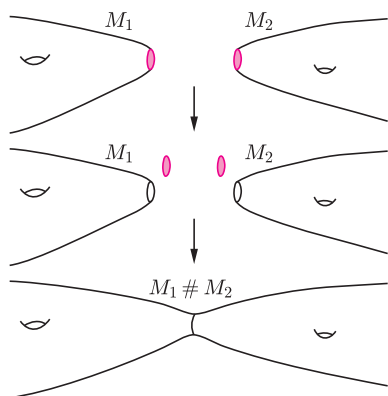
Soczewki można opisać na wiele sposobów, jeden z nich wygląda tak: wybieramy dwie liczby naturalne względnie pierwsze p i q . Na powierzchni kuli (czyli, oczywiście, na sferze) zaznaczamy „równik”. Teraz każdy punkt górnej półsfery obracamy o kąt $2\pi q/p$ i odbijamy symetrycznie względem równika, a następnie tak otrzymany punkt sklejamy z wyjściowym (rys. 1). Powstaje właśnie przestrzeń soczewkowa oznaczana $L(p, q)$. Udało się w pełni scharakteryzować soczewki w zależności od p i q .

Gdy przyjrzymy się bliżej klasyfikacji 2-rozmaitości, czyli powierzchni, to zauważymy, że każdą można zbudować z kilku, a dokładnie z trzech, prostszych cegiełek. Tymi najprostszymi powierzchniami są: sfera, torus (tym razem powierzchnia) i płaszczyzna rzutowa, a operacją łączącą jest *suma spójna*. Polega ona na tym, że z każdej powierzchni wycinamy kawałki homeomorficzne z kołami, a następnie sklejamy brzegi (rys. 2).

Pomysł rozkładu rozmaitości trójwymiarowych na bardziej elementarne składniki podjął Hellmuth Kneser, który przedstawił w 1929 roku następujące twierdzenie.

Każda trójwymiarowa rozmaitość zamknięta może być rozłożona jednoznacznie, z dokładnością do kolejności składników, na sumę spójną rozmaitości pierwszych.

Sumę spójną dla rozmaitości trójwymiarowych konstruujemy podobnie jak w przypadku powierzchni, tylko zamiast kół wycinamy kule i sklejenia dokonujemy wzdłuż sfer. Przypomnijmy, że przez rozmaitości zamknięte rozumie się rozmaitości spójne, zwarte i bez brzegu. Natomiast rozmaitości pierwsze są w pewnym sensie odpowiednikiem liczb pierwszych: rozmaitość pierwsza nie da się rozłożyć na sumę spójną prostszych składników. Inaczej, jeśli rozmaitość pierwszą przedstawimy jako sumę dwóch innych rozmaitości, to jedną z nich jest sfera trójwymiarowa, która w tym działaniu (gdy sumę spójną uznamy za działanie) pełni rolę elementu neutralnego.



Rys. 2. Schemat powstawania sumy spójnej powierzchni.

Twierdzenie Knesera sprowadza więc problem klasyfikacji do spisania kompletnej listy rozmaitości pierwszych. Jednak – inaczej niż w przypadku dwuwymiarowym – tych rozmaitości jest wiele, znacznie więcej niż trzy, i nie znano wówczas dobrej metody ich wyszukiwania. Kneser opisał możliwość rozkładu, lecz nie pokazał, jak powinny wyglądać cegiełki rozkładu. Takie rozmaitości jak S^3 , przestrzeń rzutowa P^3 czy przestrzeń soczewkowa są przykładami rozmaitości pierwszych, ale istnieje jeszcze wiele innych wymyślnych konstrukcji, jak choćby odpowiednie sklejenie ścian różnych wielościanów.

W każdym razie ostatecznie stwierdzono, że rozkład rozmaitości M na sumę spójną rozmaitości prostych można opisać następująco

$$M = (K_1 \# \dots \# K_p) \# (L_1 \# \dots \# L_q) \# ((S^2 \times S^1) \# \dots \# (S^2 \times S^1)).$$

Podział składników wiąże się z pewnymi własnościami dotyczącymi grupy podstawowej zdefiniowanej przez Poincarégo, a opisującej zachowanie się pętli w danej rozmaitości. Dla rozmaitości $S^2 \times S^1$ grupa jest cykliczna i nieskończona – po prostu \mathbb{Z} – wiadomo, że są to jedyne rozmaitości spełniające ten warunek. Rozmaitości z rodziny L_i mają grupę podstawową skończoną, a K_j – nieskończoną i niecykliczną.

W latach sześćdziesiątych XX wieku zauważono (ogromne zasługi ma tu Wolfgang Haken, znany przede wszystkim z dowodu twierdzenia o czterech barwach), że do rozkładu 3-rozmaitości na „mniejsze” składniki można wykorzystać nie tylko sfery, lecz również inne powierzchnie. Pierwszym kandydatem naturalnie stał się torus – najprostszą po sferze powierzchnia zamknięta. I odniesiono pewien sukces: prawdziwe jest analogiczne do twierdzenia Knesera twierdzenie o rozkładzie rozmaitości nieredukowalnej za pomocą torusów.



Rozwiązanie zadania M 1373.

Zauważmy, że po każdym spotkaniu się dwóch kameleonów różnych kolorów reszta z dzielenia przez 3 liczby kolorów kameleonów każdego z kolorów różnie o 2 modulo 3. Ponieważ na początku reszty te były parami różne, to tak będzie również po każdym spotkaniu. Nigdy więc nie będzie tak, że na wyspie wszystkie kameleony będą tego samego koloru, bo wówczas wszystkie te reszty byłyby równe zeru.

Nie wchodząc w szczegóły, twierdzenie to, często nazywane twierdzeniem JSJ (od nazwisk autorów: Jaco, Shalen, Johansson), mówi, że w zamkniętej nieredukowalnej (czyli takiej, w której każda sfera ogranicza kulę) 3-rozmaitości można znaleźć skończoną rodzinę odpowiednio położonych torusów rozdzielających tę rozmaitość na zwarte 3-rozmaitości torusowo nieredukowalne i tak zwane *rozmaitości włókniste Seiferta*.

Torusowa nieredukowalność jest odpowiednikiem zwykłej sferycznej nieredukowalności. Rozmaitości włókniste Seiferta pojawiły się w tym samym czasie, co rozmaitości sferyczne. Mówiąc znów niezbyt precyzyjnie, są to rozmaitości, które dadzą się przedstawić jako sumy okręgów, a każdy z tych okręgów ma otoczenie torusowe spełniające ewentualnie dodatkowe warunki. Wiele rozmaitości ma tę cechę, a wśród nich sfera S^3 , znana już $S^2 \times S^1$ i przestrzeń soczewkowe. Seifert podał pełny układ niezmienników charakteryzujących rozmaitości włókniste nazwane jego imieniem.

Taką sytuację zastał William Thurston pod koniec lat siedemdziesiątych. Przyjrzał się wnikliwie twierdzeniom o rozkładzie, sklasyfikowanym już rodzinom 3-rozmaitości i wykorzystał pewien stary pomysł pochodzący z czasów Poincarégo i Kleina. Mianowicie Poincaré i Klein zauważyli, że każda z dwuwymiarowych powierzchni można jednoznacznie wyposażyć w jeden z trzech typów geometrii gwarantujący pewne porządne przedstawienie tejże powierzchni (stałą krzywiznę). Z punktu widzenia tych geometrii powierzchnia w każdym punkcie lokalnie wygląda jednakowo – tak się zachowuje zwykła płaszczyzna lub sfera. Wyróżnione geometrie to: geometria lokalnie euklidesowa (paraboliczna), hiperboliczna (nawiązująca do geometrii Łobaczewskiego) i sferyczna (eliptyczna). Lokalnie euklidesowo wyglądają torus i butelka Kleina (płaszczyznę, walec i wstęgę Möbiusa pomijamy jako niezwarłe), sferycznie – naturalnie sfera i płaszczyzna rzutowa, a wszystkie pozostałe mogą być wyposażone w strukturę hiperboliczną.

W przypadku trójwymiarowym taka sytuacja nie jest możliwa. Nie da się każdej 3-rozmaitości wyposażyć w tak porządną geometrię. Thurston zauważył jednak, że wiele sklasyfikowanych rozmaitości z różnych rodzin dopuszcza jedną z, tym razem, ośmiu typów wzorcowych geometrii tak, że w otoczeniu każdego punktu rozmaitość wygląda jednakowo z punktu widzenia tych wyróżnionych geometrii – nazywa się to jednorodnością geometrii. Pojawił się więc pomysł, że może tylko te osiem typów wystarczy, gdy zastosujemy rozkład na sumę spójną, a następnie wzdłuż torusów. Thurston rzeczywiście udowodnił, że dla 3-rozmaitości istnieje dokładnie osiem typów geometrii spełniających warunek jednorodności.

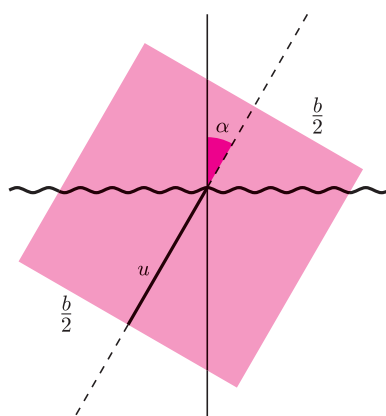
Tak narodziła się hipoteza geometryzacyjna, która, mimo oczywistych analogii do przypadku dwuwymiarowego, zaskoczyła matematyków zmagających się z problemem klasyfikacji. Mało kto mógł się spodziewać, że metody geometryczne mogą okazać się przydatne w problemach topologicznych. Próby klasyfikacji 3-rozmaitości sprowadzały się głównie do wyszukiwania coraz to bardziej subtelnych narzędzi (niezmienników), przede wszystkim na gruncie topologii. Hipoteza geometryzacyjna, jeśli tylko jest prawdziwa, rozstrzyga wiele starych problemów, między innymi klasyczną hipotezę Poincarégo, a także pytania o charakteryzację wybranych rodzin rozmaitości, jak choćby rozmaitości sferyczne konstruowane ze sfery trójwymiarowej poprzez działanie na niej różnych grup.

Thurstonowi udało się rozstrzygnąć hipotezę dla licznej rodziny 3-rozmaitości, wiele jednak broniło się skutecznie. W szczególności rozmaitości dopuszczające strukturę hiperboliczną (powstające, między innymi, przez odpowiednie sklejenie ścian wielościanów) okazały się wyjątkowo odporne. Od co najmniej 2006 roku wiemy, że hipoteza geometryzacyjna jest twierdzeniem. Dzięki oryginalnym pomysłom Richarda Hamiltona, wyjątkowo lakonicznym pracom Perelmana oraz wysiłkom wielu matematyków udało się pokonać jeden z najważniejszych problemów topologii rozmaitości trójwymiarowych. Thurston, formułując śmiałą hipotezę, zwrócił uwagę na ogromną siłę tkwiącą w metodach geometrycznych.



Rozwiązanie zadania F 823.

Ogólne położenie klocka w wannie zadane jest przez dwa parametry u i α , zaznaczone na rysunku.



Zgodnie z prawem Archimedesesa, energię potencjalną klocka V możemy wyrazić jako różnicę energii potencjalnej grawitacji, równej $\rho b^2 L h g$, oraz energii potencjalnej, jaką miała wyparta przez klocek woda, równej $\rho_w b u L d g$, gdzie h , d są odpowiednio wysokościami środka ciężkości klocka i jego zanurzonej części nad poziomem wody. Wielkości te są równe odpowiednio:

$$h = \left(\frac{b}{2} - u\right) \cos \alpha,$$

$$d = -\left(\frac{u}{2} + \frac{b^2}{24u} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \cos \alpha,$$

skąd otrzymujemy

$$V = b^2 L g \cos \alpha \left[\rho \left(\frac{b}{2} - u\right) + \frac{\rho_w u}{b} \left(\frac{u}{2} + \frac{b^2}{24u} \operatorname{tg}^2 \alpha\right) \right].$$

Opisane w zadaniu położenie równowagi odpowiada $u_0 = b\rho/\rho_w$, $\alpha_0 = 0$.

Dla małych wychyleń z położenia równowagi mamy $u = u_0 + \delta u$, $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$. Podstawiając do powyższego wzoru i ograniczając się do wyrazów kwadratowych w δu i α , otrzymujemy:

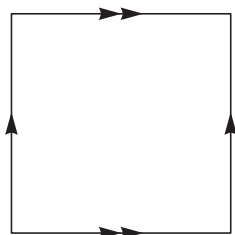
$$\frac{V}{b^3 L g \rho_w} \approx \frac{\delta u^2}{b^2} + \frac{1}{4} \left(\frac{\rho^2}{\rho_w^2} - \frac{\rho}{\rho_w} + \frac{1}{6} \right) \alpha^2.$$

Współczynnik przed α^2 jest dodatni dla $\rho/\rho_w < (3 - \sqrt{3})/6 \approx 0,21$ lub $\rho/\rho_w > (3 + \sqrt{3})/6 \approx 0,79$, wtedy mamy do czynienia z minimum energii potencjalnej i rozważana sytuacja odpowiada równowadze trwale.

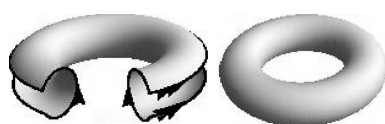
Wszechświat w łazience

Krzysztof TURZYŃSKI

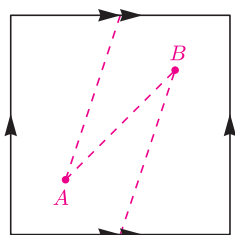
Małą łazienkę można, zdaniem architektów, optycznie powiększyć, montując w niej duże lustro. W miejscach mniej ograniczonych wymaganiami funkcjonalności, takich jak toalety muzeów sztuki nowoczesnej czy klatki schodowe centrów handlowych, umieszcza się niekiedy lustra na przeciwnych ścianach, co daje złudzenie nieskończonej głębi w kierunkach prostopadłych do luster.



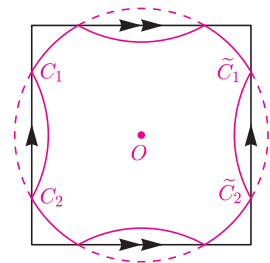
Rys. 1



Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4

Ktoś mógłby się tu zachnąć, że przedstawiona konstrukcja nie ma wiele wspólnego z Wszechświatem, w którym nie widzimy przecież wielokrotnych obrazów tych samych ciał niebieskich (jeśli pominąć znajdujące się bardzo blisko na sferze niebieskiej wielokrotne obrazy z soczewkowania grawitacyjnego, to jest jednak zupełnie inne zagadnienie). Co jednak, jeśli rozmiar obserwowanego Wszechświata jest porównywalny z rozmiarem podstawowej komórki? Czy można jakoś wykryć, że Wszechświat jest „uszyty” ze skończonego kawałka przestrzeni?

Okazuje się, że w zasadzie można. Dociera do nas bowiem tzw. mikrofalowe promieniowanie tła, wysłane mniej więcej 300 tysięcy lat po Wielkim Wybuchu, kiedy swobodne wcześniej jądra atomowe i elektrony połączyły się w atomy. Promieniowanie to zostało wyemitowane w zasadzie równocześnie w całej objętości przestrzeni; to widziane

Nie jest wykluczone, że podobne rozumowanie możemy zastosować również do całego Wszechświata. Może po prostu wydaje nam się „nieskończony” dzięki właściwie ustawionym odpowiednikom luster. Oczywiście, „lustra” te nie mogą być obiektami fizycznymi. Niemal taki sam efekt możemy jednak uzyskać, odpowiednio utożsamiając punkty brzegowe pewnej skończonej komórki przestrzeni.

Rozważmy na początek znacznie prostszy przypadek przestrzeni dwuwymiarowej, konkretnie kwadratu, którego brzegi skleimy zgodnie z kierunkiem strzałek, tak jak na rysunku 1. Otrzymamy wówczas powierzchnię przedstawioną na rysunku 2, czyli torus – oczywiście w sensie topologicznym, tzn. z dokładnością do ciągłego i różnowartościowego przekształcenia, które możemy sobie wyobrazić jako rozciąganie i przesuwanie (bez rozrywania!) rozważanego obiektu, wykonanego z elastycznego materiału. Materiał posklejanego kwadratu nie jest jednak rozciągany, w związku z tym w okolicy każdego miejsca (również na sklejeniu) jest w dalszym ciągu kawałkiem zwykłej płaszczyzny. Ma zatem torus ważną cechę wspólną z ulubionym przez kosmologów modelem Wszechświata: jest taki sam oglądany z dowolnego punktu (jednorodny) i dowolnego kierunku (izotropowy).

Pomimo tego, że torus powstał ze skończonej komórki, daje on nam wrażenie „nieskończoności” przestrzeni. Jeżeli z ustalonego punktu torusa wysłać rozchodzący się po nim wzdłuż linii prostej sygnał, to będzie się on przemieszczał, nie napotykając nigdy krańca tego obiektu. Ignorujemy tu subtelne rozważania, czym jest prosta na torusie, i mamy na myśli proste w kwadracie z rysunku 1.

Co ciekawe, istnieje więcej niż jedna droga, jaką może podróżować sygnał wysłany z punktu A do punktu B , co pokazano na rysunku 3. Jeżeli w punkcie A znajduje się źródło światła, a w punkcie B – obserwator, stwierdzi on, że światło z tego samego źródła dociera do niego z różnych kierunków przestrzeni. Oznacza to, że obserwator będzie widział wiele obrazów tego samego źródła (Czytelnik, po namyśle, zauważy, że w tym przykładzie obrazów będzie nieskończenie wiele, choć w różnych odległościach!).

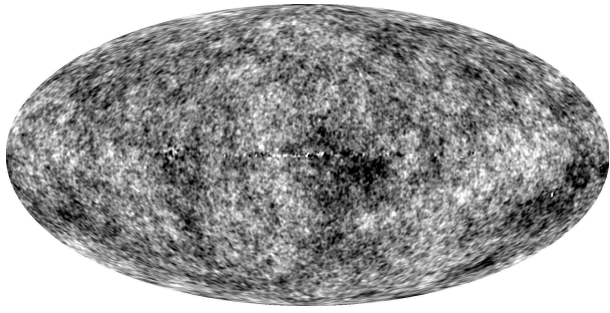
W podobny sposób zamiast torusa możemy uzyskać butelkę Kleina, a prościej – przez sklejenie tylko jednej pary boków – walec czy wstęgę Möbiusa.

Gdybyśmy jednak chcieli uzyskać inne powierzchnie, np. sferę, bez rozciągania już by się nie obeszło. Ale i w tym przypadku można by to zrobić tak, aby otrzymana przestrzeń była jednorodna i izotropowa.

Mówiąc uczennie, w opisanych dotąd przykładach zmienialiśmy globalne własności przestrzeni, czyli to, jak wygląda rozważana przestrzeń jako całość. Jeśliby wykonać podobne ćwiczenie w trzech wymiarach, moglibyśmy uzyskać różne kształty Wszechświata. Równania opisujące dynamikę (czaso)przestrzeni mają bowiem charakter lokalny, tj. zmiana parametrów opisujących dany punkt Wszechświata zależy jedynie od wartości tych parametrów w bardzo małym otoczeniu rozważanego punktu, a nie od kształtu przestrzeni jako całości.

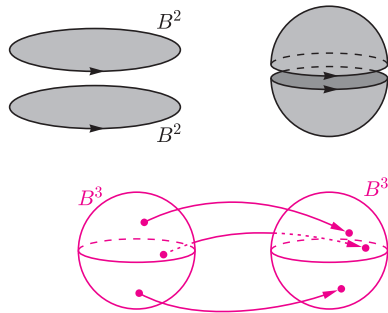
dzisiaj pochodzi zatem z powierzchni sfery, którą w naszym modelu dwuwymiarowego torusa możemy przedstawić tak jak na rysunku 4. Linia ciągłą zaznaczono zbiór takich punktów podstawowej komórki, że wyemitowane z nich światło dociera do obserwatora O w tym samym ustalonym czasie. Niektóre fragmenty tej figury wydają się bliższe obserwatora O niż inne: światło wysłane z nich najkrótszą drogą minęło go już dawno temu i obecnie widzi on promienie biegnące drogą „okrężną”. Linia przerywaną zaznaczono położenia, jakie obserwator O przypisałby obrazom tych fragmentów, nie wiedząc, że podstawowa komórka przestrzeni jest skończona.

Mikrofalowe promieniowanie tła jest niemal izotropowe, zawiera jednak maleńkie fluktuacje natężenia, które pozwalają odróżnić różne kierunki na sferze niebieskiej.



Rys. 5. Mapa fluktuacji mikrofalowego promieniowania tła zmierzonych przez satelitę WMAP. Jaśniejsze (ciemniejsze) punkty odpowiadają dodatnim (ujemnym) fluktuacjom natężenia. Źródło: NASA.

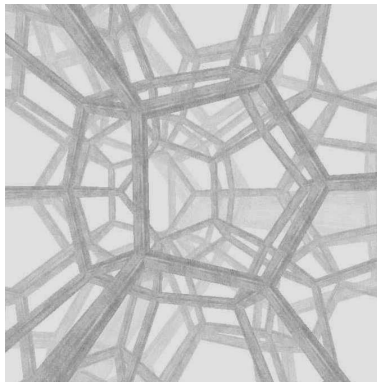
Efektowne wizualizacje takich przestrzeni można stworzyć dzięki programom dostępnym na www.geometrygames.org.



Rys. 6. Zwykłą dwuwymiarową sferę możemy otrzymać, sklejając odpowiednio brzożony brzeg dwóch kół. Sfera trójwymiarowa powstaje przez sklejenie brzożony brzegów dwóch kul.



Rys. 7. Dwunastościan sferyczny.



Rys. 8

W naszym przykładzie torusa fluktuacje zmierzone w punktach C_1 i C_2 na rysunku 4 powinny być takie same jak te zmierzone w punktach odpowiednio \tilde{C}_1 i \tilde{C}_2 . Jeśli rozważalibyśmy przykład trójwymiarowy i np. utożsamili przeciwległe ściany sześcianu, zamiast par punktów mielibyśmy znajdujące się po przeciwnych stronach sfery niebieskiej okręgi. Wzdłuż tych okręgów fluktuacje mikrofalowego promieniowania tła powinny być dokładnie takie same. Nie pozostaje zatem chyba nic innego jak poszukać takich okręgów w mapach mikrofalowego promieniowania tła.

Zanim jednak zabierzemy się do pracy, pamiętajmy, że przytoczone tu przykłady dwu- i trójwymiarowego torusa to zaledwie najprostsze do wyobrażenia możliwości. Ile jest wszystkich i jak wyglądają? Próba odpowiedzi na pierwsze z tych pytań to wykraczająca znacznie poza ramy tego artykułu wyprawa w krainę matematyki. Narzędzi do klasyfikacji przestrzeni trójwymiarowych dostarcza udowodniona przez Perelmana hipoteza geometryzacyjna Thurstona, o której pisze na poprzednich stronach Zdzisław Pogoda. Nawet jeśli chcemy ograniczyć nasze rozważania do przestrzeni jednorodnych i izotropowych, i tak pozostaje mnóstwo możliwości.

Kosmologowie zbadali dokładniej pewien interesujący przypadek możliwego kształtu Wszechświata. Opisuje on przestrzeń zakrzywioną, której najprostszą realizacją jest trójwymiarowa sfera. Już to jest trudne do wyobrażenia, gdyż u większości ludzi geometryczne intuicje dobrze działają tylko dla obiektów dających się zanurzyć w trzech wymiarach. Tymczasem realizację trójwymiarowej sfery możemy otrzymać dzięki odpowiedniemu sklejeniu brzożony brzegów dwóch kul, przedstawionemu na rysunku 6, której to operacji w trzech wymiarach wykonać się nie da.

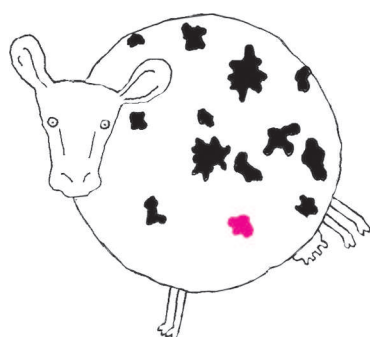
Podobnie jak torus „udawał” nieskończoną trójwymiarową przestrzeń, także trójwymiarowa sfera może być iluzją zbudowaną z mniejszych komórek. Jedną z takich konstrukcji, podaną po raz pierwszy przez Poincarégo, otrzymuje się w następujący sposób. Zaczynamy od podstawowej komórki będącej sferycznym dwunastościanem foremny, przedstawionym na rysunku 7. Każdą ze ścian tego dwunastościanu utożsamiamy ze ścianą przeciwległą obróconą o kąt 36° . Utożsamienie to prowadzi znowu do wrażenia „nieskończonej” przestrzeni. Jeśliby dla lepszej wizualizacji pozostawić krawędzie dwunastościanu jako swego rodzaju rusztowanie w tej przestrzeni, to wyglądałaby ona tak jak na rysunku 8.

Okazuje się, że Wszechświat zbudowany z takich komórek miałby pewne korzystne własności. W tradycyjnych modelach kosmologicznych, używających prawdziwej nieskończonej przestrzeni, fluktuacje mikrofalowego promieniowania tła dla największych widzialnych na niebie skal kątowych są znacznie mniejsze niż wynikające z rozsądnych założeń przewidywania teoretyczne. Problem ten nie występuje dla Wszechświata zbudowanego z opisanych tu trójwymiarowych rozmaitości, między innymi z uwagi na występowanie maksymalnej długości fali tych fluktuacji, która może być nieco mniejsza niż największe skale odległości obserwowalne w mikrofalowym promieniowaniu tła. Model ten bywa jednak krytykowany z uwagi na to, że wymaga Wszechświata o niewielkiej dodatniej krzywiznie, co trudno jest pogodzić z postulatem, że fluktuacje mikrofalowego promieniowania tła powstały podczas inflacji, która „spłaszczyła” przestrzeń do tego stopnia, że jej ewentualna krzywizna nie powinna być możliwa do zaobserwowania. Rozstrzygnięcie tego sporu na niekorzyść modelu tradycyjnego wymagałoby potwierdzenia obecności fluktuacji powtarzających się systematycznie wzdłuż odpowiednich okręgów. Mimo podejmowanych przez różne zespoły badawcze prób sytuacja wciąż jeszcze jest niejasna. Pozostaje mieć nadzieję, że spodziewane w tym roku nowe dane z satelity Planck pomogą w wyjaśnieniu tej zagadki.

Wybrana literatura

- J.-P. Luminet, J. Weeks, A. Riazuelo, R. Lehoucq and J.-P. Uzan, *Dodecahedral space topology as an explanation for weak wide-angle temperature correlations in the cosmic microwave background*, *Nature* **425** (2003) 593.
 - B.F. Roukema, B. Lew, M. Cechowska, A. Marecki and S. Bajtlik, *A hint of Poincaré dodecahedral topology in the WMAP first year sky map*, *Astronom. Astrophys.* **423** (2004) 821.
 - P. Bielewicz, A.J. Banday and K.M. Gorski, *Constraining the topology of the Universe using the polarised CMB maps*, arXiv:1111.6046 [astro-ph.CO].
- Patrz też artykuł Andrzeja Orłowskiego, *Delta* 11(438)/2010.

Pamięci docenta Jerzego Zielińskiego z Instytutu Elektrotechniki w Międzyzlesiu, który pierwszy zwrócił mi uwagę na nowatorstwo badań materii żywej w polach elektrycznych.



Slime – niezwykła żyjąca kula

W pewnym kraju o rozwiniętej technologii, rolnictwie i informatyce powstało przedsiębiorstwo, w którym połączono hodowlę stada mlecznych krów z wytwórnią serów. Światła dyrekcja zatrudniła także grupę informatyków, których poproszono, by zoptymalizowali połączone procesy – zbiórki surowca i tempa wytwarzania produktów. Po kilku miesiącach szef grupy zaprosił dyrektora do swojej pracowni, chcąc zaprezentować mu wyniki modelowania zadanych celów.

Zalóżmy – powiedział główny informatyk – że krowa jest kulą. . .

Tę anegdotę opowiedział mi fizyk rozpoczynający badania w naszym laboratorium, z celem sformułowania modelu zachowania się żywej komórki w różnych polach elektrycznych. Zapytał, czy mamy własną kulę, łatwą do opisu analitycznego.

Kiedy referowałam znacznie później nasze wyniki na różnych konferencjach naukowych, zawsze padało oczywiste pytanie: dlaczego *slime*? Najprostsza odpowiedź brzmiała: bo był, ale to nie jest odpowiedź naukowa. Bardziej naukowa, i w dodatku praktyczna, była taka: *slime* ma kształt kulisty, jest dość odporny na transport i żyje przez kilka godzin w bardzo uproszczonym środowisku. Reaguje na pole elektryczne.

A jakie były wstępne warunki naszych badań? Pomiary odbywały się w instytucie przemysłowym, odległym o 15 km od mojego, biochemicznego. W moim należało *slima* przygotować do doświadczenia, a potem szybko (miałam wartburga, a może trabanta) przejechać te 15 km do zasilaczy i mierników, których biochemicy nie mieli. *Slime* to wszystko wytrzymał i jeszcze można było 2–3 godziny go doświadczać.

Pora przedstawić głównego bohatera. Był to mutant grzyba, *Neurospora crassa*, którego naturalną formą są długie rozgałęzione nici, ich półpłynna zawartość otoczona jest dość sztywną ścianą komórkową. I oto gdzieś na świecie w końcu lat 50. uzyskano mutanta niewytwarzającego ściany. Wtedy zawartość komórki przybiera najrozsądniejszą z punktu widzenia fizyki formę: miękkiej kuli otoczonej błoną.

Co dalej? Dalej okazało się, że te komórki poddane działaniu różnych pól elektrycznych zmieniają się różnie, w zależności od rodzaju pola. Inni ludzie starali się to mierzyć, ale oni nie mieli kuli i analizować wyniki dla nieregularnych brył było im bardzo trudno.

My poddawaliśmy naszego *slime* zmiennemu polu wysokiej częstotliwości albo krótkiemu impulsowi o wysokim napięciu. Zmieniając warunki częstotliwości i natężenia pola, uzyskiwaliśmy: ustawianie się komórek *slime* w długie łańcuszki między elektrodami, łączenie się sąsiadujących ze sobą komórek w większą, odwracalne wydłużanie się komórek i wreszcie ich pęknięcie. Zlewianie się komórek wynikało z powstawania dziury na styku dwu sąsiadów. Do takiej dziury mógł też wejść obcy DNA.

„Wyciąganie” się komórek wzdłuż linii pola można było obserwować w czasie działania pola, ich powrót do kształtu wyjściowego po ustaniu pola był do rozciągania symetryczny. Oba procesy nie miały charakteru liniowego. Znajomy, któremu pokazałam pierwszy taki wykres, nie wiedział, co badam (był chemikiem badającym właściwości cieczy roboczych), ale natychmiast powiedział: masz jakieś ciało lepko sprężyste. . .

Z tych badań powstało kilka prac magisterskich, trzy doktoraty, przyspieszyły jedną profesurę. Na świecie (niestety, nie w Polsce) zbudowano tysiące przyrządów do rutynowego wprowadzania DNA do pojedynczych komórek, wysokonapięciowy impuls zastosowano także w procesie klonowania ssaków. A w moim życiu były największą przygodą intelektualną, którą przeżyłam z lepko sprężystym *slimem*.

Magdalena FIKUS

Ośrodek Kultury Matematycznej w Mordach

– w dwudziestopięciolecie



To jest nasze pierwsze logo. Zrobiliśmy je, gdy jeszcze nie mieliśmy do dyspozycji żadnego programu graficznego – są to pionowe i poziome kreski oraz klamra i inne symbole wzięte z \TeX -a, a linie ukośne uskładaliśmy z pojedynczych kropek.

Andrzej DĄBROWSKI*, Zdzisław POGODA**

Motto: *Ciągle te liczby pierwsze i liczby pierwsze; naprawdę nie ma już o czym mówić?*

(słuchacz Szkoły Matematyki Poglądowej)

To intrygujące zdanie jest bardziej głębokie, niż mogłoby się z pozoru wydawać. Wrażliwy wykładowca matematyki pewnie kiedyś zadawał sobie pytanie, czy to, co mówi, trafia do jego słuchaczy, czy może warto uzupełnić treści matematyczne o refleksje historyczne i filozoficzne. A może warto podzielić się ze słuchaczem wiedzą o niesłychanej pomysłowości, refleksji i dowcipie matematyków. Zapewne zadawał sobie pytanie, czy każdemu można pokazać piękno matematyki.

Niewielu jednak zmierzyło się na serio z pytaniem, czy można by całą matematykę opowiedzieć jako bohaterski epos, porywającą clownadę albo serial przygodowy. My postanowiliśmy to sprawdzić, a raczej, wierząc w to a priori, postanowiliśmy nauczyć się robić to rutynowo. Dziś przypominając sobie tamte czasy, jestem pełny zdumienia nad solidnością, z jaką zabraliśmy się do tej pracy. [1]

Ten piękny i ambitny projekt, Ośrodek Kultury Matematycznej w Mordach, jest realizowany od 25 lat. W styczniu 2013 roku powinna się odbyć 50 Szkoła Matematyki Poglądowej, organizowana przez Ośrodek. Śmiało chyba można stwierdzić, że jest to zjawisko wyjątkowe w skali światowej.

*Instytut Matematyczny,
Uniwersytet Wrocławski

**Instytut Matematyki,
Uniwersytet Jagielloński

Historia

Jak wspomina Marek Kordos [2], pomysł stworzenia Ośrodka Kultury Matematycznej powstał w pociągu relacji Toruń–Warszawa, gdzieś w okolicach Kutna, we wrześniu 1987 roku. Pociągiem wracali z egzaminu doktorskiego w Toruniu Marek Kordos i Leszek Szczerba. Po skonstatowaniu faktu, że warto by uczłowieczyć wykłady z matematyki, Leszek Szczerba zaproponował, aby zastanowić się nad możliwością wykorzystania pałacu gubernatora siedleckiego, wtedy w ruinie, jako miejsca spotkań. *Zanim więc dojechalismy do Warszawy, zamierzenie przybrało konkretny kształt: postanowiliśmy zwołać w grudniu konferencję w tej sprawie. O dziwo, odzew był powszechny (około 50 uczestników z kilkunastu ośrodków akademickich) i trzydniowa konferencja powołała do życia Ośrodek Kultury Matematycznej, a ówczesny rektor WSR-P, Jan Trętowski, podarował Ośrodkowi Pałac w Mordach.*

Wprawdzie do dziś pałac nie jest do końca odbudowany, o darowiźnie zapomniano, ale i tak Ośrodek Kultury Matematycznej umieszcza swoją siedzibę w Mordach i pieczętuje się parafrazą herbu Doliwa widniejącego na frontonie pałacu. Związki z Mordami są mocniejsze, niż się z początku wydawało. Okazało się, że jeden z wykładowców Szkoły Matematyki Poglądowej jest rodowitym mordzianinem.

Postanowiono (...) animować ruch na rzecz tego, by matematyka nie kryła się za formalizmami, nie odstraszała laików, aby była prezentowana ze wskazaniem jej miejsca w całokształcie cywilizacji i kultury, aby jej rozwój był relacjonowany w powiązaniu z wydarzeniami historii powszechnej. [3]

Przed powstałym Ośrodkiem postawiono cztery główne zadania:

- popularyzację działów wyższej matematyki w środowisku samych matematyków,
- pokazywanie najlepszych wzorców wykładowych,
- podnoszenie jakości wykształcenia nauczycieli,
- propagowanie matematyki w środowiskach niematematyków.

Imprezy wyjazdowe

Podnoszenie jakości wykształcenia nauczycieli Ośrodek realizował poprzez imprezy wyjazdowe. Wykładowcy OKM ponad 100 razy jeździli w latach 1988–1989 do ośrodków doskonalenia nauczycieli i uczelni w różnych rejonach kraju. Oznacza to, że średnio co tydzień trzyosobowa lub większa ekipa wykładowców ruszała w Polskę, aby prowadzić wykłady na wybrany przez zamawiającego temat. Lista tematów opublikowana była w zeszytach MSN (o nich dalej) oraz dostępna była w Wojewódzkich Ośrodkach Metodycznych. Była to praca całkowicie społeczna. Jedyne koszty, jaki ponosił gospodarz, to koszty zakwaterowania i przejazdu. Ta piękna idea nie przeszła próby wytrzymałości wykładowców, którzy przecież mieli pracę na uczelniach, a i życie rodzinne miało swoje prawa.

OKM liczył, że słuchacze tych Miniszkół Matematyki Poglądowej zorganizują już sami podobne szkoły w swoim środowisku. Nie udało się to jednak.

Niezwykłym wyjątkiem była inicjatywa grupy nauczycieli warszawskich, z Marią Małek i Barbarą Leciejewską na czele. Zorganizowali oni 5 pięciodniowych Szkół Matematyki Poglądowej z udziałem wykładowców OKM.

Na podstawie starannych notatek pierwszej z tych Szkół wydano napisaną przez dwunastu uczestników książkę *Szkola Geometrii. Odczyty kaliskie* (WSiP, Warszawa 1993). Notatek z pozostałych spotkań, niestety, nie udało się wydać.

Zeszyty MSN

Innym materialnym efektem pracy OKM są zeszyty *Matematyka-Społeczeństwo-Nauczanie*, wydawane przez uczelnię siedlecką (zmieniającą wielokrotnie w opisywanym okresie swoją nazwę: od WSR-P, przez AP do UPH). Publikowane są w nich niektóre wykłady ze Szkół Matematyki Poglądowej, ale i recenzje książek, wykłady wygłoszone na innych konferencjach, polemiki, teksty całkowicie oryginalne i nigdzie wcześniej niepublikowane. Są też prawdziwe rarytasy, jak wykład habilitacyjny Riemanna w zupełnie nowym tłumaczeniu, opublikowany w numerze 4. Wydano dotąd 49 Zeszytów. Pierwsze 45 zeszytów redagowali Marek Kordos i Anna Rudnik. Począwszy od numeru 46. redaktorem jest Michał Kieza.

Szkoły Matematyki Poglądowej

Głównym narzędziem realizacji postawionych przed OKM zadań miały być Szkoły Matematyki Poglądowej. Założeniem Szkół było *kształcenie młodych pracowników nauki w demonstrowaniu na prowadzonych zajęciach matematyki niekryjącej się za formalizmami, powiązanej zarówno ze swą historią, jak też z całokształtem cywilizacji i kultury*. [2]

Początkowo Szkoły miały być poświęcone dużym działom matematyki. Bardzo szybko, bo już po drugiej szkole, okazało się, że taki model szkoły jest nietrafiony. Zakładana poglądowość wykładów była trudna do pogodzenia z rzetelnym, prawie monograficznym przedstawieniem ważnych teorii matematycznych. Powołana w tym celu Rada Programowa OKM, szczególnie w początkowym okresie Szkół, recenzowała wykłady, dyskutowała o doborze tematów i wskazywała ciekawych wykładowców do ich wygłoszenia.

Z czasem ujawniły się trzy opcje prowadzenia Szkół (klasyfikacja Marka Kordosa):

- opcja „matematyczna”, według której Szkoły mają krzewić kulturę matematyczną (rozumianą jako umiejętność objaśniania tego, co nowe) wśród pracowników wyższych uczelni,
- opcja „ogólnokształcąca” – Szkoły mają przekazywać matematikom i niematematykom minimum ogólnej wiedzy matematycznej, na którą składają się historia i filozofia matematyki oraz klasyczne problemy,
- opcja „społeczna” – Szkoły mają pokazywać pomysły dydaktyczne, ciekawe tematy, które można zrealizować na różnych szczeblach nauczania.

Później, szczególnie począwszy od Szkoły 26. (hasło *Twierdzenia z pogranicza*), doszła jeszcze opcja „aplikacyjna”, gdzie pokazuje się, jak matematyka rozwiązuje problemy innych dziedzin.

Każda Szkoła jest mieszanką tych tendencji. Musi tak być, bo wiemy już, że każda z tych tendencji samodzielnie jest trudna do strawienia. [1]

Środowisko matematyków różnych specjalności i z różnych ośrodków, którzy wiernie towarzyszą Szkołom, jest liczne. Są wśród nich wielokrotni wykładowcy, jak i wieloletni uczestnicy. Na 900 zarejestrowanych słuchaczy (dane dotyczą pierwszych 48 Szkół) 25 uczestniczyło co najmniej w 20 Szkołach; 53% wszystkich 1040 wykładów wygłosiło 15% wszystkich wykładowców (było ich przeszło 250). Dziesięciu najbardziej pracowitych wykładowców wygłosiło 27% wszystkich wykładów.

Działalność na rzecz kultury matematycznej udało się podnieść do rangi niezbędnego elementu kształcenia na każdym szczeblu. Działalność OKM może być o tyle związana z tą tendencją, że uczestnicy działań OKM stanowią nieledwie większość nagrodzonych Wielką Nagrodą PTM im. Samuela Dicksteina i Nagrodą im. Hugona Steinhausa przyznaną przez Polską Fundację Upowszechniania Nauki i Towarzystwo Popierania i Krzewienia Nauk, a więc największymi polskimi laurami w tym zakresie. [3]

Dzięki Szkołom mogli poznać się bliżej (zawarto nawet przynajmniej jedno małżeństwo) przedstawiciele różnych dziedzin, nie tylko matematyki. Wykładowców Szkoły można spotkać na odczytach w szkołach, sejmikach, festiwalach nauki. Są wśród nich autorzy i tłumacze podręczników i książek, autorzy artykułów i audycji z matematyki i o matematyce. Szkoły Matematyki Poglądowej mają też wpływ na to, jak jest wykładana matematyka. Dbałość o jasność wykładu, dobry wybór materiału, dyscyplina czasowa, przekazywanie nie tylko treści twierdzeń, ale ich motywacji filozoficznej, obserwowane u najlepszych wykładowców, znajdują swoich naśladowców. Coraz częściej historia matematyki jest niezbędnym elementem dobrego wykładu. *Dziś w każdej uczelni jest wykładany taki przedmiot i trudno uwierzyć, że tak nie było zawsze*. [2]

Ważną rzeczą jest podkreślenie wielkiego wkładu w tę działalność uczelni siedleckiej – obecnie Akademii Podlaskiej (to już się zmieniło: Uniwersytetu Przyrodniczo-Humanistycznego). Szczególna troska o funkcjonowanie OKM, jaką wykazywali wszyscy kolejni Rektorzy tej uczelni, począwszy od profesora Jana Trętowskiego, a także praktyczna organizacja działań OKM, gdzie trzeba podkreślić niezwykle skuteczną aktywność dr. Mirosława Jakubiaka, spowodowały, że twór fantazji raczej niż pragmatyzmu potrafi skutecznie funkcjonować już niemal 25 lat, jak sądzimy z pożytkiem dla kultury matematycznej tak zawodowych matematyków, jak nauczania wszystkich szczebli, a nawet, mówiąc szumnie, szerzej rozumianego społeczeństwa. [3]

Nie byłoby Ośrodka Kultury Matematycznej bez Marka Kordosa. To jego pomysłem były wszystkie inicjatywy: Szkoły, imprezy wyjazdowe, wydawnictwo. To on pracowicie wynajdował i przekonywał różne osoby,

aby występowały na Szkole. To on zarażał nas swoją energią i często wymuszał działanie, kiedy upadaliśmy na duchu. Najlepiej powie sam Marek: *Wiedziałem, że to, na czym nam zależy, należy troskliwie pielęgnować. Tak więc sprawę, o której przede wszystkim postanowiłem pamiętać, dyrektywę, której przede wszystkim postanowiłem przestrzegać, była troska o faktycznie zbiorowy, swobodny trud swobodnie zrzeszonych ludzi. I to jest aspekt romantyczny, przynajmniej mojego działania.* [1]

Od Szkoły 40., od zimy roku 2008 Szkoły Matematyki Poglądowej prowadzi nowy zespół. Jego skład ulegał zmianom. Ostatnio jest to ekipa krakowsko-warszawska: Dominik Kwietniak i Michał Szostakiewicz.

Szkoły Matematyki Poglądowej odbywają się dwa razy w roku, w ostatni (pięciodniowy) weekend stycznia i sierpnia. Począwszy od 20. Szkoły (Grzegorzewice 1998) proponowanych jest 26 wykładów 45-minutowych, których zakres odpowiada zazwyczaj tematowi Szkoły (poprzednio bywało 13, a czasem 20 lub więcej wykładów 90-minutowych). Temat Szkoły jest na ogół interdyscyplinarny, pozwalający na dość swobodną interpretację przez wykładowcę.

Trudno opisać wszystkie 48 imprez. Wymienimy tylko kilka, które subiektywnie uważamy za szczególnie ciekawe.

Szkoła 8. Przełomy w matematyce (zima 1992, Miętne) rozpoczęła nurt historii matematyki na Szkołach Matematyki Poglądowej. Słuchacze mogli śledzić powstanie podstawowych pojęć w matematyce. Mogli dowiedzieć się o początkach i rozwoju głównych teorii matematycznych.

Szkoła 12. Symetrie (zima 1994, Miętne) była chyba pierwszą, gdzie pojawiły się w sposób czysty tematy niematematyczne. Fizyk Jan Mozrzyk mówił wtedy o symetriach w fizyce, a socjolog Wojciech Sitek o symetriach w socjologii.

Temat **Szkoły 17. Matematyczne perełki** (lato 1996, Siedlce) był szansą dla wykładowców na pokazanie najbardziej cenionych przez siebie wyników matematycznych. Dla słuchaczy sam temat szkoły krył niespodziankę – co może być tą perełką i jak się z tego zadania wywiąże wykładowca. Takich niezwykle ciekawych tematów było w historii szkół wiele.

Matematyka rozwija się dzięki analizie istotnych przypadków, dowodów, konstrukcji. Na **Szkole 19.**

Ważne przykłady (lato 1996, Siedlce) przedstawiono ich katalog z różnych dziedzin matematyki.

Na swoją jubileuszową **20. Szkołę** (zima 1998, Grzegorzewice) Ośrodek Kultury Matematycznej zaproponował – jakże by inaczej – hasło **Kultura Matematyczna – teoria i zbiór zadań**; ciekawe, że słowo „kultura” pojawiło się w tytułach tylko czterech wykładów!

Szkoła 23. Linearyzacja (lato 1999, Siedlce) prezentowała bogactwo i wszechobecność struktur liniowych w matematyce, ale i w sztuce Eschera.

W rocznicę przełomowego wykładu Hilberta przewrotnie, na **Szkole 25. Elementarnie, ale niebanalnie** (lato 2000, Grzegorzewice) zaproponowano wykładowcom poszukiwanie takich elementarnych problemów, których rozwiązanie dało początek niebanalnym teoriom.

Szkoła 26. Twierdzenia z pogranicza (zima 2001, Grzegorzewice) była początkiem rewolucji w OKM. Z wykładem o odczytywaniu kodu DNA wystąpiła Magdalena Fikus. Otrzymała medal Filca (o medalu dalej) za wystąpienie, w którym nie było wcale matematyki. Było to tak ciekawe dla słuchaczy, że przez wiele następnych szkół pojawiały się zupełnie niematematyczne tematy, nawet z muzyki (Alicja Gronau-Osińska też otrzymała medal Filca). Na tej Szkole były jeszcze odczyty o prognozowaniu pogody i o nowotworach, ale jednak z udziałem metod matematycznych. Następna Szkoła była poświęcona relacji matematyki z informatyką, ale inne dyscypliny były na niej wyraźnie widoczne (biologia, genomika, diagnostyka medyczna, lingwistyka). Podobnie było ze **Szkołą 28. Pomysły** [4].

Szkoła 29. Przestrzeń (lato 2002, Grzegorzewice) była jeszcze bardziej przełomowa. Przyjęcie zgotowane historykowi, biologowi, filozofowi, architektowi, fonografowi, polonistom, fizykom, astronomowi czy wreszcie muzykowi, który zdobył medal Filca, było wręcz entuzjastyczne. Nic przeto dziwnego, że na następnej Szkole (o osobliwościach) mówił, między innymi, lekarz, ekonomista, chemik czy astronom (i on został odznaczony) [4].

Niezwykła, szczególnie dla wykładowców, a zapewne i dla słuchaczy, była **Szkoła 31. Wybrane dzieła klasyków** (lato 2003, Grzegorzewice) – obcowanie z tymi dziełami, smakowanie ich języka i bogactwa argumentacji było niezwykle doświadczeniem.

Wspominając jedno, a pomijając inne, mamy świadomość, że dokonujemy bardzo subiektywnego wyboru i możemy opuścić coś ważnego, bo tak naprawdę to każda Szkoła była ważnym wydarzeniem, nawet te bardziej krytykowane.

Bogactwo tematyki Szkół pozwalało wybrać każdemu według jego potrzeb. Monograficzne Szkoły dostarczały odczytów o prawdopodobieństwie, ciągłości, geometrii, teorii liczb, izomorfizmie, aproksymacjach, dyskretnych metodach matematyki, nieskończoności. Inne Szkoły to mieszanka porad dydaktycznych, tematów historycznych, zestawień tematów połączonych czasami zaskakującym hasłem. Słuchacze zapewne intrygowano, co może się kryć pod tematami: **Matematyczne wytrychy, Efektownie i efektywnie, Skąd się to wzięło, Pomysły, NIE w matematyce i okolicach, Pomysł czy rachunek, Matematyczne obrazki, Do czego to się przydaje, Co mi się podoba?**

Miejsca

Najstarsi uczestnicy szkół pamiętają spartańskie Zawady, gdzie śnieg padał (w niektórych miejscach) do wnętrza baraku, na posiłki biegano się do szopy, gdzie mieściła się

jednorazowo tylko 1/3 uczestników, a spało się w wieloosobowych pokojach. Musiało jednak być w tych Szkołach coś pociągającego, skoro chętnych nie brakowało. Szkoły były też w Siedlcach, Miętne, aż trafiły do rajskich Grzegorzewic [2].

Miętne pamięta się przede wszystkim ze ślubu wykładowcy ze słuchaczką, który odbył się w Pałacu w Mordach według celebry OKM. Ślub odbył się również w realu, a Szkoła straciła (na rzecz USA) doskonałego wykładowcę i uroczą słuchaczkę. Z Miętne pamięta się też licytację, na której wystawiono różne gadzety, między innymi kultową koszulę w czerwonej kratę pewnego wykładowcy. Warunki życia, ale i koszty były zbyt luksusowe, więc Szkoła przeniosła się w zimie 1997 roku na 12 lat do wspomnianych z sentymentem Grzegorzewic.

Po przyjeździe do Grzegorzewic pierwsze kroki kierowane były do klubu, mieszczącego się w piwnicach pałacyku. Tam też spędzano wszystkie wieczory. Znajomy zapach pleśni zniknął już po pierwszym wieczorze spędzonym nad szklanką piwa lub kieliszkiem wina. W sąsiednich salach odbywały się spontaniczne turnieje ping ponga, w innej mecze brydżowe, piłkarzyki. Rozgrywano też aktualnie modne gry. W ostatnich latach popularne były partyjki scrabble'a. Odbywały się tam i tańce, zimą miał tradycyjnie miejsce składkowy bankiet z napojem magicznym receptury jednego z wykładowców (w czasie jego nieobecności receptura była konsultowana telefonicznie). Studenci pewnie byliby zdziwieni widokiem ich nauczycieli, którzy rapują po rosyjsku przy aktywnym udziale sali. Niezapomniany był widok Kuby naprawiającego rozstrojone pianino przez kilka kolejnych spotkań. Jego bezowocne próby zaowocowały całkiem poważnym odczytem *Porządkowanie dźwięków, czyli dlaczego nie da się nastroić pianina w Grzegorzewicach*. Latem zamiast bankietu organizowano ognisko z kiełbaskami i śpiewami. A niezależnie od pory roku

udawano się na spacer po groblach stawów rybnych lub nad brzegiem przepływającej tam rzeczki o pięknej nazwie Pisia Gągolina. Po wyjeździe z Grzegorzewic, mimo radykalnej poprawy warunków bytowych (a może właśnie z tego powodu) już nigdzie nie mogliśmy odtworzyć takiej atmosfery...

Konkursy

Od 18 lat, pod koniec każdej Szkoły, ogłaszane są wyniki plebiscytu na najlepszego wykładowcę – konkursu budzącego całe spektrum emocji zarówno wśród słuchaczy, jak i wykładowców. Zwycięzca otrzymuje wykonany z filcu medal Filca (nazwa jest świadomą grą słów, ale musimy podkreślić, że nie jest to medal Fieldsa, chociażby z tego powodu, iż jego laureaci mogą mieć powyżej 40 lat). Następna Szkoła rozpoczyna się od wręczenia tego medalu, a laureat wygłasza pierwszy odczyt na dowolnie wybrany przez siebie temat. Medalem nagrodzono dotąd 35 osób. Trzy z nich otrzymały medal Filca trzykrotnie.

Od Szkoły letniej w roku 2004 ogłaszany jest inny konkurs: na Najlepszego Słuchacza, odbywający się w ostatni wieczór. Zwycięzca musi wykazać się nie tylko bardzo dobrą znajomością wykładów z aktualnej Szkoły, ale także refleksem, bystrością i inteligencją, bowiem większość pytań trudno zaliczyć do standardowych.

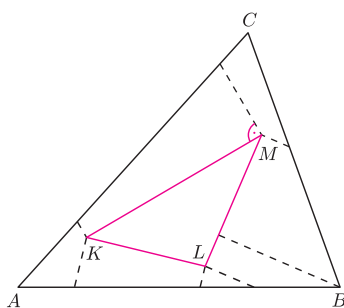
Uwagi końcowe

Artykuł utkany jest cytatami z artykułów i wspomnień Marka Kordosa. Nie umieliśmy w wielu miejscach lepiej skomentować i opisać wydarzeń związanych z Ośrodkiem Kultury Matematycznej. Dziękujemy za wirtualny udział przy pisaniu tego artykułu. Błędy bierzemy na siebie. Przy pisaniu tych wspomnień korzystaliśmy obficie z materiałów zamieszczonych na świetnie udokumentowanej stronie Szkół <http://www.msn.uph.edu.pl/smp>. Czytelnika zachęcamy do samodzielnej eksploracji tych bogactw.

Zaznaczone zostały cytowania

- [1] M. Kordos, *Więc nie prześladujcie zła zbyt uporczywie*, MSN 16
- [2] M. Kordos, *Pamiętajmy o Leszku Szczerbie*, MSN 46
- [3] <http://www.msn.uph.siedlce.pl/smp/?strona=historia>
- [4] M. Kordos, *Inna jakość*, MSN 31

Kącik przestrzenny (15): O sumie długości krawędzi czworościanu

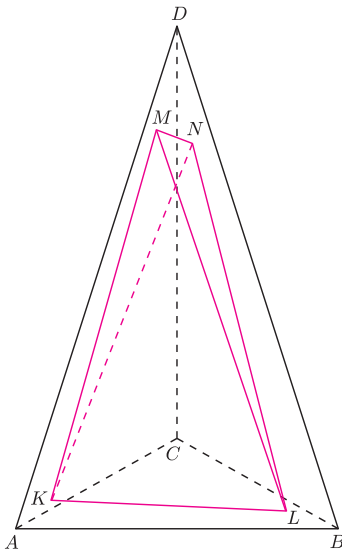


Rys. 1

Jeśli na płaszczyźnie wewnątrz trójkąta ABC znajduje się trójkąt KLM , to obwód trójkąta KLM jest nie większy od obwodu trójkąta ABC .

Pomysł, na którym opiera się dowód tego faktu, został przedstawiony na rysunku 1. W podobny sposób można udowodnić, że jeśli czworościan $KLMN$ znajduje się wewnątrz czworościanu $ABCD$, to jego pole powierzchni jest mniejsze od pola powierzchni $ABCD$. A co umiemy powiedzieć o sumie długości krawędzi?

Jeśli czworościan $ABCD$ jest foremny, to jego krawędzie mają długości nie mniejsze od długości krawędzi czworościanu $KLMN$. W takim razie suma długości krawędzi czworościanu $ABCD$ jest nie mniejsza od sumy długości krawędzi czworościanu $KLMN$. Jednak w ogólności nie musi tak być.



Rys. 2

Rozważmy mianowicie ostrosłup prawidłowy $ABCD$ o podstawie ABC , która ma boki długości 1, i ramionach długości d (rys. 2). Umieścimy wewnątrz niego czworościan $KLMN$ w taki sposób, że wierzchołek K jest blisko A , L – blisko B , zaś M i N blisko wierzchołka D . Wtedy suma krawędzi ostrosłupa $ABCD$ jest równa $3 + 3d$, zaś suma krawędzi czworościanu $KLMN$ jest większa od sumy $KM + KN + LM + LN$, która może być dowolnie bliska $4d$. Jeśli więc weźmiemy d znacznie większe niż 1, to suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ będzie większa od sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

Widzimy zatem, że podany na początku fakt nie przenosi się z płaszczyzny na przestrzeń. Jednak w obu powyższych przykładach suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ nie przekracza $\frac{4}{3}$ sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$. I właśnie to spostrzeżenie udowodnimy:

Jeśli czworościan $KLMN$ jest zawarty wewnątrz czworościanu $ABCD$, to suma długości jego krawędzi jest nie większa od $\frac{4}{3}$ sumy długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

Powyższy problem był jednym z zadań na finale olimpiady w ZSRR w 1982 roku. Dowód podzielimy na kilka podproblemów. Dalej podajemy rozwiązania, ale zachęcamy do samodzielnej pracy.

Krok 1. Załóżmy bez straty dla ogólności, że KLM jest ścianą o największym obwodzie. Wtedy suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ nie przekracza dwukrotności obwodu trójkąta KLM .

Krok 2. Załóżmy, że ℓ jest obwodem wielokąta będącego przekrojem czworościanu $ABCD$ płaszczyzną KLM . Wtedy obwód trójkąta KLM nie przekracza ℓ .

Krok 3. Niech A', B', C', D' będą odpowiednio rzutami prostokątnymi punktów A, B, C, D na płaszczyznę KLM . Wtedy suma długości wszystkich odcinków łączących punkty A', B', C', D' jest nie mniejsza niż $\frac{3}{2}\ell$. (Ten fragment dowodu jest najtrudniejszy.)

Krok 4. Suma długości odcinków łączących punkty A', B', C', D' jest nie większa niż suma długości krawędzi czworościanu $ABCD$.

Rozwiązania

Krok 1. Suma długości krawędzi czworościanu $KLMN$ jest równa połowie sumy obwodów wszystkich czterech jego ścian. Ta ostatnia zaś nie może przekraczać dwukrotności obwodu ściany o największym obwodzie.

Krok 2. Pomysł przedstawiony na rysunku 1 działa i w tej sytuacji.

Krok 3. Załóżmy najpierw, że punkty A', B', C', D' są wierzchołkami czworokąta wypukłego. (Oczywiście punkty te mogą leżeć na obwodzie czworokąta w różnej kolejności!) Rozważany przekrój czworościanu jest wypukły i leży wewnątrz tego czworokąta (rys. 4 i 5). Zatem ℓ nie może przekraczać obwodu czworokąta o wierzchołkach A', B', C', D' (dowód jak na rysunku 1). Ponadto z nierówności trójkąta wiemy, że suma długości przekątnych czworokąta wypukłego jest większa od połowy jego obwodu. Łącząc te dwie nierówności, dostajemy

$$\frac{3}{2}\ell \leq A'B' + A'C' + A'D' + B'C' + B'D' + C'D'.$$

Przyjmijmy teraz, że jeden z tych punktów (np. D') leży wewnątrz lub na brzegu trójkąta wyznaczonego przez pozostałe punkty. Podobnie stwierdzamy, że rozważany przekrój jest wypukły i leży wewnątrz tego trójkąta (rys. 6). Zatem

$$\ell \leq A'B' + B'C' + C'A'.$$

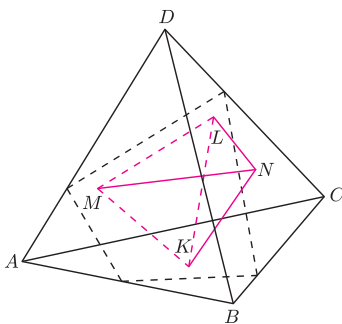
Z nierówności trójkąta otrzymujemy

$$\frac{1}{2}(A'B' + B'C' + C'A') \leq A'D' + B'D' + C'D'.$$

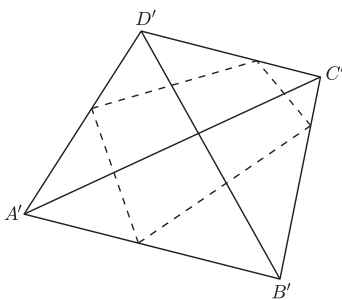
I tym razem te dwie nierówności dają żądane oszacowanie.

Krok 4. Wynika to natychmiast z faktu, że długość odcinka nie może być mniejsza niż długość jego rzutu prostokątnego na dowolną płaszczyznę.

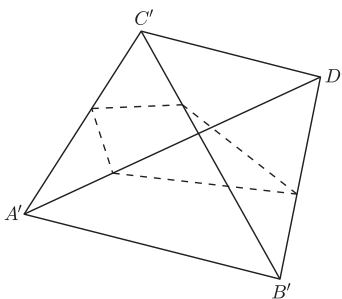
Michał KIEZA



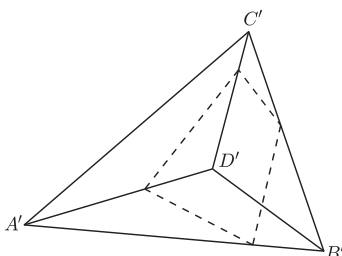
Rys. 3



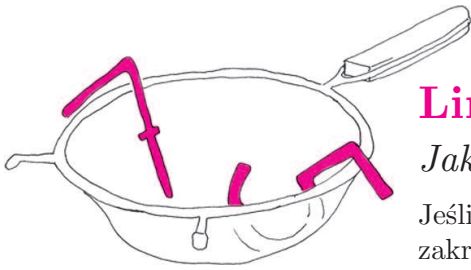
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Liniowe sito

Jakub RADOSZEWSKI

Jeśli potrzebne nam są do czegoś liczby pierwsze z pewnego początkowego zakresu, zazwyczaj wyznaczamy je za pomocą sita Eratostenesa.

Zaczynamy od wypisania kolejno wszystkich liczb od 2 do n . Następnie zaznaczamy 2 i wykreślamy wszystkie jej wielokrotności, zaznaczamy 3 i wykreślamy jej wielokrotności, dalej to samo z kolejnymi niewykreślonymi liczbami: 5, 7 itd. Jest to bardzo efektywna metoda; wykonujemy w niej rzędu $O(n \log \log n)$ operacji, o czym można przekonać się, czytając artykuł pt. „Jak szybko działa sito?” w *Delcie* 4/2012. $O(n \log \log n)$ to prawie $O(n)$, ale jednak nie. Większa niż liniowa złożoność czasowa związana jest z tym, że w sicie Eratostenesa pozwalamy sobie na pewną rozrzutność, gdyż niektóre liczby złożone wykreślamy wielokrotnie. Zależnie od szczegółów implementacyjnych, pierwszą taką liczbą złożoną jest 6 albo 12. Zastanówmy się jednak, czy nie dałoby się każdej liczby złożonej wykreślić dokładnie raz?

Tak jak w zwykłym sicie, na początku tworzymy listę wszystkich liczb od 2 do n . Znowu w pierwszym kroku ustalamy liczbę pierwszą $p = 2$. Dalej będzie trochę inaczej niż poprzednio, ale nie tak znowu skomplikowanie. Rozważamy kolejne (niewykreślone i nie mniejsze niż p) liczby q na liście i dla każdej z nich wykreślamy wszystkie liczby postaci $p^i \cdot q$ dla $i = 1, 2, \dots$

Zobaczmy to na przykładzie; niech $n = 40$.

Na początku mamy $p = 2$ i listę przeglądamy, począwszy od $q = 2$. W pierwszym kroku wykreślamy liczby postaci $2^i \cdot 2$ dla $i \geq 1$, czyli potęgi dwójki:

	②	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Przyszła pora na $q = 3$; wykreślamy wszystkie liczby postaci $2^i \cdot 3$:

	②	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Kolejną nieskreśloną liczbą jest $q = 5$. Wykreślamy więc liczby postaci $2^i \cdot 5$:

	②	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Nietrudno zgadnąć, co będzie dalej. Czytelnik zechce sprawdzić, że po pełnym rozpatrzeniu $p = 2$ na liście pozostaną po prostu wszystkie liczby nieparzyste.

	②	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Przyszła wreszcie pora na $p = 3$. Rozważamy wszystkie dotychczas nieskreślone wartości q nie mniejsze niż p . Zaczynamy od $q = p = 3$, czyli najpierw wykreślamy potęgi trójki:

	②	③	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Następnie mamy $q = 5$ i wykreślamy tylko 15; $q = 7$ i znika 21; dalej wykreślimy jeszcze 33 i 39:

	②	③	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40



Rozwiązanie zadania F 824.

Zanurzoną część góry możemy otrzymać z całej góry przez jednokładność o skali ξ względem wierzchołka stożka. Równowaga siły ciężkości i wyporu prowadzi do warunku

$$\rho\pi R^2 h g = \rho_w \pi R^2 h \xi^3 g,$$

gdzie R jest promieniem podstawy stożka, h jego wysokością, a ρ i ρ_w gęstościami odpowiednio lodu i wody.

Stąd $\xi = \sqrt[3]{\rho/\rho_w}$; podstawiając $\rho = 0,92 \text{ g/cm}^3$ i $\rho_w = 1 \text{ g/cm}^3$, stwierdzamy, że zanurzona część wysokości to $\xi \approx 0,97$ wysokości góry, a zatem nad powierzchnię wystaje zaledwie około 3% wysokości góry.

W ten sposób rozważyliśmy $p = 3$, przechodzimy do $p = 5$. Za pomocą $q = 5$ wykreśliłyśmy już tylko 25, a za pomocą $q = 7$ wykreśliłyśmy 35.

	②	③	4	⑤	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40

Dla każdego kolejnego kandydata na p liczba p^2 jest większa niż n , możemy więc śmiało stwierdzić, że na liście pozostały nam już tylko liczby pierwsze (i to wszystkie w badanym zakresie).

W tym przykładzie rzeczywiście każdą liczbę złożoną skreśliliśmy dokładnie raz. Nie jest to przypadek; liczbę złożoną

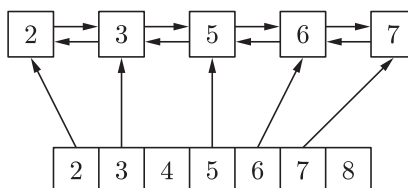
$$k = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l} \quad (p_1 < p_2 < \dots < p_l)$$

skreślamy w przebiegu algorytmu, w którym $p = p_1$ i $q = p_2^{a_2} \dots p_l^{a_l}$ (a jeśli $l = 1$, to, oczywiście, dla $p = q = p_1$). To, w szczególności, oznacza, że dla każdej liczby złożonej obliczamy przy okazji jej najmniejszy dzielnik pierwszy.

Możemy więc pokusić się o stwierdzenie, że cała metoda wykonuje wymarzone $O(n)$ operacji. Aby jednak dało się ją przekuć na algorytm o liniowym koszcie czasowym, musimy przyjrzeć się dokładniej używanej strukturze danych. Mamy tu do czynienia z dwoma typami operacji: znajdowaniem następnego elementu na liście (potrzebne do rozpatrywania kolejnych p i q) oraz wykreśleniem danej liczby z listy. O ile pierwszą z tych operacji wykonuje się na liście standardowo w czasie stałym, o tyle druga z nich sprawia pewien kłopot. W przypadku listy nie mamy bowiem swobodnego dostępu do jej elementów. Taki dostęp daje np. tablica, która to struktura nie pozwala z kolei na proste usuwanie bądź wykreślanie elementów...

Klucz do rozwiązania tej ostatniej trudności stanowi połączenie dwóch wspomnianych struktur danych, czyli listy i tablicy. Dokładniej, oprócz *dwukierunkowej* listy wszystkich niewykreślonych elementów utrzymujemy tablicę wskaźników do poszczególnych liczb od 2 do n na liście. Jeśli danej liczby nie ma już na liście, w odpowiednim polu tablicy możemy wstawić np. **nil**. Za pomocą wskaźników zapisanych w tablicy łatwo znajdujemy elementy listy, które chcemy wykreślić, a potem usuwamy je już standardowo – podpinając do siebie wzajemnie następny i poprzedni element listy.

Przykładowo, opisana struktura danych dla $n = 8$ po wykreśleniu potęg dwójki wygląda tak:



Teraz możemy już z całą pewnością powiedzieć, że otrzymaliśmy liniową metodę wykrywania wszystkich liczb pierwszych w danym początkowym zakresie liczb. Czy w praktyce jest ona lepsza od klasycznego sita Eratostenesa? Nie sądzę. Za to ma ona pewne ciekawe z teoretycznego punktu widzenia zastosowanie, o czym można przeczytać w kolejnym artykule w tym numerze *Delty*.

Odpowiednią strukturą danych może być także para tablic $prev[2..n]$ i $next[2..n]$, w których trzymamy dowiązania listowe: $prev[x]$ oznacza element poprzedzający x na liście, zaś $next[x]$ oznacza element następujący po x . Dla uproszczenia implementacji nasza lista będzie cykliczna (tzn. po elemencie n następuje 2). Sytuację, gdy x został wykreślony z listy, oznaczymy przez $next[x] = \text{nil}$. Oto pseudokod takiego algorytmu:

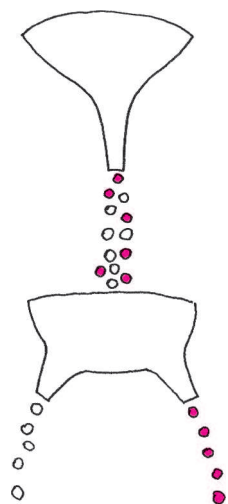
```

for i := 2 to n do
  prev[i] := i - 1;
  next[i] := i + 1;
next[n] := 2; prev[2] := n;
p := 2;
while p^2 ≤ n do
  q := p;
  while p · q ≤ n do
    r := p · q;
    while r ≤ n do
      next[prev[r]] := next[r];
      prev[next[r]] := prev[r];
      next[r] := nil;
      r := r · p;
    q := next[q];
  p := next[p];

```

Co ciekawe, mimo trzech zagnieżdżonych pętli **while** algorytm jest liniowy.

Opisany algorytm pochodzi z 1978 roku i jest autorstwa Davida Griesa i Jayadeva Misry. Co ciekawe, wszystkie liczby pierwsze z zakresu od 2 do n można znaleźć nawet w czasie $O(n/\log \log n)$ (Paul Pritchard, 1981).



Podobnie jak wyznaczanie liczb pierwszych, problem znajdowania największego wspólnego dzielnika (NWD) dwóch liczb naturalnych ma klasyczne i zapewne wszystkim Czytelnikom znane rozwiązanie. Mowa oczywiście o algorytmie Euklidesa, jednym z najstarszych do dziś używanych algorytmów. Jest to rozwiązanie bardzo proste w implementacji, a w wersji z dzieleniem – efektywne: pozwala wyznaczyć NWD dwóch liczb nie większych niż n w czasie $O(\log n)$. W pewnych przypadkach istnieją jednak rozwiązania asymptotycznie szybsze.

Załóżmy, że chcemy wyznaczać największy wspólny dzielnik dla wielu par stosunkowo niewielkich liczb. A konkretnie – dla q par liczb całkowitych dodatnich nieprzekraczających n . Stosując algorytm Euklidesa, otrzymujemy oczywiście algorytm o złożoności czasowej $O(q \log n)$. Możemy także spamiętać w dużej tablicy odpowiedzi na wszystkie możliwe n^2 zapytań. Wówczas przy pierwszym podejściu możemy otrzymać złożoność $O(n^2 \log n + q)$, gdy dla każdej możliwej pary zastosujemy niezależnie algorytm Euklidesa. Bez problemów takie rozwiązanie możemy przyspieszyć do $O(n^2 + q)$, ponieważ pojedynczy krok algorytmu Euklidesa sprowadza wyznaczanie NWD dla pary (i, j) do problemu obliczenia NWD dla pewnej pary leksykograficznie mniejszej. Możemy zatem wypełniać tablicę w odpowiedniej kolejności i w każdym kroku przepisywać wynik ze wskazanej komórki. W praktyce lepiej w tej sytuacji korzystać z algorytmu Euklidesa w wersji z odejmowaniem, gdyż procesory wykonują je istotnie szybciej niż wyznaczanie reszty z dzielenia. Otrzymujemy w ten sposób następujący algorytm:

```

Algorytm tablicuj-nwd( $n$ )
  for  $i := 1$  to  $n$  do
     $nwd[i, i] := i$ ;
  for  $i := 1$  to  $n$  do
    for  $j := 1$  to  $i - 1$  do
       $nwd[j, i] := nwd[i, j] := nwd[j, i - j]$ ;
    
```

Czas obliczeń wstępnych rzędu $O(n^2)$ jest jednak mało satysfakcjonujący – dopiero przy $\Omega(n^2 / \log n)$ zapytaniach podejście korzystające z algorytmu Euklidesa przestaje osiągać lepsze wyniki.

Spróbujmy odnieść pewne korzyści już z obliczeń wstępnych rzędu $O(n)$. Jak przekonaliśmy się w poprzednim artykule, w tym czasie można wyznaczyć wszystkie liczby pierwsze nieprzekraczające n . Zaprezentowany tam algorytm jest jednak znacznie silniejszy – dla każdej liczby k oblicza jej najmniejszy dzielnik pierwszy (oznaczany tu przez $ndp[k]$) oraz największą potęgę tego $ndp[k]$ dzielącą k . Za ich pomocą można łatwo skonstruować algorytm znajdowania NWD, działający w czasie proporcjonalnym do liczby różnych dzielników pierwszych argumentów. Pesymistycznie wielkość ta wynosi $O(\frac{\log n}{\log \log n})$, więc zapytania obsługiwane są niewiele szybciej niż przez algorytm Euklidesa. Okazuje się jednak, że przy liniowych obliczeniach wstępnych można osiągnąć stały czas zapytania!

Na wstępie zauważmy, że jeśli jeden z argumentów jest liczbą pierwszą, obliczenie NWD jest bardzo łatwe. Również łatwo możemy wyznaczać NWD liczb mniejszych niż \sqrt{n} : jeśli mamy do dyspozycji czas $O(n)$ na obliczenia wstępne, można spamiętać wszystkie wartości NWD, wywołując *tablicuj-nwd*($\lfloor \sqrt{n} \rfloor$). Jak się wkrótce przekonamy, dowolne zapytanie o NWD można sprowadzić do stałej liczby zapytań, w których każdy z argumentów jest liczbą pierwszą lub nie przekracza \sqrt{n} . Kluczowe jest tu pojęcie *rozkładu specjalnego*.

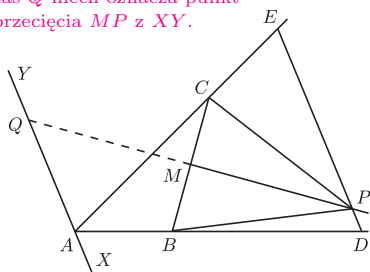
Definicja. *Rozkładem specjalnym* dodatniej liczby całkowitej k nazwiemy trójkę liczb całkowitych (k_1, k_2, k_3) , dla której $k_1 k_2 k_3 = k$ oraz dla każdego i :

$$k_i \leq \sqrt{k} \quad \text{lub} \quad k_i \text{ jest liczbą pierwszą.}$$



Rozwiązanie zadania M 1372.

Poprowadźmy prostą XY przechodzącą przez punkt A i równoległą do DE . Niech M będzie środkiem BC , zaś Q niech oznacza punkt przecięcia MP z XY .



Skoro punkt M jest środkiem BC , jego odległość od prostej DE to średnia arytmetyczna odległości punktów B i C od DE . Jest ona równa średniej arytmetycznej odległości tych punktów od XY , ponieważ $AB/BD = CE/CA$ i $XY \parallel DE$. Zatem M jest równo odległy od DE i XY , skąd $MQ = MP$ oraz $\sphericalangle BQC = \sphericalangle BPC$.

Niech Q' będzie takim punktem na półprostej MQ , że $\sphericalangle BQ'C = \sphericalangle BAC$. Z podobieństwa trójkątów równoramiennych DAE i $BQ'C$ mamy $\sphericalangle ADE = \sphericalangle Q'CB$. Zatem skoro na czworokącie $BAQ'C$ można opisać okrąg, to

$$\begin{aligned} \sphericalangle BAQ' &= 180^\circ - \sphericalangle Q'CB = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle ADE = \\ &= 180^\circ - \sphericalangle DAX = \sphericalangle BAQ'. \end{aligned}$$

Wobec tego $Q = Q'$, co daje tezę.

*student, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Przykładowo, jednym z rozkładów specjalnych liczby 156 jest (2, 6, 13), liczby 175 jest (5, 5, 7), a liczby 1 jest (1, 1, 1).

Następujący lemat stanowi podstawę indukcyjnego dowodu faktu, że każda dodatnia liczba całkowita ma rozkład specjalny. Ten dowód można natychmiast przekształcić w algorytm wyznaczający rozkłady specjalne wszystkich liczb od 1 do n w czasie liniowym na podstawie tablicy ndp .

Lemat. Niech $l > 1$ będzie liczbą całkowitą, $p = ndp[l]$ oraz $k = l/p$. Niech (k_1, k_2, k_3) będzie rozkładem specjalnym k , dla którego $k_1 \leq k_2 \leq k_3$. Wówczas $(k_1 \cdot p, k_2, k_3)$ jest rozkładem specjalnym l .

Dowód. Na początek zauważmy, że liczby k_2 i k_3 są pierwsze lub nie większe niż \sqrt{k} , więc są pierwsze lub nie większe niż \sqrt{l} . Musimy wobec tego zająć się tylko liczbą $k_1 \cdot p$. Jeśli $k_1 = 1$, to oczywiście $k_1 \cdot p = ndp[l]$ jest liczbą pierwszą. Załóżmy więc, że $k_1 > 1$. Ponieważ k_1 jest dzielnikiem l , a p jest najmniejszym (różnym od 1) dzielnikiem l , więc $p \leq k_1$. Wobec tego

$$(k_1 p)^2 = k_1^2 p^2 \leq p k_1^3 \leq p k_1 k_2 k_3 = p k = l,$$

a więc $k_1 p \leq \sqrt{l}$, co kończy dowód. \square

Pozostaje nam jeszcze wykorzystać rozkłady specjalne do efektywnego obliczania NWD. Tym razem najpierw przedstawimy algorytm, a potem zastanowimy się nad jego poprawnością. Przyjmiemy, że rozkłady specjalne zapamiętaliśmy w tablicy *rozklad*.

Algorytm $nwd(k, l)$

```

 $(x_1, x_2, x_3) := rozklad[k];$ 
 $(y_1, y_2, y_3) := rozklad[l];$ 
 $g := 1;$ 
foreach  $i, j \in \{1, 2, 3\}$  do
  if  $\max(x_i, y_j) \leq \sqrt{n}$  then
     $d := nwd[x_i, y_j];$ 
  else if  $x_i = y_j$  then  $d := x_i;$ 
  else  $d := 1;$ 
   $g := g \cdot d;$ 
   $x_i := x_i/d; y_j := y_j/d;$ 
return  $g;$ 

```

Na początek zauważmy, że w każdym obrocie pętli d jest pewnym wspólnym dzielnikiem x_i oraz y_j . Co więcej, d jest największym wspólnym dzielnikiem x_i oraz y_j . Jeśli $x_i, y_j \leq \sqrt{n}$ lub $x_i = y_j$, nie mamy co do tego wątpliwości. Bez straty ogólności niech więc $x_i < y_j$ oraz $\sqrt{n} < y_j$. Wówczas y_j jest liczbą pierwszą, a więc $nwd(x_i, y_j)$ może być równe 1 lub y_j . Drugą możliwość natychmiast wyklucza nierówność $x_i < y_j$.

Pozostaje teraz wykazać, że $g = nwd(k, l)$. Zrobimy to przez wskazanie niezmienników pętli:

- $k = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot g$,
- $l = y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot g$,
- $nwd(x_i, y_j) = 1$ dla już przetworzonych par i, j .

Na ich podstawie wnioskujemy, że po ostatnim obrocie pętli g jest wspólnym dzielnikiem k i l , a liczby k/g i l/g są względnie pierwsze.

W ten sposób skonstruowaliśmy algorytm, który na q zapytań o NWD liczb z zakresu $1, \dots, n$ odpowiada w czasie $O(n + q)$. O ile tylko $q > \frac{n}{\log n}$, to ten algorytm jest najlepszy z tutaj przedstawionych. Okazuje się, że w pewien sposób można połączyć jego siły z algorytmem Euklidesa i otrzymać rozwiązanie, które nigdy nie jest asymptotycznie wolniejsze od żadnego z zaprezentowanych, a dla pewnych wartości q (np. $q = \frac{n}{\log n}$) jest niemal $\log n$ razy szybsze. Stworzenie tego działającego w czasie $O(q \cdot \max(1, \log \frac{n}{q}))$ algorytmu pozostawiamy Czytelnikowi jako zadanie.



Rozwiązanie zadania M 1374.

Zauważmy najpierw, że dla liczby całkowitej x zachodzi $3 \mid x^{2013} - x$. Stąd

$$L = 1^{2013} + 2^{2013} + \dots + (p-1)^{2013} \equiv 1 + 2 + \dots + (p-1) \pmod{3}.$$

Jeśli więc p jest postaci $3k+1$, to wówczas

$$L \equiv (1+2) + 3 + \dots + (3k-2 + 3k-1) + 3k \equiv 0 \pmod{3},$$

zaś $p^{2013} \equiv p \equiv 1 \pmod{3}$, więc równanie nie ma rozwiązania w tym przypadku. Podobnie stwierdzamy, że dla p postaci $3k+2$ równanie jest sprzeczne. Zatem jedyna możliwość to $p=3$, ale łatwo sprawdzić, że wtedy równanie również jest sprzeczne.

Uwaga. Paul Erdős około 1950 roku w liście do Leo Mosera postawił hipotezę, że równanie

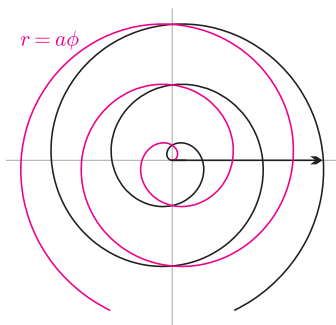
$$1^k + 2^k + \dots + (m-1)^k = m^k$$

nie ma rozwiązań w liczbach naturalnych m oraz $k \geq 2$. Dziś wiadomo, że jeśli równanie ma rozwiązanie dla jakiegoś $k \geq 2$, to $m > 10^{10^9}$ (zgrabny dowód i historia problemu są przedstawione w artykule: P. Moore, *A top hat for Moser's four mathematical rabbits*, Amer. Math. Monthly 118 (2011), 364–370).

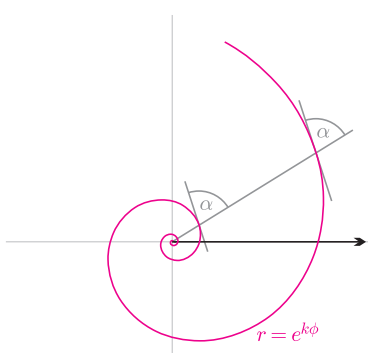
Zaczęło się od okręgu. Wykres funkcji sinus okazał się okręgiem. Jak to możliwe? Okazuje się, że czasem lekkie odstępianie od utartego punktu widzenia może nas daleko zaprowadzić. Wystarczy, na przykład, wybrać inny niż prostokątny układ współrzędnych do przedstawiania wykresów funkcji.

Nieznane wykresy znanych funkcji

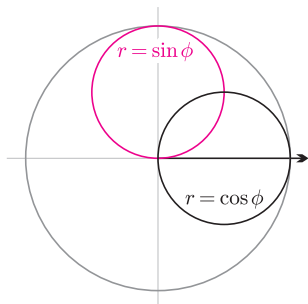
Piotr PIKUL*



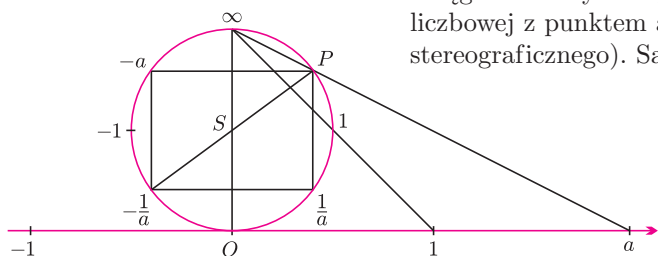
Rys. 1. Wykres funkcji liniowej we współrzędnych biegunowych, złożony z dwóch spiral Archimedesa.



Rys. 2. Spirala logarytmiczna.



Rys. 3. Wykresy funkcji sinus (kolorowy) i cosinus (czarny) w układzie biegunowym.



Rys. 4. Konstrukcja okręgu liczbowego.

Pierwszym układem współrzędnych, jaki nasuwa nam się zamiast układu prostokątnego, jest układ biegunowy. Dla przypomnienia, w tym układzie punkt o współrzędnych (ϕ, r) , $r \geq 0$ leży na półprostej tworzącej z ustaloną osią biegunową kąt skierowany o mierze ϕ , w odległości r od ustalonego bieguna. Dla ujemnych wartości r przyjmujemy, że punkt leży po przeciwnej stronie bieguna, czyli że $(\phi, r) = (\phi + \pi, -r)$.

Dopuszczenie miar kąta spoza przedziału $[0, 2\pi)$ oraz ujemnych wartości promienia powoduje, że układ biegunowy przestaje spełniać klasyczną definicję układu współrzędnych – przyporządkowanie współrzędnych punktowi przestaje być jednoznaczne. Z punktu widzenia zastosowania układu biegunowego do przedstawiania wykresów funkcji oznacza to, że z takiego wykresu nie da się odczytywać wartości funkcji.

Przyjrzyjmy się wykresom kilku elementarnych funkcji w układzie biegunowym. Na początek przyjmijmy, że zmienną niezależną jest kąt ϕ . Wykres funkcji liniowej $r = a\phi$ okazuje się spiralą Archimedesa (rys. 1). Wykresem funkcji wykładniczej $r = a^\phi$ jest zaś spirala logarytmiczna (rys. 2), przecinająca wszystkie półproste wychodzące z bieguna pod jednakowym kątem. Wykresy funkcji trygonometrycznych sinus ($r = \sin \phi$) i cosinus ($r = \cos \phi$) przybiorą kształt okręgów (rys. 3). Funkcje trygonometryczne, a także funkcje budowane na ich podstawie, dają zwykle ciekawe wykresy w układzie biegunowym. Na przykład $r = \frac{1}{\sin \phi}$ to prosta, a $r = \frac{1}{|\sin \phi| + |\cos \phi|}$ to brzeg kwadratu.

Zachęcam do własnych badań nad wykresami funkcji $r = f(\phi)$, a także funkcji $\phi = f(r)$ – zwykle otrzymujemy wtedy zupełnie inne rezultaty.

Abstrahując od konkretnych funkcji, możemy także zastanowić się nad ogólniejszymi własnościami. Na przykład wykres każdej funkcji nieparzystej ($f(-x) = -f(x)$) we współrzędnych biegunowych jest symetryczny względem prostej prostopadłej do osi biegunowej. Wykres funkcji parzystej ($f(-x) = f(x)$) jest z kolei symetryczny względem osi biegunowej. Fakty te można stosunkowo prosto wykazać, korzystając z zależności między współrzędnymi biegunowymi a prostokątnymi.

Z tematem niekonwencjonalnych wykresów funkcji wiąże się jeszcze (co najmniej) jeden ciekawy okrąg. Nazwałem go okręgiem liczbowym, gdyż każdemu jego punktowi odpowiada liczba rzeczywista. Konstrukcja okręgu liczbowego opiera się na rzucie stereograficznym. Okrąg o jednostkowej średnicy jest styczny do osi liczbowej w jej początku. Punkt P o współrzędnej a na okręgu liczbowym leży na odcinku łączącym punkt o współrzędnej a na osi liczbowej z punktem antypodycznym do punktu styczności (środkiem rzutu stereograficznego). Samemu środkowi rzutu przyporządkowujemy wartość ∞ .

Tak zdefiniowany okrąg liczbowy ma dość interesujące własności. Na wstępie warto zauważyć, że liczba przypisana danemu punktowi P na okręgu jest tak naprawdę równa $\tan \frac{1}{2} |\sphericalangle OSP|$ (patrz rys. 4). Korzystając ze wzorów redukcyjnych, można wykazać, że średnica okręgu liczbowego łączy ze sobą punkty odpowiadające liczbom, których iloczyn wynosi -1 . Ponadto każda

liczba dodatnia i jej odwrotność są równoodległe od 1, a liczba ujemna i jej odwrotność – równoodległe od -1 .

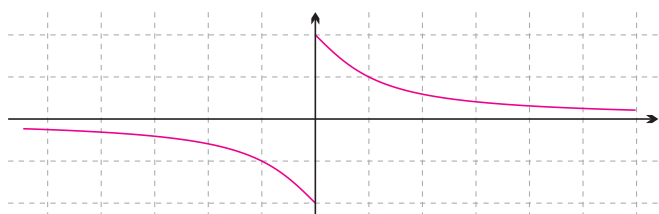
Jaki jest związek okręgu liczbowego z wykresami funkcji? Jak sama nazwa wskazuje, można go wykorzystać zamiast osi liczbowej i skonstruować całkiem ciekawy

*uczeń VIII LO im. Marii Skłodowskiej-Curie w Katowicach, laureat trzeciego miejsca na XXIX Ogólnopolskim Sejmiku Matematyków w Szczyrku

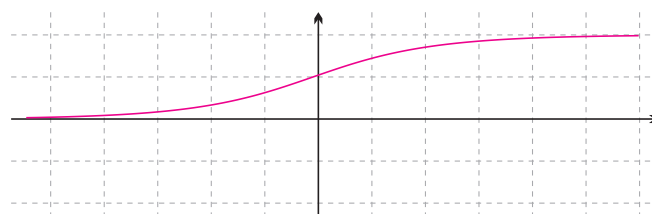
układ współrzędnych na nieograniczonej powierzchni walcowej. W takim układzie jedna oś współrzędnych jest klasyczną osią liczbową pokrywającą się z jedną z tworzących, a drugą oś stanowi okrąg liczbowy ułożony prostopadłe do tworzących. W takim układzie współrzędnych wykres funkcji *odwrotność*, czyli $1/x$, okazuje się spójną krzywą (jeśli przyjmujemy, że dla argumentu 0 funkcja *odwrotność* jest określona i przyjmuje wartość ∞).

Dla uproszczenia, możemy sobie wyobrazić (rys. 5), że rozcinamy powierzchnię walca wzdłuż prostej o rzędnej równej ∞ , otrzymując pas bez brzegu (przy okazji pozbywamy się kontrowersyjnej liczby ∞). W swojej pracy nazwałem przyporządkowanie parom liczb rzeczywistych punktów takiego pasa *Y-ograniczonym odwzorowaniem współrzędnych*. Formalnie, odwzorowanie Y-ograniczone przyporządkowuje parze liczb rzeczywistych (a, b) punkt płaszczyzny o współrzędnych prostokątnych $(a, \arctg b)$.

W odwzorowaniu Y-ograniczonym wykresy niektórych funkcji zyskują wartość estetyczną, której nie przejawiają przy przedstawianiu w układzie prostokątnym. Na przykład wykres funkcji tangens w takim odwzorowaniu składa się z prostych odcinków, które po nawinięciu wykresu na walec (i uzupełnieniu funkcji tangens o wartości nieskończone w punktach nieokreśloności) tworzą linię śrubową. Wynika to, oczywiście, z wykorzystania funkcji tangens do konstrukcji odwzorowania Y-ograniczonego.

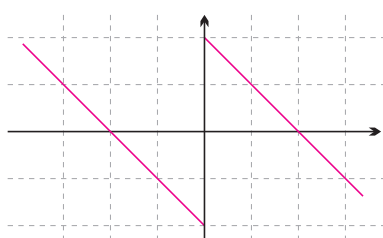


Rys. 5 Wykres funkcji *odwrotność*...



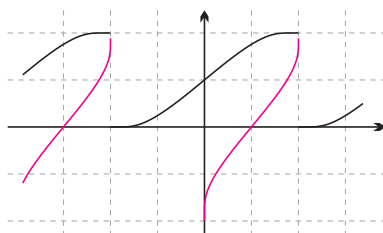
Rys. 6. ... i funkcji wykładniczej w odwzorowaniu Y-ograniczonym.

Najciekawszym (i jednocześnie prostym) przykładem wydaje mi się jednak funkcja wykładnicza. Jej wykres w odwzorowaniu Y-ograniczonym ma środek symetrii w punkcie $(0, 1)$ przecięcia z „osią” rzędnych (rys. 6). Wynika to z faktu, że $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, zatem jeśli punkt $A = (a, b)$ należy do wykresu, punkt $A' = (-a, \frac{1}{b})$ również do niego należy. Zgodnie z własnościami okręgu liczbowego wzajemnie odwrotne liczby dodatnie są równoodległe od 1, czyli punkty A i A' , które są równoodległe od punktu $(0, 1)$ w poziomie, będą od niego równoodległe także w pionie, czyli są środkowo symetryczne względem $(0, 1)$. Ponieważ każdy punkt wykresu należy do niego wraz ze swym obrazem w symetrii względem $(0, 1)$, więc cały wykres jest środkowo symetryczny.



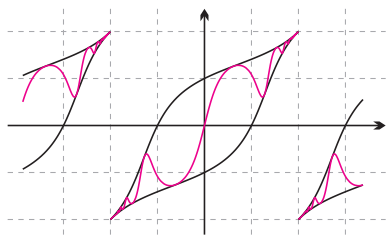
Rys. 7. Wykres funkcji *odwrotność* w odwzorowaniu XY-ograniczonym.

W ograniczaniu obszaru wykresu można posunąć się jeszcze dalej. Gdy obie osie prostokątnego układu współrzędnych zastąpimy rozciętymi okręgami liczbowymi – otrzymamy *odwzorowanie XY-ograniczone*. Przeciwzdziedzina XY-ograniczonego odwzorowania współrzędnych jest kwadrat o boku π (bez brzegu). Zgodnie z formalną definicją, w tym odwzorowaniu parze liczb (a, b) odpowiada punkt płaszczyzny o współrzędnych prostokątnych $(\arctg a, \arctg b)$. Odwzorowanie XY-ograniczone daje nam możliwość przedstawienia (na ograniczonej powierzchni) wykresu funkcji w całym zbiorze liczb rzeczywistych.

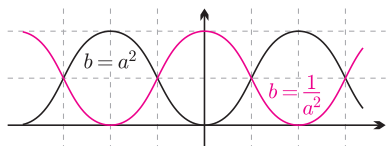


Rys. 8. Wykresy przykładowych funkcji wykładniczej (czarny) i logarytmicznej (kolorowy) w odwzorowaniu XY-ograniczonym.

Jako pierwszy przykład wykresu funkcji w odwzorowaniu XY-ograniczonym rozpatrzmy wykres funkcji *odwrotność* (rys. 7). Składa się on z dwóch prostych odcinków (bez końców). Odcinki te są równoległe do wykresu funkcji liniowej $f(x) = -x$ w tym odwzorowaniu, co wynika ze wspomnianej już własności okręgu liczbowego: liczby x i $-\frac{1}{x}$ leżą naprzeciwko siebie, a co za tym idzie, na „rozprostowanym” okręgu liczbowym odległość pomiędzy x a $-\frac{1}{x}$ jest stała – równa połowie długości okręgu. Na tej podstawie wykres funkcji $f(x) = \frac{1}{x}$ można otrzymać, przesuwając wykres funkcji $f(x) = -x$ (fragmentami, oczywiście).



Rys. 9. Wykres funkcji $f(x) = \sin(3x) + x$ ograniczony krzywymi $b = a + 1$ i $b = a - 1$; odwzorowanie XY-ograniczone zachowuje punkty przecięcia wykresów i pozwala porównywać wartości funkcji.



Rys. 10. Wykres $b = 1/a^2$ powstały przez odbicie wykresu $b = a^2$.

Podobnie jak w odwzorowaniu Y-ograniczone, tak w XY-ograniczone wykres funkcji wykładniczej ma środek symetrii (dowód jest dokładnie taki sam jak dla odwzorowania Y-ograniczonego). Różnica dotyczy wykresu funkcji logarytmicznej (o której dotąd nie pisałem), ponieważ w odwzorowaniu XY-ograniczone on także ma środek symetrii (w punkcie przecięcia z „osią” odciętych). Funkcje wzajemnie odwrotne w odwzorowaniu XY-ograniczone mają tę samą charakterystyczną cechę co w klasycznym układzie prostokątnym: są symetryczne względem prostej $x = y$.

Jeśli punkt wykresu funkcji f o współrzędnych XY-ograniczonej $(a, f(a))$ przechodzi na punkt $(f(a), a)$ wykresu funkcji f^{-1} , to w przeliczeniu na współrzędne prostokątne punkt $(\arctg a, \arctg f(a))$ przechodzi na $(\arctg f(a), \arctg a)$ – odbicie punktu wykresu funkcji f względem prostej $y = x$.

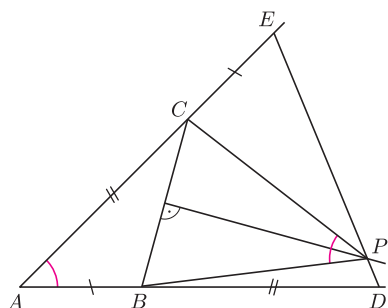
Warto zwrócić uwagę na jeszcze jeden szczegół związany z wykresami w odwzorowaniach ograniczonych. Wykres funkcji $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ powstaje przez odbicie symetryczne fragmentu wykresu funkcji f obejmującego wartości dodatnie oraz fragmentu obejmującego wartości ujemne względem prostych, odpowiednio, $b = 1$ i $b = -1$ (rys. 10). Wynika to, oczywiście, z wielokrotnie tu wspomnianych własności okręgu liczbowego.

Moja podróż po świecie niekonwencjonalnych układów współrzędnych prowadziła mnie przez świat niespotykany w szkolnych podręcznikach matematyki. Spirale i zamknięte krzywe będące wykresami funkcji w układzie biegunowym oraz mieszczące się na ograniczonej powierzchni wykresy w odwzorowaniu XY-ograniczone nie wyczerpują tematu „nieznanych wykresów funkcji”. Zachęcam Czytelnika do zgłębiania tematu niezwykłych wykresów we własnym zakresie. Można analizować różne funkcje, wybrać inne układy współrzędnych, przedstawiać wykresy w przestrzeniach innych niż płaszczyzna euklidesowa. . . Temat wydaje się niewyczerpany.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



M 1372. Dany jest trójkąt ABC i takie punkty D i E , że B leży na odcinku AD , C leży na odcinku AE oraz zachodzą równości $BD = AC$ i $CE = AB$ (rysunek). Symetralna odcinka BC przecina DE w punkcie P . Udowodnić, że kąty BAC i BPC są równe.

Rozwiązanie na str. 14

M 1373. Na wyspie jest 2012 czerwonych, 2013 zielonych i 2014 niebieskich kameleonów. Jeśli spotkają się dwa kameleony różnych kolorów, każdy z nich zmienia swój kolor na trzeci kolor. Czy może dojść do sytuacji, w której na wyspie wszystkie kameleony będą miały ten sam kolor?

Rozwiązanie na str. 2

M 1374. Wykazać, że nie istnieje liczba pierwsza p , dla której

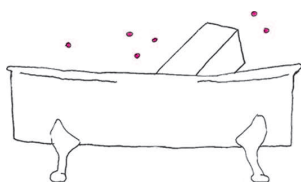
$$1^{2013} + 2^{2013} + \dots + (p-1)^{2013} = p^{2013}.$$

Rozwiązanie na str. 15

Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 823. Do prostopadłościenną wannę nalano dużo wody, po czym umieszczono w wannie jednorodny, wykonany z materiału o gęstości ρ , prostopadłościenny klocek o wymiarach $b \times b \times L$, przy czym $b \ll L$. Zrobiono to tak zmyślnie, że najmniejsze ściany klocka mogą ślizgać się bez tarcia po pionowych ścianach wanny, krawędzie o długości b są pionowe lub poziome, a siła grawitacji działająca na klocek równoważy siłę wyporu. Czy klocek jest w położeniu równowagi trwałej?

Rozwiązanie na str. 3



F 824. Góra lodowa ma kształt stożka o pionowej osi. Wierzchołek znajduje się pod powierzchnią wody. Jaka część wysokości góry lodowej znajduje się nad wodą? Rozwiązanie na str. 13

Piękna kwantowa strzałka czasu

„Łatwiej kijek pocienkować, niż go pogrubasić” jest opinią ugruntowaną naszym codziennym doświadczeniem. Przebieg większości zdarzeń jest nieodwracalny. Rzeczy niszczą się same z siebie, bałagan sam się robi, jesteśmy coraz starsi. . .

Sprzeczność między degradacją materii a jej ciągłym odnawianiem się zaowocowała atomizmem (Leucyp z Miletu, Demokryt z Abdery). Żeby materia nie zużyła się na bezpostaciowy pył, istnieć muszą jej niepodzielne – *a tomos* – cząstki.

Choć to, co współcześnie nazywamy atomami, niepodzielne nie jest, to się nie starzeje – atomy same z siebie nie ulegają rozkładowi. W świecie kwantów zjawiska wyglądają na całkowicie odwracalne.

Od dawna spodziewano się jednak, że nie do końca. Wszystko przez oddziaływania słabe. Kiedy okazało się, że łamią one nie tylko parzystość P (odróżniają lewo- i prawoskrętność), ale również parzystość kombinowaną CP (złożenie operacji zmiany parzystości z zamianą cząstki na jej antycząstkę), naturalne stało się oczekiwanie, że naruszają również parzystość T, czyli wyróżniają kierunek upływu czasu. Bo tylko jeżeli naruszenie T równoważy naruszenie CP, możliwe jest zachowanie kombinacji CPT. A niezmienniczość złożenia CPT wynika z samej struktury czasoprzestrzeni (z faktu, że oddziaływania opisujemy za pomocą lorentzowsko niezmienniczej lokalnej symetrii cechowania). Jej złamanie byłoby naruszeniem najbardziej podstawowej tkanki naszego rozumienia rzeczywistości. To, oczywiście, byłoby bardzo ciekawe, bo nieoczekiwane.

Bezpośrednie udowodnienie naruszenia symetrii T jest jednak bardzo trudne. Kilka lat temu wykazano, co prawda, zachodzenie takiego naruszenia w systemie neutralnych mezonów K (cząstek będących parą kwark-antykwar d i s), ale wynik ten został uznany za niejednoznaczny, ponieważ nie udało się całkowicie odseparować symetrii T od symetrii CP.

Skoro sektor neutralnych mezonów dziwnych okazał się niewystarczający, nadzieja pozostała w sektorze neutralnych mezonów pięknych (zawierających kwark lub antykwark b), w którym również udało się wykazać łamanie CP. Niezbędny był tylko dobry pomysł, jak to zrobić [1]. Idea polega na wykorzystaniu danych dotyczących rozpadu stanu związanego kwarku i antykwarku b o nazwie Υ_{4S} . Jest to najlżejszy stan, który rozpada się na dwa mezony piękne, albo naładowane, albo neutralne. Nam chodzi o te neutralne, będące parą kwark-antykwar b i d . Para takich pięknych mezonów jest produkowana

w antysymetrycznym stanie spletanym. Nie wiadomo, w którą stronę jaki leci (w układzie środka masy Υ_{4S}). Są one jednak nietrwale. W momencie, gdy jeden się rozpada, wiadomo, że drugi jest – dokładnie w tym momencie – jego kwantowym dopełnieniem. Różne rozpady ujawniają różne cechy rozpadającego się mezonu. Rozpad półleptonowy ujawnia, czy mezon jest cząstką $B^0 \rightarrow \ell^+ X$, czy antycząstką $\bar{B}^0 \rightarrow \ell^- X$. Natomiast rozpad na czarmonium (stan związany kwarku i antykwarku c) o historycznej nazwie J/ψ oraz neutralny mezon dziwny K^0 wybiera jeden z dwóch ortogonalnych stanów $B_+ \rightarrow J/\psi K_S^0$ albo $B_- \rightarrow J/\psi K_L^0$ w zależności, czy powstający w wyniku rozpadu mezon dziwny jest krótkożyciowy (K_S^0) czy długożyciowy (K_L^0), bo są one jego stanami ortogonalnymi (jak widać, tak całkiem bez neutralnych mezonów dziwnych nie można się obejść).

Jeżeli ograniczymy się do wyżej wymienionych rozpadów i to tylko do sytuacji, w której jeden mezon rozpada się półleptonowo, a drugi na parę $J/\psi K^0$, to mamy cztery pary T-sprzężonych stanów końcowych.

W pracy [2] eksperymentu BABAR zrobiono jeszcze więcej, bo wzięto pod uwagę nie tylko stany T-sprzężone, ale również CP- oraz CPT-sprzężone oraz znacznie rozszerzono liczbę identyfikujących stanów końcowych. Wykazano bezpośrednie naruszenie symetrii T na bardzo dużym (jak na pierwszy pomiar) poziomie ufności odpowiadającym 14σ . Potwierdzono naruszenie symetrii CP na podobnym poziomie ufności oraz brak naruszenia symetrii CPT.

Jak widać, są piękniejsze od bałaganu sposoby wskazania strzałki czasu.

Piękno ogranicza Zuzię

Nie można pominąć informacji, że zespołowi eksperymentu LHCb udało się zaobserwować jeden z najbardziej poszukiwanych rozpadów $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$, który, zgodnie z Modelem Standardowym, zdarza się z częstością 3,5 ppb.

Obserwacja jest zgodna z tym przewidywaniem, co znacznie ogranicza swobodę modeli wykraczających poza Model Standardowy, np. popularnych scenariuszy SUSY, takich jak CMSSM. Jest to, między innymi, silne ograniczenie na minimalną masę supersymetrycznego partnera kwarku top.

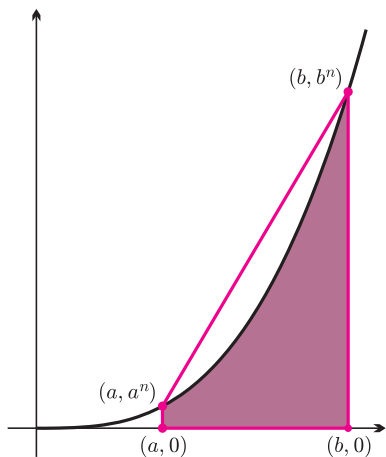
Piotr ZALEWSKI

- [1] J. Bernabéu, F. Martínez-Vidal i P. Villanueva-Pérez, *Time reversal violation from the entangled $B^0 \bar{B}^0$ system*, arXiv:1203.0171v1.
- [2] BABAR Collaboration, *Observation of time reversal violation in the B^0 meson system*, arXiv:1207.5832v3.
- [3] LHCb Collaboration, *First evidence of the decay $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$* , CERN-PH-EP-2012-335.

W Delcie nr 9 z 2012 r. pojawiło się zadanie: Udowodnić, że dla różnych liczb dodatnich a, b i liczby całkowitej $n > 1$ zachodzi nierówność

$$\frac{1}{n+1} \cdot \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b-a} < \frac{a^n + b^n}{2}.$$

Jest też tam dowód nierówności. Chciałbym dodać uzasadnienie geometryczne, czy też wyjaśnić jej znaczenie geometryczne.



Rys. 1

Przepiszmy nierówność w postaci

$$\frac{1}{n+1} \cdot (b^{n+1} - a^{n+1}) < \frac{1}{2} \cdot (b-a)(a^n + b^n).$$

Bez straty ogólności rozważań można przyjąć, że $a < b$. Otóż prawa strona to pole trapezu o podstawach a^n, b^n i wysokości $b-a$. Lewa to (zacienione) pole pod wykresem funkcji x^n ograniczonej do przedziału $[a, b]$. Ponieważ funkcja x^n jest ściśle wypukła na półprostej $[0, \infty)$, więc jej wykres znajduje się pod dowolną cięciwą. Oznacza to, że obszar pod wykresem jest zawarty w trapezie o wierzchołkach $(a, 0), (b, 0), (b, b^n)$ i (a, a^n) . No i czego tu dowodzić?

Po rozwiązaniu podanym w miesięczniku jest uwaga o nierówności

$$\frac{a+b}{2} < \sqrt[n]{\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{(n+1)(b-a)}}$$

równoważnej

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} > (b-a) \left(\frac{a+b}{2}\right)^n.$$

Niech $c = \frac{a+b}{2}$. Tym razem pole pod wykresem funkcji x^n ma okazać się większe od pola prostokąta o podstawie $b-a$ i wysokości $\left(\frac{a+b}{2}\right)^n = c^n$. Wynika to z tego, że jeśli $0 < h < c$, to

$$(W) \quad c^n - (c-h)^n < (c+h)^n - c^n,$$

co jest równoważne nierówności

$$c^n < \frac{1}{2}((c+h)^n + (c-h)^n),$$

więc wynikającej natychmiast ze ściślej wypukłości funkcji x^n . Z nierówności (W) wynika od razu, że symetria względem punktu (c, c^n) przekształca obszar szary na zbiór zawarty, ale niewypełniający obszaru kolorowego, więc nierówność jest prawdziwa.

Wypukłość funkcji x^n na półprostej $[0, \infty)$ można wywnioskować z tego, że jej pochodna, czyli nx^{n-1} , jest ściśle rosnąca na $[0, \infty)$ lub – jeśli ktoś nie lubi pochodnych – z ciągłości funkcji x^n i nierówności

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

prawdziwej dla różnych liczb dodatnich x, y . Można jej dowieść indukcyjnie. Krok indukcyjny polega na pomnożeniu obu stron nierówności

$$\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n$$

przez liczbę dodatnią

$$\frac{x^{n+1} + y^{n+1}}{x^n + y^n}$$

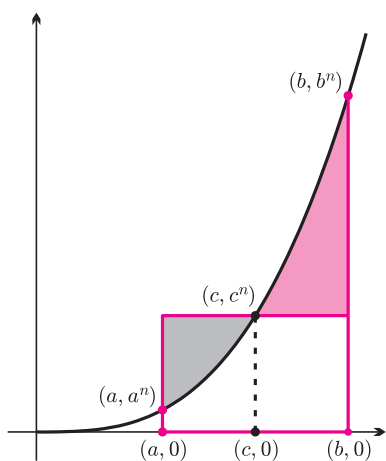
i stwierdzeniu, że

$$(x^{n+1} + y^{n+1}) \left(\frac{x+y}{2}\right)^n > (x^n + y^n) \left(\frac{x+y}{2}\right)^{n+1},$$

czyli

$$2(x^{n+1} + y^{n+1}) > (x^n + y^n)(x+y).$$

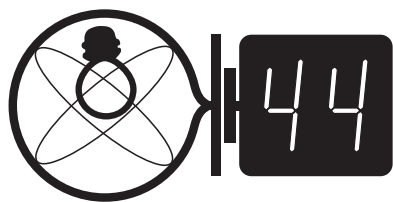
Ostatnia nierówność jest równoważna takiej $(x^n - y^n)(x-y) > 0$ prawdziwej w oczywisty sposób.



Rys. 2

*Instytut Matematyki,
Uniwersytet Warszawski

Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2013

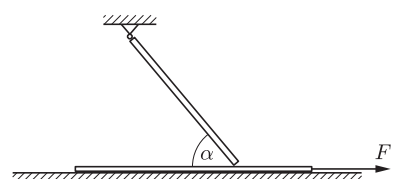
Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

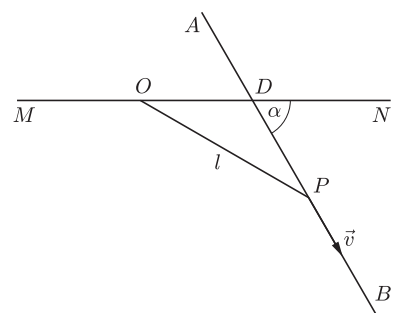
Zadania z fizyki nr 550, 551

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



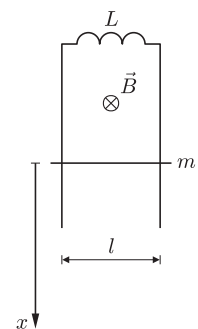
Rys. 1

550. Cienki arkusz papieru przyciśnięty jest do stołu jednorodnym prętem o masie m . Górny koniec pręta jest zamocowany przegubowo. Kąt między prętem i kartką wynosi α (rys. 1), współczynnik tarcia między nimi wynosi μ . Między kartką a stołem tarcia nie ma. Jaką minimalną, poziomą siłę trzeba przyłożyć do kartki, aby wyciągnąć ją spod pręta?



Rys. 3

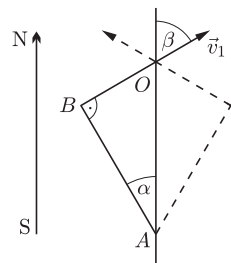
551. Cewkę o indukcyjności L dołączono do górnych końców dwóch równoległych szyn przewodzących ustawionych pionowo. Odstęp między szynami jest równy l . Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B ma kierunek poziomy i jest prostopadłe do płaszczyzny szyn. Poziomy, przewodzący pręt o masie m może poruszać się w polu magnetycznym wzdłuż szyn w ten sposób, że stale się z nimi styka. Opór i samoindukcję przewodników oraz tarcie pręta o szyny zaniedbujemy. Znaleźć zależność położenia pręta od czasu $x(t)$ (rys. 2). Prędkość początkowa pręta jest równa zeru.



Rys. 2

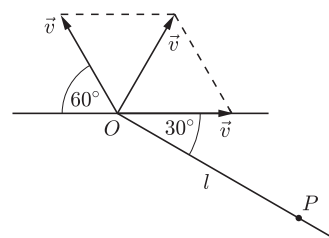
Rozwiązania zadań z numeru 9/2012

Przypominamy treść zadań:



Rys. 4

542. Statek i kuter płyną po liniach prostych z prędkościami odpowiednio $v_1 = 15$ mil/h i $v_2 = 26$ mil/h. W chwili początkowej kuter znajduje się w odległości 6 mil na południe od rufy statku. W chwili końcowej kuter przecina tor statku 3 mile za nim i znajduje się wtedy najbliżej statku. Ile czasu upływa między tymi chwilami? Wyznacz kurs statku (kąt między kierunkiem południe-północ a wektorem prędkości statku).



Rys. 5

543. Pies P biegnie ze stałą prędkością v po prostej AB , która tworzy kąt $\alpha = \pi/3$ z poziomo rozciągniętym drutem MN (rys. 3). Do obroży psa przymocowana jest lekka pozioma linka o długości l . Linka połączona jest z pierścieniem O o masie m , który może ślizgać się po drucie bez tarcia. Znaleźć naprężenie linki w chwili, gdy pies i pierścień znajdują się w jednakowych odległościach od punktu przecięcia D prostej AB i drutu.

542. W układzie odniesienia O związanym ze statkiem kuter porusza się ze stałą prędkością $\vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ i w szukanym czasie przebywa drogę równą długości odcinka AB (rys. 4). Największe zbliżenie ma miejsce, gdy tory kutra i statku przecinają się, zatem tory te są do siebie prostopadłe. Odcinek OA jest dwa razy dłuższy od OB , więc $\sin \alpha = 1/2$, $\alpha = \pi/6$. Kąt β , wyznaczający kurs statku, wynosi $\pi/3$ lub $5\pi/3$. Drugiej możliwości odpowiada rysunek wykonany linią przerywaną. Szukany czas wynosi

$$t = \frac{|AB|}{v} = \frac{|AO| \cos \alpha}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} \approx 14 \text{ min.}$$

543. Ponieważ linka jest nierozciągliwa, składowe prędkości pierścienia i psa wzdłuż linki są jednakowe i w rozważanej chwili prędkości pierścienia i psa mają równe wartości v . W inercjalnym układzie odniesienia związanym z psem pierścień porusza się po okręgu o promieniu l z prędkością chwilową v (rys. 5). W płaszczyźnie poziomej na pierścień działa siła naciągu linki N i siła reakcji drutu F (rys. 6). Wypadkowa siła działająca na pierścień wzdłuż linki jest siłą dośrodkową:

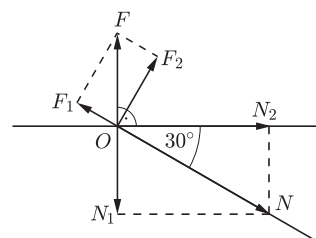
$$N - F_1 = \frac{mv^2}{l}, \quad F_1 = F \sin \frac{\pi}{6} = \frac{F}{2}.$$

Prostopadła do drutu składowa N_1 siły naciągu linki równoważy siłę reakcji F :

$$N_1 = \frac{N}{2} = F, \quad \text{stad} \quad F_1 = \frac{N}{4}.$$

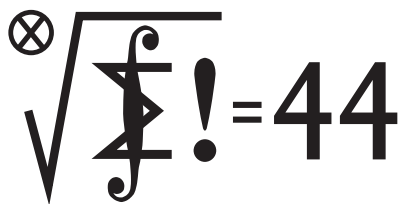
Ostatecznie szukana siła naciągu linki wynosi

$$N = \frac{4mv^2}{3l}.$$



Rys. 6

Klub 44

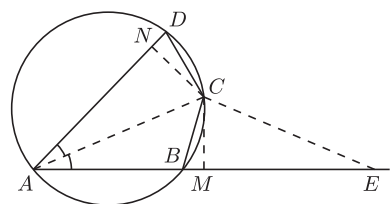


Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
641 ($WT = 1,47$) i 642 ($WT = 2,50$)
z numeru 5/2012

Michał Miodek	Zawiercie	46,19
Roksana Słowik	Knurów	43,65
Tomasz Wietecha	Tarnów	41,44
Zbigniew Skalik	Wrocław	41,25
Jędrzej Garnek	Poznań	40,37
Adam Dzedzej	Gdańsk	40,33
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Paweł Łabędzki	Kielce	35,77
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Michał Miodek – to już numer 115
w matematycznym Klubie 44.



Zadania z matematyki nr 653, 654

Redaguje Marcin E. KUCZMA

653. W egzaminie testowym pytania są ponumerowane $1, 2, \dots, n$. Za prawidłową odpowiedź na k -te pytanie uczestnik otrzymuje k punktów; za błędną (lub brak odpowiedzi) otrzymuje $-k$ punktów. Po zliczeniu wyników okazało się, że w każdej trójce uczestników znajdują się dwaj tacy, którzy uzyskali różne sumy punktów. Jaka jest największa liczba uczestników, dla której taka sytuacja mogła mieć miejsce?

654. Ciąg (x_n) jest określony wzorem rekurencyjnym

$$x_{n+1} = \frac{x_n^2}{e^{x_n} - 1} \quad \text{dla } n = 0, 1, 2, \dots;$$

wyraz początkowy x_0 jest dowolną liczbą dodatnią. Obliczyć granicę $\lim_{n \rightarrow \infty} n x_n$.

Zadanie 654 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa. Będzie ono miało dalszy ciąg w numerze 5/2013.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2012

Przypominamy treść zadań:

645. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg. Boki BC i CD mają jednakową długość. Na przedłużeniu odcinka AB odkładamy odcinek BE długości $|BE| = |AD|$. Dowieść, że $|AC| = |CE|$.

646. Niech f będzie funkcją o wartościach rzeczywistych, określoną na zbiorze liczb dodatnich, dwukrotnie różniczkowalną, spełniającą warunek $f''(x) > \frac{1}{1+x^2}$ dla $x > 0$. Czy taka funkcja może mieć asymptotę przy $x \rightarrow \infty$?

645. Niech punkty M i N będą rzutami prostokątnymi punktu C odpowiednio na proste AB i AD . Punkt C (środek łuku BD) leży na dwusiecznej kąta BAD . Zatem $|AM| = |AN|$, $|CM| = |CN|$, trójkąty CMB i CND są przystające, $|BM| = |DN|$. Są możliwe dwie konfiguracje: albo (jak na rysunku) punkt N leży między punktami A i D , a B między A i M – albo odwrotnie (M między A, B , zaś D między A, N).

W sytuacji, jak na rysunku, mamy równości

$$2 \cdot |AM| = |AM| + |AN| = |AB| + |BM| + |AD| - |DN| = |AB| + |AD| = |AE|,$$

więc punkt M jest środkiem odcinka AE (rozumowanie w drugim przypadku, po oczywistej zmianie w znakach, prowadzi do tej samej konkluzji). Wniosek: prosta CM jest symetralną odcinka AE i wobec tego $|AC| = |CE|$.

646. Dla $x \geq 1$ zachodzi nierówność

$$f''(x) > \frac{1}{1+x^2} \geq \frac{1}{2x^2}.$$

Weźmy pod uwagę funkcję

$$g(x) = f(x) + \frac{1}{2} \ln x.$$

Dla $x \geq 1$ mamy

$$g''(x) = f''(x) - \frac{1}{2x^2} > 0,$$

więc funkcja g jest ściśle wypukła w przedziale $\langle 1; \infty \rangle$. Stąd wynika, że dla każdej liczby $x \geq 1$ jest spełniona nierówność $g(x) + g(3x) > 2g(2x)$.

Po podstawieniu wyrażenia definiującego funkcję g i prostym przekształceniu dostajemy:

$$\begin{aligned} f(x) + f(3x) - 2f(2x) &> \\ &> \ln(2x) - \frac{1}{2} \ln x - \frac{1}{2} \ln(3x) \quad \text{dla } x \geq 1. \end{aligned}$$

Prawa strona ma wartość stałą

$$c = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 3 > 0.$$

Przypuśćmy, że prosta $y = ax + b$ jest asymptotą funkcji f przy $x \rightarrow \infty$. To znaczy, że

$$f(x) = ax + b + \varphi(x), \quad \text{gdzie } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

Uzyskana przed chwilą zależność

$$f(x) + f(3x) - 2f(2x) > c$$

przybiera postać

$$\begin{aligned} [(ax + b) + (3ax + b) - 2(2ax + b)] + \\ + [\varphi(x) + \varphi(3x) - 2\varphi(2x)] > c \quad \text{dla } x \geq 1. \end{aligned}$$

To już jest oczekiwana sprzeczność, bo wyrażenie w pierwszym nawiasie kwadratowym ma stałą wartość 0, a to w drugim dąży do 0 gdy $x \rightarrow \infty$. Wniosek: Funkcja f , spełniająca podane warunki, nie ma asymptoty przy $x \rightarrow \infty$.

Uwaga. Występująca w treści zadania funkcja $1/(1+x^2)$ złośliwie kieruje od razu myśl rozwiązującego na funkcję $\arctg x$ (której jest pochodną). Idąc tym tropem również można dojść do rozwiązania, jednak bardziej uciążliwego niż to, które zostało podane wyżej – i z którego widać, że istotą założenia jest oszacowanie $f''(x)$ z dołu przez funkcję $1/(2x^2)$, a nie przez $1/(1+x^2)$.

Prosto z nieba: Cukier w Kosmosie

Kilkanaście lat temu tematem elektryzującym opinię publiczną były radiowe obserwacje ogromnej chmury międzygwiazdowego gazu, oznaczonej symbolem G34.3+0.15 (w gwiazdozbiornie Orła). W oddalony o około 10 tys. lat świetlnych od Ziemi chmurze wykryto wiele różnorodnych cząsteczek materii organicznej, wśród których jedna szczególnie łatwo przyciągnęła uwagę „zwykłego czytelnika”: połączenie grupy etylowej i wodorotlenowej zwane alkoholem etylowym. (Szacowana ilość czystego alkoholu etylowego w G34.3+0.15 to 10 bln litrów.) Jak się zatem okazuje, badanie materii organicznej może stanowić ciekawy przyczynek poszerzający naszą wiedzę o Wszechświecie.

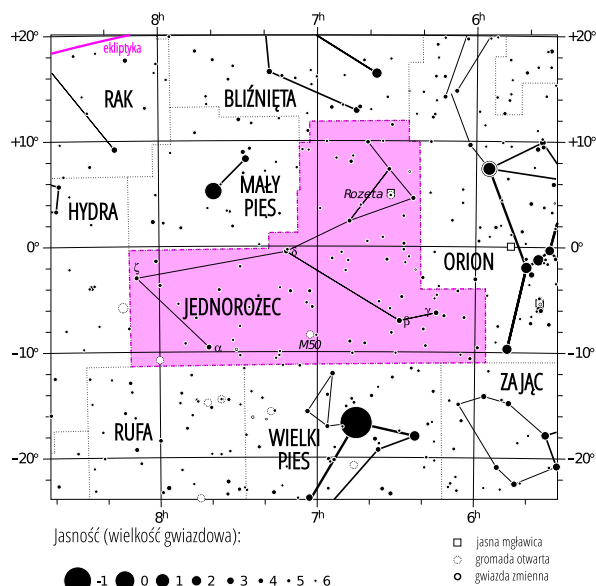
Niedawne obserwacje teleskopu ALMA (ang. *Atacama Large Millimeter/submillimeter Array*), który został zaprojektowany do detekcji fal radiowych o długości około milimetra, przynoszą równie interesujące dane o gwiazdzie typu słonecznego IRAS 16293-2422, znajdującej się w układzie podwójnym w odległości około 400 lat świetlnych od Ziemi. W gazie otaczającym tę młodą gwiazdę zespół ALMA odnalazł linie emisyjne produkowane przez cząsteczki aldehydu glikolowego

($C_2H_4O_2$). Jest to jeden z najprostszych cukrów (nie bardzo różny od tego używanego do słodzenia herbaty) i podstawowy element chemii życia opartego na węglu, potrzebny w procesie formowania się kwasu rybonukleinowego (RNA). Aldehyd glikolowy był już obserwowany w przestrzeni kosmicznej wcześniej, w obłokach Sgr B2 i G31.41+0.31, ale w tym przypadku cząsteczki cukru znajdują się stosunkowo blisko gwiazdy (w odległości mniej więcej orbity Urana), a nawet – co udało się zmierzyć – spadają w kierunku gwiazdy; według teorii formowania się planet to tam powinny się znajdować skaliste globy typu ziemskiego.

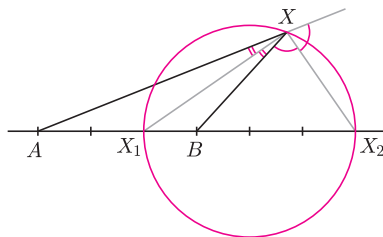
Odkrycie cząsteczek materii organicznej w pobliżu młodych gwiazd oznacza, że podstawowe elementy budulca organizmów węglowych mogą być łatwo tworzone w przestrzeni międzygwiazdowej. Nie wiadomo natomiast, na ile złożone cząsteczki mogą w ten sposób powstawać. Opadanie „gotowych” cząsteczek na młode planety (np. w kometach bądź meteoroidach) powinno wszelako sprzyjać powstawaniu tam życia.

Michał BEJGER

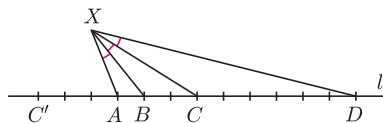
Niebo jak własna kieszeń: Styczeń



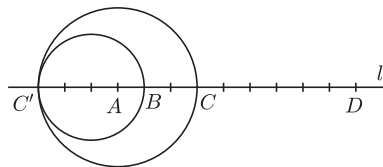
Przyda się *twierdzenie o dwusiecznej*: w trójkącie ABX , punkt Y na prostej AB jest spodkiem dwusiecznej kąta przy wierzchołku X wtedy i tylko wtedy, gdy $XA/XB = YA/YB$.



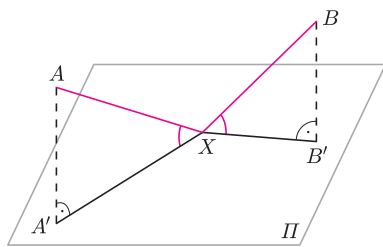
Rys. 1. Okrąg Apoloniusza dla $k = 2$.



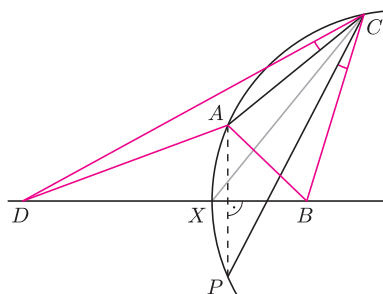
Rys. 2a



Rys. 2b



Rys. 3



Rys. 4

Zadanie 4 pochodzi z XXXVI Olimpiady Matematycznej, zadanie 5 z XXIII OM, a zadanie 6 z LVII OM.

Gdzie na płaszczyźnie znajdują się punkty, których stosunek odległości do dwóch ustalonych punktów A i B równy jest danej dodatniej stałej k ? Okazuje się, że punkty te tworzą okrąg, zwany *okręgiem Apoloniusza* (rys. 1; dla $k = 1$ okrąg zdegenerowany jest do prostej – symetralnej odcinka AB).

Ponadto dla dowolnego punktu X z okręgu Apoloniusza i spoza prostej AB spodki dwusiecznych kątów przy wierzchołku X trójkąta ABX leżą na tym okręgu.

Zachęcam do udowodnienia powyższych faktów i zastosowania ich w zadaniach.

1. Punkty A, B, C, D leżą, w tej właśnie kolejności, na prostej l , przy czym $AB = 1, BC = 2, CD = 6$. Rozstrzygnij, czy istnieje taki punkt X spoza prostej l , aby $\sphericalangle AXB = \sphericalangle BXC = \sphericalangle CXD$.
2. Dane są dwa okręgi rozłączne zewnątrznie. Wyznacz zbiór punktów, z których okręgi te widać pod tym samym kątem.
3. W przestrzeni dane są różne punkty A, B, C_0, C_1, C_2 , przy czym $C_iA = 2C_iB$ dla $i = 0, 1, 2$ oraz $C_1C_2 = \frac{4}{3}AB$. Udowodnij, że kąt $C_1C_0C_2$ jest prosty i że punkty A, B, C_1, C_2 leżą na jednej płaszczyźnie.
4. Punkty A i B nie należą do płaszczyzny Π . Wyznacz zbiór wszystkich punktów $X \in \Pi$ o tej własności, że proste AX i BX tworzą z płaszczyzną Π równe kąty.
5. W czworokącie $ABCD$ miara kąta wewnętrznego przy wierzchołku A jest większa od 180° oraz zachodzi równość $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Punkt P jest symetryczny do punktu A względem prostej BD . Udowodnij, że $\sphericalangle PCB = \sphericalangle ACD$.
6. Dany jest prostokąt $ABCD$, w którym $AB > BC$. Na boku CD tego prostokąta skonstruuj takie punkty X i Y , aby $AX = XY = YB$.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Jeśli taki punkt X istnieje, to XB jest dwusieczną kąta AXC (rys. 2a), zatem z twierdzenia o dwusiecznej $XA/XC = BA/BC = 1/2$. Punkty X i B leżą więc na okręgu Apoloniusza dla punktów A, C i stałej $1/2$. Analogicznie punkty X i C leżą na okręgu Apoloniusza dla punktów B, D i stałej $1/3$.

Niech punkt C' na prostej l , różny od C , spełnia warunek $C'A = AC$. Wtedy

$$\frac{C'A}{C'C} = \frac{AC}{2AC} = \frac{1}{2} \quad \text{oraz} \quad \frac{C'B}{C'D} = \frac{AC + AB}{AC + AB + BC + CD} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3},$$

zatem punkt C' należy do obydwu powyższych okręgów. Średnicą pierwszego z nich jest więc BC' , a drugiego – CC' (rys. 2b). Stąd jedynym ich wspólnym punktem jest C' , czyli $X = C'$. Ale wtedy X leży na prostej l – sprzeczność. \square

R3. Ponieważ $C_iA/C_iB = 2$ dla $i = 0, 1, 2$, więc wszystkie punkty C_i leżą na sferze Apoloniusza dla punktów A, B i stałej 2 (zdefiniowanej analogicznie do okręgu). Jej średnicę wyznaczają punkty X_1, X_2 na prostej AB , spełniające warunek $X_iA/X_iB = 2$ dla $i = 1, 2$. Wówczas $X_1X_2 = \frac{1}{3}AB + AB = \frac{4}{3}AB$ (rys. 1).

Wobec tego C_1C_2 także jest średnicą rozważanej sfery. Stąd kąt $C_1C_0C_2$ jest prosty, jako wpisany oparty na średnicy. Proste AB i C_1C_2 przecinają się (w środku sfery), więc punkty A, B, C_1, C_2 leżą na jednej płaszczyźnie. \square

R4. Niech A', B' oznaczać odpowiednio rzuty punktów A, B na płaszczyznę Π (rys. 3). Dla punktu $X \in \Pi$, różnego od A' i B' , równość $\sphericalangle AXA' = \sphericalangle BXB'$ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy trójkąty prostokątne AXA' i BXB' są podobne. Równoważnie, $XA'/XB' = AA'/BB'$. Jeśli $A' \neq B'$, to punkty X o żądanej własności tworzą okrąg Apoloniusza dla punktów A', B' i stałej AA'/BB' . Jakie jest rozwiązanie, gdy $A' = B'$? Czy możliwe, by $X = A'$? \square

R5. Punkty A i C leżą na okręgu Apoloniusza dla punktów B, D i stałej $AB/AD = CB/CD$. Z symetrii względem prostej BD punkt P też na nim leży (rys. 4).

Łuki $\overset{\frown}{PX}$ i $\overset{\frown}{AX}$ są równe, więc CX jest dwusieczną kąta PCA . Jednocześnie CX jest też dwusieczną kąta BCD (własność z początku artykułu, rys. 1), stąd

$$\sphericalangle PCB = \sphericalangle XCB - \sphericalangle XCP = \sphericalangle XCD - \sphericalangle XCA = \sphericalangle ACD. \quad \square$$

Wskazówka 6. Warto rozważyć okrąg Apoloniusza dla punktu A , środka boku CD i stałej 2.