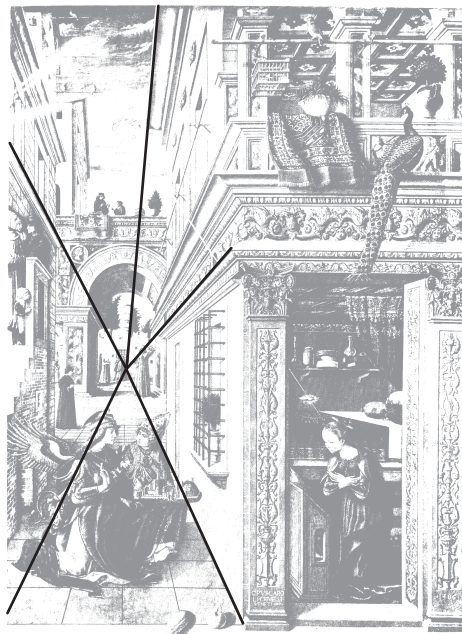


W następnym numerze polecamy



dziewięć
obrazków
płaszczyzny
rzutowej

SPIS TREŚCI NUMERU 4 (467)


Matematyka stosowana
i mechanika
Mirosław Lachowicz str. 1


Najładniejsza choinka
Przemysław Kiciak str. 2

Matching markets
Noblem nagrodzone
Michał Krawczyk str. 6

 Zadania str. 8

Złośliwy problem (MAX , +)
i kubelkowe struktury danych
Wojciech Śmietanka str. 9

 Lekcja rysunku (5)
Zdzisław Pogoda str.12


 Nauka pieczenia
Krzysztof Turzyński str.13


Hipoteza Kakeyi
Marcin Kotowski,
Michał Kotowski str.14

Parzyste, nieparzyste
Jakub Radoszewski str.17

Informatyczny kącik olimpijski
(61): Czworokąty wypukłe
Tomasz Idziaszek str.18

Aktualności str.19


 Największy współczesny
GMO
Magdalena Fikus str.20

 Nie tylko lśniące włosy
Stanisław Bednarek str.21

Klub 44 str.22

Prosto z nieba: Galaktyka
na końcu Wszechświata
Michał Bejger str.24

Niebo jak własna kieszeń:
Kwiecień str.24

 Mnóstwo rachunków?
Joanna Jaszuska str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2013 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Telefonicznym Biurem Obsługi Klienta

pod numerem: 801 800 803 lub 22 717 59 59 – czynne w godzinach 7⁰⁰ – 18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

Matematyka stosowana i mechanika

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki jest jedną trzecią (choć nie ilościowo) Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego. Nazwa Instytutu może wzbudzać pewne wątpliwości u postronnych osób. Wyjaśnijmy więc! Matematyka stosowana, w przeciwieństwie do matematyki teoretycznej, zwanej czasami – z obcych języków – „czystą”, zajmuje się tymi strukturami matematycznymi, które bezpośrednio opisują rzeczywistość (np. przyrodę, ale nie tylko). Można powiedzieć, że matematyka teoretyczna bada te struktury matematyczne, które uzasadnione są głębią matematyczną, a matematyka stosowana – te, które uzasadnia świat zewnętrzny. Co ciekawe, te pierwsze wielokrotnie prowadzą do tych drugich, a te drugie zawsze prowadzą do tych pierwszych. Zatem matematyka teoretyczna i matematyka stosowana „przeplatają się ze sobą”, trochę tak (choć to dość zgrubna metafora), jak liczby wymierne i liczby niewymierne. To, co je różni, to cel ich uprawiania.

A mechanika? Mechanika jest po części kawałkiem matematyki stosowanej, a po części fragmentem podstaw fizyki: zależy, jak się ją rozumie. Wielu Czytelników pewnie miało inne skojarzenia z tą nazwą: mechanika to bardzo pojemne pojęcie. Tak jak my ją rozumiemy, to dziedzina matematyki wywodząca się z mechaniki klasycznej Newtona – najdoskonalszego tworu myśli naukowej (zdaniem autora).

Matematyka stosowana jest relatywnie nową dziedziną badań, choć, oczywiście, łatwo znaleźć prapoczątki u starożytnych Greków. Jeszcze w pierwszej połowie XX wieku G.H. Hardy w książeczce *Apologia matematyka* stwierdzał *Prawdziwa matematyka prawdziwych matematyków [...] jest niemal zupełnie nieprzydatna oraz w praktycznym życiu liczy się to, co banalne i nieciekawe*. Dzisiaj taki pogląd byłby kompletnym anachronizmem!

Tradycje matematyki stosowanej w Polsce są raczej niewielkie (choć dałoby się tu wymienić kilka wielkich nazwisk). Tym bardziej należy podziwiać jej rozkwit w Polsce w ostatnich latach.

Niewątpliwie matematyka stosowana jest obecnie na całym świecie jedną z najbardziej rozwijających się dziedzin. Stawia coraz trudniejsze i ciekawsze zagadnienia do rozwiązania. Przyciąga przez to najtęższe umysły. W dodatku daje absolwentom łatwiejsze możliwości znalezienia ciekawej pracy, szczególnie w najbardziej rozwiniętych krajach.

Instytut MSM przeobraził się z Instytutu Mechaniki w latach 80. ubiegłego stulecia. Myślę, że było to wtedy bardzo dalekowzroczne posunięcie.

Czym więc my, dzielni matematycy stosowani, zajmujemy się w Instytucie MSM?

- **Zakład Analizy Numerycznej.** Grupa ta opracowuje matematyczne podstawy obliczeń numerycznych w zastosowaniu do zagadnień matematyki stosowanej. Głównym celem jest opracowanie adekwatnych metod numerycznych dla równań różniczkowych cząstkowych oraz dla zadań wielowymiarowych, które są jednymi z głównych sposobów opisu rzeczywistości. Na przykład, celem badań naukowych jest problem zadań, dla których liczba zmiennych jest bardzo duża. Zadania takie obciążone są „przekleństwem wymiaru”, a prowadzone badania ukierunkowane są na uniknięcie tego przekleństwa. Uprawiana jest grafika komputerowa i komputerowe wspomaganie projektowania geometrycznego.

- **Zakład Biomatematyki i Teorii Gier.** Skomplikowane procesy świata przyrody (biologia, medycyna), a także społeczne, grupa ta usiłuje sprowadzić do struktur matematycznych. Następnie z matematycznej analizy owych struktur – uzyskać istotne informacje o danych procesach. Typowym przykładem może być modelowanie oddziaływania pomiędzy nowotworem a układem immunologicznym i próba odpowiedzi na pytanie, która z możliwych terapii jest najskuteczniejsza. Zainteresowania grupy to także matematyczne podstawy opisów wieloskalowych oraz pewne aspekty teorii gier w modelach procesów biologicznych, ekonomicznych i społecznych.

- **Zakład Równań Fizyki Matematycznej.** Grupa ta zajmuje się trudnymi zagadnieniami dla nieliniowych równań różniczkowych cząstkowych. Równania takie m.in. opisują zmianę w czasie i w przestrzeni parametrów fizycznych modeli rozpatrywanych w fizyce, biologii i innych naukach przyrodniczych. Typowe przykłady inspiracji to przepływy cieczy, ruch lawin, wzrost kryształów, a także zjawiska chemotaksji i haptotaksji. Część grupy bliska jest słynnemu zagadnieniu milenijnemu (*Millennium Prize Problems*) – rozwiązaniu równania Naviera–Stokesa.

- **Zakład Statystyki Matematycznej.** Trudno powiedzieć cokolwiek o świecie bez użycia statystyki. Grupa ta pracuje nad rozwojem nowych metod statystycznej analizy danych oraz stosowaniem tych metod w rozwiązywaniu zagadnień w biologii, medycynie i finansach. Badane i stosowane są np. modele regresyjne, algorytmy Monte Carlo, sieci bayesowskie i szeregi czasowe.

Na koniec (*last but not least*) należy także wspomnieć

- **Zakład Matematyki Finansowej i Ubezpieczeniowej,** który, z przyczyn zrozumiałych tylko dla wtajemniczonych, znajduje się poza strukturą instytutów. Zakład ten, jak sama nazwa wskazuje, zajmuje się modelami matematycznymi w finansach, bankowości, ekonomii i ubezpieczeniach.

Mirosław LACHOWICZ

Instytut Matematyki Stosowanej i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



Najładniejsza choinka

Przemysław KICIAK*

Najładniejszą choinkę w życiu widziałem na Słowacji, w miejscowości Jasov. Jest tam klasztor założony w XII wieku, a obok niego rośnie sekwoja, a właściwie mamutowiec; drzewo to jest znacznie młodsze niż klasztor, bo ma tylko 180 lat. Uwagę patrzącego przyciąga pień, bardzo gruby przy ziemi i bardzo smukły na samej górze. Kształt pnia (i wszystkich części każdego drzewa) to kwestia swoistej ekonomii; na drzewo działają rozmaite siły, które pień musi wytrzymać, i dlatego musi być dostatecznie gruby. Ale do zbudowania grubego pnia potrzeba bardzo dużo budulca, który trzeba wydobyć z gleby i z powietrza, i energii, otrzymywanej ze Słońca – to po tę energię drzewa „ścigają się do góry”. Im grubszy i wyższy jest pień, tym większe obciążenia musi wytrzymywać, co sprawia, że ten wyścig to nadzwyczaj trudna konkurencja. Mistrzami w niej są mamutowce.

Źródła sił działających na pień choinki to przede wszystkim grawitacja (ciężar samego pnia, gałęzi, igieł, szyszek, opadów atmosferycznych i siadających na gałęziach ptaków), wiatr, powodujący nie tylko zginanie, ale też skręcanie (choć momenty wywieranych przez poszczególne konary sił skręcających pień w znacznym stopniu się znoszą) i wreszcie bezwładność (ojczyzną mamutowców jest Kalifornia, obszar sejsmiczny). Wspomniana „ekonomia” ma na celu jak najlepsze wykorzystanie materiału, co sprowadza się do tego, by przy największych obciążeniach, na jakie pień bywa wystawiony, naprężenia w poszczególnych częściach pnia były bliskie wytrzymałości drewna, z którego pień jest zbudowany. W tym artykule chciałbym pokazać, jak z tak postawionego problemu „ekonomicznego” wynika rozwiązanie w postaci kształtu pnia. W tym celu zbuduję i zbadam pewien bardzo uproszczony model pnia mamutowca i działających na niego sił wiatru i grawitacji.

To, czy dany materiał wytrzyma obciążenie, zależy od tzw. trójosiowego stanu naprężeń. Na przykład, materiał rozciągany lub ściskany jednakowo we wszystkich kierunkach może wytrzymać większe naprężenie niż materiał rozciągany lub ściskany tylko w jednym kierunku. Ważne są też kierunkowe własności materiału: sztywność i wytrzymałość drewna rozciąganego wzdłuż włókien jest większa niż w kierunkach prostopadłych do włókien, co określa się mianem anizotropii. Na rozkład naprężeń w pniu ma wpływ zależność odkształceń od naprężeń. Dla prawie wszystkich ciał stałych, jeśli naprężenia są dostatecznie małe, zależność ta jest liniowa; jest to znane prawo Hooke’a. Jednak dla większych naprężeń (a zwłaszcza bliskich granicy wytrzymałości materiału) prawo to przestaje obowiązywać. Poza tym w różnych częściach pnia (zależnie od wieku drewna i zawartości wody) zależność ta może być różna. Tych wszystkich rzeczy nie weźmiemy dalej pod uwagę, ale budując model matematyczny czegokolwiek, zawsze należy pamiętać o najważniejszych pominiętych czynnikach (wszystkich nigdy nie znamy).

Przyjmujemy następujące nieprawdziwe (co nie znaczy od razu, że błędne) założenia: w każdym miejscu sztywność i wytrzymałość drewna jest taka sama (korę traktujemy jak drewno). Pień rośnie pionowo, a jego przekrój poziomy na każdej wysokości jest kołem, którego promień wolno zmienia się z wysokością. Grawitacja i zginanie przez wiatr powodują tylko ściskanie i rozciąganie włókien wzdłuż pnia, którego materiał spełnia prawo Hooke’a. Przy tych założeniach wspomniane przekroje pnia pozostają płaskie, tj. cząstki drewna położone na dowolnym poziomym przekroju pnia nieodkształconego po jego obciążeniu nadal znajdują się w jednej płaszczyźnie. Przyjmujemy ponadto, że średnice przekrojów po odkształceniu pnia pozostają niezmiennione.

Wprowadzimy układ współrzędnych, którego oś x jest skierowana pionowo do góry, oś y ma kierunek wiatru, który wieje poziomo, a oś z jest do pozostałych dwóch osi prostopadła. Jeśli H oznacza wysokość pnia, a funkcja $u(x)$ opisuje ugięcie (tj. boczne przemieszczenie przekroju) pnia na wysokości x , gdzie $x \in [0, H]$, to dla niewielkich (z założenia) ugięć promień okręgu ściśle stycznego do wygiętej osi pnia na wysokości x jest w dobrym

*Instytut Matematyki Stosowanej
i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

przybliżeniu równy $R(x) = 1/u''(x)$. Jeśli w tym miejscu przekrój pnia ma promień $r(x)$, to maksymalne względne zmiany długości włókien, spowodowane przez wygięcie pnia, są równe $\pm r(x)/R(x) = \pm r(x)u''(x)$. Wprowadźmy w płaszczyźnie przekroju pnia lokalny układ współrzędnych η, ζ , mający początek w środku przekroju i taki, że oś η przed odkształceniem pnia ma kierunek i zwrot osi y . Względne odkształcenie włókna przecinającego przekrój w punkcie (η, ζ) jest proporcjonalne do η . Z prawa Hooke'a wynika, że także naprężenie włókna jest proporcjonalne do η . Naprężenia włókien spowodowane przez zginanie pnia w rozważanym przekroju są zatem opisane przez funkcję

$$\sigma_z(\eta, \zeta) = \sigma_{z \max} \frac{\eta}{r(x)},$$

której wartość dodatnia oznacza, że włókno jest ściskane. Wypadkowy moment siły dla naprężeń w przekroju pnia na wysokości x możemy wyrazić za pomocą całki po kole $K(x)$ – przekroju pnia na tej wysokości; całka ta jest objętością bryły pod wykresem funkcji $\eta\sigma_z(\eta, \zeta)$ (rys. 1), a oblicza się ją tak:

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_{K(x)} \eta \sigma_z(\eta, \zeta) d\eta d\zeta = \int_{K(x)} \frac{\sigma_{z \max}}{r(x)} \eta^2 d\eta d\zeta = \\ &= \frac{\pi}{4} r^3(x) \sigma_{z \max}. \end{aligned}$$

Z otrzymanego wyżej wzoru wynika, że wytrzymałość pnia na zginanie jest proporcjonalna do trzeciej potęgi promienia przekroju. Podobna zależność wytrzymałości od wielkości przekroju ma miejsce również dla belek, których przekroje mają kształt inny niż koło.

Pomińmy chwilowo naprężenia spowodowane przez grawitację, aby znaleźć optymalny kształt pnia ze względu na wytrzymałość na podmuchy wiatru. Siła parcia powietrza na gałąź drzewa zależy od wielkości i kształtu gałęzi i od prędkości wiatru, przy czym dla przepływu turbulentnego, z jakim mamy tu do czynienia, jest proporcjonalna do kwadratu prędkości wiatru. Sprawę komplikuje fakt, że prędkość wiatru nie tylko zmienia się w czasie, ale również zależy od wysokości – zwykle rośnie wraz z odległością od ziemi. Ponieważ górne gałęzie są znacznie krótsze od tych położonych niżej, gdzie prędkość wiatru jest mniejsza, wydaje się, że można (przy braku lepszych informacji) zobaczyć, co wyjdzie, jeśli założymy, że siła parcia wiatru na jednostkę długości (wysokości) pnia jest stała wzdłuż pnia. Oznaczmy tę stałą symbolem F . Wtedy moment siły wiatru zginającej pień na wysokości x jest równy

$$M_1(x) = \int_x^H F(t-x) dt = \frac{1}{2} F(H-x)^2$$

(ta całka jest polem trójkąta, który ma wierzchołek na wysokości x i przeciwny bok na wysokości H , rys. 2). Moment ten jest wypadkowym momentem sił ściskających i rozciągających włókna przekroju: $M_1(x) = M(x)$. Mamy stąd równanie, które wiąże stałą F , promień przekroju $r(x)$ i maksymalne naprężenie spowodowane przez zginanie $\sigma_{z \max}$:

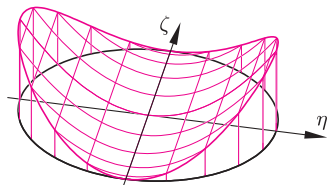
$$(*) \quad r^3(x) = \frac{2F(H-x)^2}{\pi\sigma_{z \max}}.$$

Jeśli założymy, że maksymalne naprężenie spowodowane przez zginanie ma być takie samo na każdej wysokości, to funkcja opisująca promień przekroju będzie mieć postać $r(x) = C(H-x)^{2/3}$, ze stałą $C = \sqrt[3]{2F/(\pi\sigma_{z \max})}$. Zobaczmy wykres (rys. 3): pień mamutowca tak nie wygląda.

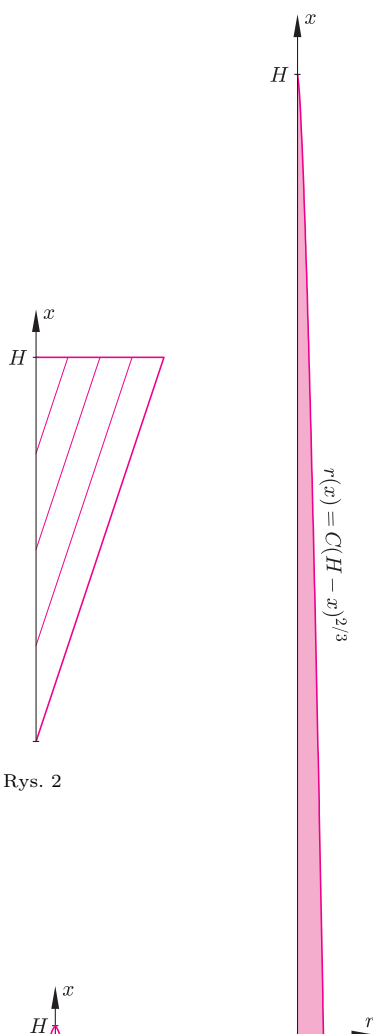
Rozważmy teraz grawitację. Oprócz ciężaru pnia musimy przy tym uwzględnić ciężar gałęzi. W tym celu przyjmiemy kolejne nie całkiem prawdziwe założenie, że rozkład ciężaru gałęzi wyrastających z pnia na wysokości x jest proporcjonalny do pola przekroju pnia na tej wysokości. Przy tym założeniu siła ściskająca pień na wysokości x jest równa

$$(**) \quad S(x) = \int_x^H D r^2(t) dt,$$

gdzie D jest pewną stałą (siła ta jest więc proporcjonalna do objętości części pnia powyżej poziomu x , rys. 4). Zgodnie z założeniami modelu siła ta powoduje

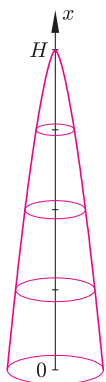


Rys. 1



Rys. 2

Rys. 3



Rys. 4

równomierne naprężenie σ_s w całym przekroju, musi ono zatem być równe

$$(**) \quad \sigma_s(\eta, \zeta) = \frac{S(x)}{\pi r^2(x)}.$$

Naprężenia spowodowane ściskaniem i zginaniem pnia dodają się, zatem skrajne naprężenia (odpowiednio we włóknach rozciąganych i ściskanych) to $\sigma_s - \sigma_{z \max}$ i $\sigma_s + \sigma_{z \max}$. Aby pień wytrzymał obciążenie, oba te naprężenia muszą leżeć w przedziale ograniczonym przez wytrzymałości drewna na rozciąganie i ściskanie wzdłuż włókien. Zwrot siły grawitacji sprawia, że maksymalne naprężenie ściskające ma większą wartość bezwzględną niż rozciągające, dlatego (choć wytrzymałość drewna na ściskanie może być większa niż na rozciąganie) zajmujemy się ściskaniem: chcemy, aby przy najsilniejszym wietrze, na jaki drzewo jest przygotowane, maksymalne naprężenie ściskające w każdym poziomym przekroju pnia było stałe, równe maksymalnej wytrzymałości drewna na ściskanie, którą oznaczymy symbolem σ_{\max} . Zatem, na podstawie (*), (**) i (***) mamy

$$(***) \quad \sigma_{\max} = \sigma_s + \sigma_{z \max} = \frac{D}{\pi r^2(x)} \int_x^H r^2(t) dt + \frac{2F(H-x)^2}{\pi r^3(x)}.$$

Dla wygody przekształcimy to równanie całkowe. Strony równości

$$\int_x^H r^2(t) dt = \frac{\pi r^2(x)}{D} \left(\sigma_{\max} - \frac{2F(H-x)^2}{\pi r^3(x)} \right) = \frac{\pi \sigma_{\max}}{D} r^2(x) - \frac{2F(H-x)^2}{Dr(x)}$$

różniczkujemy względem x :

$$-r^2(x) = \frac{2\pi \sigma_{\max}}{D} r(x)r'(x) + \frac{2F}{Dr(x)} \left(2(H-x) + \frac{(H-x)^2}{r(x)} r'(x) \right).$$

Po uporządkowaniu dostajemy stąd równanie różniczkowe zwyczajne

$$r'(x) = -\frac{Dr^3(x) + 4F(H-x)}{2\pi \sigma_{\max} r^3(x) + 2F(H-x)^2} r(x).$$

Właśnie ono jest matematycznym modelem pnia. Jako że bez dobrej nazwy niepodobna dziś odnieść sukces, nazwałem je Równaniem Mamutowca Kiciaka, w skrócie RóMaK (gdyby w wyprowadzeniu nie było tylu uproszczeń i wątpliwych założeń, nie zawahałbym się nazwać go Równaniem Prawdziwego Mamutowca).

RóMaK przepisemy w postaci

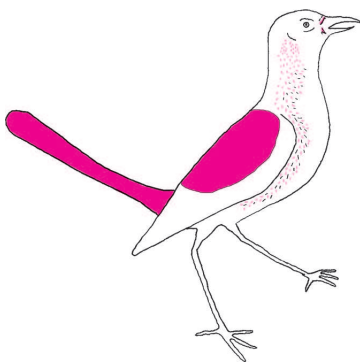
$$r'(x) = -\frac{dr^3(x) + 4f(H-x)}{2\pi r^3(x) + 2f(H-x)^2} r(x),$$

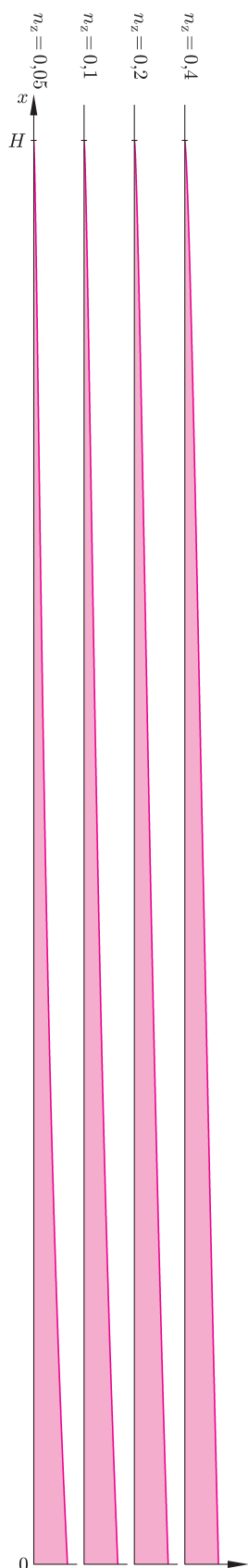
w której $d = D/\sigma_{\max}$, $f = F/\sigma_{\max}$. W ten sposób zmniejszyliśmy liczbę parametrów. Poszukiwane rozwiązania spełniają warunek $r(H) = 0$. Niestety, nie nadaje się on na warunek początkowy – poszukujemy rozwiązań dodatnich w przedziale $[0, H)$, a funkcja zerowa spełnia RóMaK i ten warunek. Polecam uwagę Czytelników sprawdzenie (za pomocą reguły de l'Hôspitala), że dla $d \geq 0$ i $f > 0$ rozwiązanie niezerowe w otoczeniu H , takie że $r(H) = 0$, musi mieć w otoczeniu H nieograniczoną pochodną; taką osobliwość ma np. znaleziona wcześniej funkcja $C(H-x)^{2/3}$, spełniająca RóMaK z parametrem $d = 0$. Jeśli $x_0 < H$ i $r(x_0) > 0$, to funkcja $r(x)$ jest dodatnia (i malejąca) w przedziale $[x_0, H)$.

Będziemy poszukiwać rozwiązań numerycznie, przez rozwiązanie zagadnienia początkowego dla RóMaK, przyjmując warunek początkowy $r(0) = r_0$, gdzie r_0 oznacza promień przekroju pnia przy ziemi. Parametry d i f należy dobrać tak, aby funkcja $r(x)$ jak najlepiej opisywała kształt pnia. W tym szaleństwie jest metoda: jeśli to się uda, to, być może, dowiemy się czegoś o wartościach tych parametrów bez mierzenia ich (co mogłoby być bardzo trudne).

Aby numerycznie rozwiązywać RóMaK, możemy podzielić przedział $[0, H]$ na N części, każda o długości $h = H/N$, a następnie, mając dane r_0 , obliczać kolejno, dla $i = 0, \dots, N-1$,

$$\begin{aligned} k_1 &= hg(ih, r_i), \\ k_2 &= hg\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, r_i + \frac{1}{2}k_1\right), \\ k_3 &= hg\left(\left(i + \frac{1}{2}\right)h, r_i + \frac{1}{2}k_2\right), \\ k_4 &= hg\left((i+1)h, r_i + k_3\right), \\ r_{i+1} &= r_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \end{aligned}$$





Rys. 5

(*) Ocena ta jest niedokładna; znacznie później znalazłem wyniki pomiarów przeprowadzonych w sierpniu 2012. Pień miał wtedy wysokość 47,7 m i obwód 7,42 m na wysokości 1,3 m.

gdzie

$$g(x, y) = -\frac{dy^3 + 4f(H-x)}{2\pi y^3 + 2f(H-x)^2}y.$$

Jest to tzw. metoda Rungego–Kutty czwartego rzędu. Określa ona ciąg liczb r_i , przybliżających wartości funkcji $r(x)$ w punktach ih z dokładnością aż nadto wystarczającą w tym zastosowaniu.

Jak wybierać parametry f i d ? Nie są one niezależne. Oznaczmy wielkości pomocnicze:

$$n_z = \frac{2fH^2}{\pi r_0^3}, \quad n_s = \frac{d}{\pi r_0^2} \int_0^H r^2(t) dt.$$

Na podstawie (**) musi być $n_z + n_s = 1$; wielkości te określają udziały naprężeń powodowanych przez zginanie i ściskanie w maksymalnym naprężeniu w przekroju pnia przy ziemi. Mając dane r_0 i H , możemy wybrać $n_z \in (0, 1)$, obliczyć $f = \pi r_0^3 n_z / (2H^2)$, a następnie, rozwiązując RóMaK dla różnych wartości parametru d , znaleźć taką jego wartość, aby równość $n_z + n_s = 1$ była spełniona. Mamy tu równanie nieliniowe z niewiadomą d , które można rozwiązać np. metodą bisekcji. Obliczając n_s , możemy posłużyć się wzorem przybliżonym

$$\int_0^H r^2(t) dt \approx \frac{H}{2N} \left(r_0^2 + 2 \sum_{i=1}^{N-1} r_i^2 + r_N^2 \right)$$

(jest to tzw. złożona kwadratura trapezów).

Pora zatrudnić do obliczeń komputer. Na podstawie zdjęć oceniłem (*) wysokość drzewa na 35 m. Przy ziemi pień ma średnicę około 2,5 m, ale ponieważ okazało się, że model nie jest w stanie odtworzyć zgrubienia pnia na samym dole (o czym dalej), przyjąłem promień $r_0 = 0,95$ m. Wyniki obliczeń z $N = 1000$ dla kilku wartości parametru n_z przedstawiają wykresy na rysunku 5 i tabela:

n_z	n_s	f [m]	d [m ⁻¹]
0,05	0,95	$5,49 \cdot 10^{-5}$	0,3722
0,1	0,9	$1,10 \cdot 10^{-4}$	0,3084
0,2	0,8	$2,19 \cdot 10^{-4}$	0,2371
0,4	0,6	$4,39 \cdot 10^{-4}$	0,1528

We wszystkich tych przypadkach było $r_{N-1} > 0$ i $r_N \approx 0$ (jeśli $r_N > 0$, to parametr d ma za małą wartość). Wydaje się, że najlepsza zgodność z tym, co widać na zdjęciach (patrz strona 2; więcej szczegółów na www.deltami.edu.pl), ma miejsce, gdy n_z jest bliskie 0,1–0,2. Sugeruje to, że naprężenia spowodowane przez grawitację osiągają na dole pnia około 80–90% wytrzymałości drewna, a pozostałe 10–20% to zapas na wypadek silnego wiatru. Na dużych wysokościach dominują naprężenia powodowane przez zginanie.

* * *

Wymyślając założenia i wyprowadzając z nich RóMaK, nie wiedziałem, co z tego wyjdzie. Wyszło nieźle; „nie wyszło” tylko zgrubienie pnia tuż przy ziemi. To oznacza, że założenia nie opisują poprawnie zjawisk zachodzących w tym miejscu pnia. Warto więc jeszcze raz zastanowić się nad nimi. Kora, która w dolnej części pnia jest bardzo gruba, nie przenosi obciążeń tak samo jak drewno, a przekroje pnia nie są okrągłe i po obciążeniu nie pozostają płaskie. Drzewa nie rosną idealnie pionowo i nawet niewielkie odchylenie od pionu (rzędu 1°) może bardzo zmienić rozkład naprężeń. Można też zakwestionować podstawowe założenie, że maksymalne naprężenie na każdej wysokości jest takie samo. Skutki ewentualnego złamania pnia dla drzewa byłyby tym poważniejsze, im niżej by to nastąpiło – gdyby odłamał się tylko czubek, to drzewo nadal mogłoby żyć i wytwarzać nasiona. Z tego powodu prawdziwy pień może być na dole dodatkowo wzmocniony, czyli grubszy, niż to wynika z modelu. Niemniej można dobrać parametry modelu tak, aby funkcja $r(x)$ spełniająca RóMaK całkiem dobrze opisywała kształt prawie całego pnia mamutowca. Ale kto chce, może uznać, że podobieństwo otrzymanego wyniku do choinki z Jasova jest słabe, a to, co ten model opisuje, to nie żaden mamutowiec, tylko lipa.

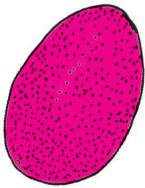
Matching markets Noblem nagrodzone

Michał KRAWCZYK*



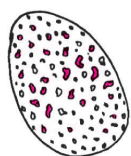
Komitet Noblowski zdecydował o przyznaniu Nagrody w dziedzinie nauk ekonomicznych za rok 2012 Lloydowi Shapleyowi i Alwinowi Rothowi. Nagrody z ekonomii nie są, ściśle rzecz ujmując, Nagrodami Nobla, bo gdy wynalazca dynamitu ustanawiał prestiżowe wyróżnienia, żadnej z nauk społecznych nie uznawano za wystarczająco rozwiniętą. Od roku 1969 są jednak przyznawane Nagrody z ekonomii ufundowane przez Bank Szwecji, ekonomiści są zatem i tak w lepszym położeniu niż matematycy. Co prawda, niekiedy Komitet Noblowski mimowolnie sugerował, że ekonomia wciąż pozostaje niedojrzała, przyznając w tym samym roku nagrody badaczom głoszącym poglądy wzajemnie sprzeczne (*vide* Hayek i Myrdal w 1974 roku czy Kahneman i Smith w 2002 roku). W tym roku, na szczęście, uniknięto tego bolesnego wrażenia. Przeciwnie, Roth bardzo silnie opiera swoje badania na wynikach starszego o blisko trzydzieści lat kolegi. Decyzję trudno także uznać za zaskakującą – oba nazwiska pojawiały się na noblowej „gieldzie” od lat, a że Shapley przekroczył dziewięćdziesiątkę, rosła obawa, iż Komitet nie zdąży go uhonorować. Rozstrzygnięcie należy też pochwalić z tego względu, że nagrodzone wyniki to jeden ze stosunkowo niewielu w ekonomii przykładów pozornie abstrakcyjnej, suchej, formalnej, a przy tym wcale niebanalnej teorii, która ma bardzo praktyczne zastosowania.

Czego dotyczą więc badania Shapleya i Rotha (oczywiście, te nagrodzone, bo np. Shapley ma ogromne zasługi w innych obszarach teorii gier)? Ogólnie rzecz biorąc, dotyczą tzw. *matching markets*, a więc sytuacji, w których dwie strony „ryнку” mają silne preferencje co do tego, z kim konkretnie po drugiej stronie wejdą w interakcję. Cechy tej **nie** ma np. rynek cebuli – gdy idę na targ, jest mi zasadniczo wszystko jedno, od którego ze sprzedawców ją kupię. Jeśli natomiast zamierzam się ożenić, to, z kim połączy mnie „mechanizm rynkowy”, jest absolutnie kluczowe. Podobnie, jeżeli wybieram się na studia, mogę mieć swój porządek uczelni czy poszczególnych kierunków od najlepszych do najgorszych (i porządek ten może być inny dla każdego z kandydatów). Oczywiście, także uczelnie mają swoje listy pożądaných studentów.



W systemie obecnie stosowanym w Polsce może zdarzyć się, że pewną Martę przyjmą na uczelnię \mathcal{A} , ale ona wolałaby iść na uczelnię \mathcal{B} , lecz na \mathcal{B} znalazła się dopiero na liście rezerwowej. Nie składa więc matury na \mathcal{A} , tylko czeka, skutkiem czego \mathcal{A} ją skreśla. Tymczasem nie ma wcale gwarancji, że na \mathcal{B} doczeka się przyjęcia, więc ostatecznie może skończyć np. na uczelni \mathcal{C} . Zatem \mathcal{A} zamiast Marty przyjmuje z listy rezerwowej pewnego Jana, choć wolałaby przyjąć Martę, a i Marta wolałaby \mathcal{A} względem \mathcal{C} , na której kończy. Co gorsza, może być nawet tak, że \mathcal{C} (stosując inne kryteria niż \mathcal{A}) przyjęła tegoż Jana w pierwszym rzucie, ale on wolał np. uczelnię \mathcal{D} i był tam na liście rezerwowej, zatem odrzucił ofertę \mathcal{C} i czekał na \mathcal{D} , lecz tam się nie dostał i dlatego właśnie skończył na \mathcal{A} ! Czyli gdybyśmy zamienili Martę i Jana miejscami, to zarówno oboje zainteresowanych kandydatów, jak i obie uczelnie skorzystałyby na tym!

Korzystając z aparatu formalnego stworzonego przez Shapleya, powiemy, że rozwiązanie jest **niestabilne**, a (Marta, \mathcal{A}) jest **parą blokującą** – obie strony przedkładałyby bycie połączonymi nad aktualną sytuację (tj. Marta chciałaby zastąpić \mathcal{C} przez \mathcal{A} , a \mathcal{A} byłaby gotowa wymienić na Martę Jana, a – być może – także inne przyjęte osoby). Oczywiście, (Jan, \mathcal{C}) też jest parą blokującą. Na „ryнку” małżeńskim przypadek pary blokującej – preferującej siebie nawzajem wobec aktualnych współmałżonków – potocznie możemy nazwać romanssem. Intuicyjnie widać więc, że lepiej, by procedura dawała rozwiązanie stabilne, co podnosi satysfakcję uczestników i pozwala uniknąć kosztownych dostosowań *ex post*; badania faktycznie pokazują, że mechanizmy gwarantujące taką alokację są lepiej oceniane i dłużej pozostają w mocy.

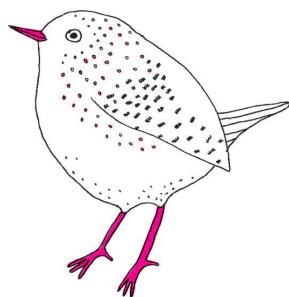


Shapley (we współpracy z Davidem Galem) udowodnił, że rozwiązanie stabilne (a więc takie, w którym nie ma ani jednej pary blokującej) musi istnieć

*Wydział Nauk Ekonomicznych,
Uniwersytet Warszawski

i pokazał, jak go szukać. W szczególności zaproponował **algorytm odroczonej akceptacji**. Gdy skorzystamy z terminologii „rynku” małżeńskiego, jedna z jego wersji polega na tym, że w pierwszej rundzie każdy z panów oświadcza się pani, która jest najwyżej na jego liście akceptowalnych partnerek. Każda z pań „roboczo” przyjmuje oświadczenia tego z jej adoratorów, którego ceni najwyżej (o ile którykolwiek jest do przyjęcia). Każdy odrzucony pan wykreśla z listy preferencji panią, która go odtrąciła, i w kolejnej rundzie mechanizm zostaje powtórzony z tak skróconymi listami. Pan, który wykreśli wszystkie akceptowalne partnerki, przestaje się oświadczać. Mechanizm kończy się, gdy w kolejnej rundzie nikt nie zostanie odtrącony, a „roboczo” przyjęte w niej oświadczenia wyznaczają ostatecznie utworzone pary (przy czym niektórzy mogą pozostać samotni).

Ponieważ w każdej rundzie poza ostatnią przynajmniej jedna pani zostaje skreślona z przynajmniej jednej listy, **mechanizm faktycznie doprowadzi do pewnej alokacji w skończonej liczbie kroków**. Co istotniejsze, **będzie to alokacja stabilna**. Przypuśćmy przeciwnie, że pewna para (Piotr, Anna) jest parą blokującą. Oznacza to, że Piotr oświadczył się kiedyś Annie (skoro jest ona wyżej na jego liście niż jego docelowa żona) i został odrzucony (skoro nie są razem). Zauważmy jednak, że mechanizm ten gwarantuje, iż sytuacja każdej z pań z rundy na rundę może się tylko poprawić, bo odrzuca oświadczenia, które przyjęła roboczo w poprzedniej rundzie, tylko jeśli w nowej oświadczył się ktoś atrakcyjniejszy (a nieodrzucone oświadczenia zostaną powtórzone). Stąd wniosek, że Anna daje pierwszeństwo swojemu docelowemu mężowi przed Piotrem, zatem (Piotr, Anna) parą blokującą nie jest. Zauważmy, że w opisanym wyżej polskim systemie przyjęcie na studia było inaczej, tj. Marta słusznie żałowała, że odrzuciła była „oświadczenia” A , bowiem ostatecznie zaczęła studia na mniej preferowanej uczelni.



Rozwiązanie zadania M 1382.

Będziemy zaznaczać liczby w kilku krokach. W kroku 1. w każdym wierszu zaznaczamy najmniejszą liczbę. Jeśli wówczas w każdej kolumnie jest zaznaczona dokładnie jedna liczba, to kończymy. W przeciwnym razie, w kolejnym kroku w każdej kolumnie, w której znajdują się co najmniej dwie zaznaczone liczby, odznaczamy je wszystkie (czyli usuwamy zaznaczenie) oprócz największej. W ten sposób powstały wiersze, w których nie zaznaczono żadnej liczby – nazwijmy je *wierszami wolnymi*. Następnie zaznaczamy w każdym wolnym wierszu najmniejszą liczbę spośród tych, które nigdy wcześniej nie były zaznaczone ani odznaczane. W następnym kroku znowu patrzymy na kolumny, w których są zaznaczone co najmniej dwie liczby, i powtarzamy opisane rozumowanie, aż uzyskamy odpowiednie zaznaczenie lub nie będzie można wykonać kolejnego kroku.

Każdy wiersz może stać się wolny co najwyżej $n - 1$ razy, więc wykonamy co najwyżej $n(n - 1) + 1$ kroków. Po ostatnim kroku w każdej kolumnie będzie zaznaczony dokładnie jeden element.

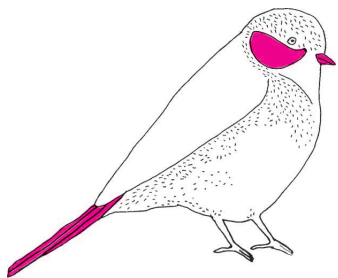
Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że w tej procedurze zaznaczono elementy z przekątnej a_{11}, \dots, a_{nn} (możemy tak założyć, ewentualnie przestawiając kolumny). Spójrzmy na i -ty wiersz. Jeśli $a_{ik} < a_{ii}$ dla pewnego k , to znaczy, że w pewnym kroku liczba a_{ik} była odznaczona, a zatem $a_{ik} < a_{kk}$.

Oczywiście, równie dobrze moglibyśmy rozważyć analogiczny mechanizm, w którym oświadczałyby się panie. Na ogół doprowadzi on do innej konfiguracji par. Co ciekawe, Gale i Shapley udowodnili, że **mechanizm odroczonej akceptacji jest najlepszy dla strony oświadczałcej się i najgorszy dla drugiej strony**. Oznacza to, że w sytuacji, gdy mężczyźni się oświadczają, każdy mężczyzna otrzyma najlepszą z żon, jaką mógłby otrzymać w dowolnym rozwiązaniu stabilnym, a każda kobieta – najgorszego z mężów. Nic dziwnego, że w tradycyjnym społeczeństwie, dającym więcej władzy mężczyznom, to właśnie oni się oświadcza!

Choć akurat scentralizowane rynki doboru w pary małżeńskie mogą budzić nasz sprzeciw, łatwo stwierdzić, że zastosowanie mechanizmu odroczonej akceptacji przy rekrutacji na studia pozwoliłoby uniknąć opisanego wyżej paradoksu, zredukowało obciążenia administracyjne dla uczelni i znacznie przyspieszyło proces rekrutacji – otrzymawszy listy preferowanych uczelni od kandydatów i kryteria doboru (np. wagi poszczególnych przedmiotów maturalnych) od uczelni, dobrze napisany program komputerowy przeprowadziłby opisaną przez nas procedurę w ciągu kilku sekund.

Istotnie, spektakularnym osiągnięciem Rotha są liczne praktyczne zastosowania algorytmów łączenia dwóch stron rynku. Oczywiście, różnica między teorią a praktyką jest taka, że w teorii nie ma różnicy, a w praktyce jest. Przykładowo, implementując algorytmy odroczonej akceptacji do problemu doboru absolwentów szkół medycznych do szpitali w Stanach Zjednoczonych (*National Resident Matching Program*), Roth stanął przed problemem związanym m.in. z parami małżeńskimi, w których preferencje co do szpitali nie były niezależne – małżonkowie woleli na ogół pracować możliwie blisko siebie. W swych pracach teoretycznych Roth pokazał, że tego rodzaju modyfikacje rujną wspomniane wyniki – w tym przypadku alokacja stabilna może wcale nie istnieć!

Noblista zaproponował jednak pewne (znacznie bardziej skomplikowane niż algorytm odroczonej akceptacji) mechanizmy, które, jak pokazał na podstawie symulacji komputerowych opartych na historycznych danych, prawie zawsze dadzą stabilne rozwiązanie.



Innym, wdrożonym przez Rotha praktycznym zastosowaniem algorytmów rozważanych wcześniej przez Shapleya, jest problem wymiany nerek do przeszczepu pochodzących od żyjących dawców. Przeszczep nerki jest zbawieniem dla osób cierpiących na ciężką niewydolność tych organów, a człowiek zdrowy może zasadniczo bez trwałej szkody dla zdrowia oddać jedną ze swoich nerek. Niemniej jest to istotne poświęcenie, które większość osób jest gotowa podjąć tylko dla kogoś bliskiego. Niestety, nawet jeśli krewny czy przyjaciel chorego zgodzi się oddać mu swoją nerkę, często okazuje się, że jest ona nieodpowiednia ze względów medycznych, np. pacjentowi o grupie krwi 0 można przeszczepić tylko nerkę pochodzącą od osoby o tejże grupie. Z kolei rynek, na którym można by po prostu kupić stosowną nerkę, większość ludzi uważa za nieetyczny i prawodawstwo niemal wszystkich krajów świata wyklucza takie transakcje. Roth wziął jednak udział w tworzeniu systemów „łańcuchowej” wymiany. W uproszczeniu działają one tak, że np. ktoś gotowy do oddania nerki żonie z niewydolnością, której nie może jednak bezpośrednio pomóc z powodu niewłaściwej grupy krwi, oddaje nerkę na rzecz innej, nieznannej sobie osoby, w chwili gdy z kolei jego żonie pomaga ktoś inny, kto ma krewnego z niewydolnością nerki itd. To chyba rzadki przypadek, gdy badania nagrodzone Noblem, ale wcale nie z medycyny, bezpośrednio ratują ludzkie życie.

Popularna piosenka powiada, że *money makes the world go 'round*. Przesada. **Centralnym pojęciem ekonomii jest efektywność, a nie pieniądz.** Rynki projektowane przez Rotha świetnie radzą sobie (prawie) bez niego.



Zadania

Redaguje Krzysztof TURZYŃSKI

F 829. Jednorodna lina zwisa z dwóch zbczy, z których każde jest nachylone pod kątem $\alpha = \pi/8$ do poziomu (rys. 1). Jaki ułamek całkowitej długości liny może stanowić część wisząca w powietrzu?

Rozwiązanie na str. 16



Rys. 1

F 830. Poruszające się bez tarcia po lodowisku dziewczę w pewnej chwili chwyta koniec cienkiej liny nawiniętej na słup o przekroju kołowym, przy czym lina jest naprężona i prostopadła do prędkości v_0 dziewczęcia w momencie złapania (rys. 2). Po skończonym czasie dziewczę, przez cały czas kurczowo trzymające się liny, zderza się ze słupem. Jaka jest prędkość dziewczęcia w chwili zderzenia?

Rozwiązanie na str. 17

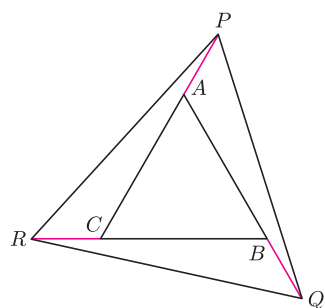


Rys. 2

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1381. Na półprostych CA , AB , BC , będących przedłużeniami boków trójkąta ABC , obrano odpowiednio punkty P , Q , R , przy czym $AP = BQ = CR$ (rys. 3). Udowodnić, że jeśli trójkąt PQR jest równoboczny, to trójkąt ABC również.

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 3

M 1382. Dana jest tablica $n \times n$ parami różnych liczb rzeczywistych. Udowodnić, że można w niej zaznaczyć n liczb, po jednej w każdym wierszu i kolumnie, w taki sposób, że jeśli w pewnym wierszu zaznaczona liczba jest większa od jakiejś innej w tym wierszu, to ta druga liczba jest mniejsza od zaznaczonej liczby z jej kolumny.

Rozwiązanie na str. 7

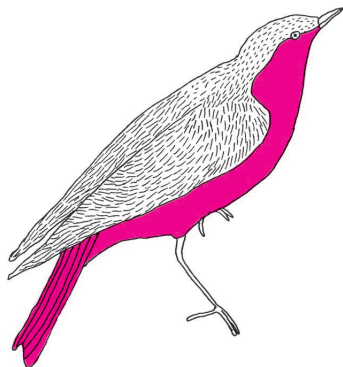
M 1383. Udowodnić, że dla liczb rzeczywistych a, b, c jest spełniona nierówność

$$|a - b| + |b - c| + |a + b + c| \geq |a| + |b|.$$

Rozwiązanie na str. 15

Złośliwy problem $(MAX, +)$ i kubełkowe struktury danych

Wojciech ŚMIETANKA*



Dany jest ciąg złożony z n nieujemnych liczb całkowitych $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$. Na ciągu c chcemy wykonywać operacje dwóch rodzajów:

- $\text{update}(i, j, w)$ – modyfikuje wartości wyrazów ciągu o indeksach z przedziału od i do j w sposób zależny od parametru w (dodatniej liczby całkowitej);
- $\text{query}(i, j)$ – podaje *zintegrowaną* wartość dla podciągu o indeksach od i do j .

W obydwu przypadkach zakładamy, że $1 \leq i \leq j \leq n$.

Będziemy rozważali dwie różne operacje update , które oznaczymy symbolicznie przez $+$ i MAX . W operacji $+$ należy do każdego wyrazu podciągu c_i, \dots, c_j dodać liczbę w . Z kolei operacja MAX polega na zmianie wartości wyrazu c_l ($i \leq l \leq j$) na $\max(c_l, w)$ – innymi słowy, jeśli wyraz miał wcześniej wartość nie mniejszą niż w , to jej nie zmienia, a jeśli jego wartość była mniejsza od w , to jego nową wartością jest w .

Podobnie definiujemy dwie operacje query : $+$ i MAX . Na zapytanie $+$ odpowiadamy, podając sumę wyrazów z podciągu c_i, \dots, c_j . Odpowiedzią na zapytanie typu MAX jest natomiast wartość największego wyrazu w rozważanym podciągu.

Biorąc pod uwagę wszystkie kombinacje poszczególnych operacji, otrzymujemy cztery różne warianty problemu. Każdy taki wariant oznaczamy za pomocą pary, której pierwszy wyraz opisuje rodzaj operacji modyfikacji, a drugi określa zapytanie. Mamy zatem następujące warianty: $(+, +)$, $(+, MAX)$, $(MAX, +)$ oraz (MAX, MAX) .

Okazuje się, że nasz problem ma kilka ciekawych zastosowań. Wariant $(+, MAX)$ można wykorzystać do implementacji systemu obsługi rezerwacji miejsc w pociągu na trasie łączącej $n + 1$ stacji. W pociągu znajduje się ustalona liczba miejsc siedzących. Każda rezerwacja dotyczy konkretnej liczby pasażerów i wskazuje numery dwóch stacji, na których pasażerowie zamierzają wsiąść i wysiąść. Naszym celem jest przyjmować kolejno wszystkie rezerwacje, które nie powodują przepełnienia pociągu.

Oznaczmy przez c_l aktualną liczbę pasażerów, którzy będą w pociągu na trasie pomiędzy stacjami l oraz $l + 1$. Rezerwację na podróż ze stacji i do stacji j dla w pasażerów możemy przyjąć, jeśli wartość $\text{query}(i, j - 1) + w$ jest nie większa niż liczba miejsc w pociągu. Po przyjęciu rezerwacji wykonujemy $\text{update}(i, j - 1, w)$.

Inaczej można na to spojrzeć jak na problem kontroli przesyłania danych między serwerami połączonymi jedną linią danych o określonej przepustowości albo problem obsługi pobierania danych z Internetu przez użytkowników sieci lokalnej w zadanych przedziałach czasowych (sieć ma ograniczony transfer).

Wariant (MAX, MAX) ma natomiast elegancką interpretację kombinatoryczną powiązaną z popularną grą Tetris. Odpowiada on mianowicie sytuacji, w której klocki, które opadają na planszę, mają regularną strukturę (np. mają kształt prostokątów), a naszym celem jest, dla każdego klocka, orzec, w którym miejscu się on zatrzyma, jeśli spuścimy go z zadanej pozycji początkowej (nie mamy możliwości wykonywania w locie obrotów ani przesunięć). Z kolei wariant $(+, +)$ reprezentuje dynamiczny problem obliczania sum częściowych ciągu.

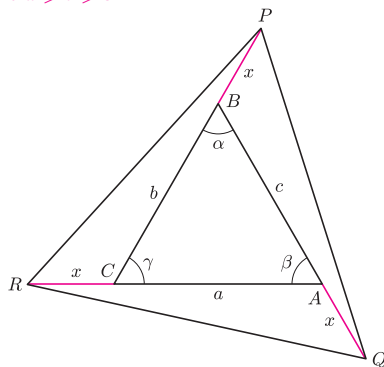
Trzy z podanych wariantów wyjściowego problemu mają zatem jasno określoną interpretację. Co więcej, znane są ich efektywne rozwiązania, w których koszt obsługi ciągu m zapytań to $O(n + m \log n)$ (szukaną strukturą danych są tzw. drzewa przedziałowe, o których więcej można przeczytać lub posłuchać na stronie <http://was.zaa.mimuw.edu.pl>).

*pracownik firmy Google



Rozwiązanie zadania M 1381.

Przyjmijmy oznaczenia boków i kątów trójkąta ABC jak na rysunku i załóżmy, że $a \geq b \geq c$.



Wówczas $\alpha \geq \beta \geq \gamma$, a stąd $\cos \alpha \leq \cos \beta \leq \cos \gamma$, ponieważ funkcja cos jest malejąca na przedziale $(0, \pi)$. Przyjmijmy, że $AP = BQ = CR = x$. Wówczas z twierdzenia cosinusów otrzymujemy

$$QR^2 = x^2 + (a+x)^2 + 2x(a+x)\cos\beta,$$

$$PQ^2 = x^2 + (c+x)^2 + 2x(c+x)\cos\alpha.$$

Gdyby było $a > c$, to ponieważ $\cos \beta \geq \cos \alpha$, mielibyśmy $QR > PQ$, co przeczyłoby założeniu, że trójkąt PQR jest równoboczny. W takim razie $a = b = c$.

Za to czwarty wariant, $(MAX, +)$, jest inny. Jego interpretacja kombinatoryczna nie jest wcale aż tak jasna, a do tego nie znamy sposobu rozwiązania go w czasie $O(n + m \log n)$ (w tym przypadku klasyczne drzewa przedziałowe nie sprawdzają się). Okazuje się jednak, że można go w miarę prosto rozwiązać, korzystając z pewnej *kubelkowej* struktury danych. Nasze rozwiązanie będzie działało w czasie $O(n + m\sqrt{n} \log n)$.

Zacznijmy od podziału wyrazów ciągu pomiędzy kubelki, umieszczając w każdym kubelku, z wyjątkiem ostatniego, $k = \lceil \sqrt{n} \rceil$ wyrazów. Jeśli ostatni kubek jest mniejszy, możemy uzupełnić go sztucznymi wyrazami do rozmiaru k . Oprócz kolejnych wyrazów ciągu kubek będzie przechowywał pewne dane pomocnicze. Zanim opiszemy strukturę kubka, zaproponujmy trochę inny sposób myślenia o operacji $update(i, j, w)$. Zamiast mówić, że dla każdego c_l , takiego że $i \leq l \leq j$, wykonujemy $c_l := \max(c_l, w)$, można wyobrazić sobie, że dodajemy nowe ograniczenie dolne na liczby na pozycjach od i do j . Wtedy wartość liczby w kubku będzie równa maksimum z jej początkowej wartości oraz wszystkich ograniczeń dolnych jej dotyczących. Takie ograniczenia dolne będą trzymane osobno dla każdego kubka.

Struktura kubka będzie następująca:

- $t[1..k]$ – tablica kolejnych wyrazów ciągu, które znajdują się w kubku;
- $sorted_t[1..k]$ – posortowana tablica liczb t ;
- $sum_sorted_t[0..k]$ – sumy prefiksowe tablicy $sorted_t[1..k]$, czyli $sum_sorted_t[p] = sorted_t[1] + sorted_t[2] + \dots + sorted_t[p]$;
- $minimum$ – dolne ograniczenie na wszystkie wyrazy ciągu przechowywane w kubku, czyli maksimum z wartości w z operacji $update(i, j, w)$ dotyczących całego przedziału kubka; aktualna wartość l -tej liczby z kubka to zawsze $\max(t[l], minimum)$.

Każdy kubek umożliwia wykonywanie następujących operacji pomocniczych (szczegółowy opis ich implementacji znajduje się w dalszej części artykułu):

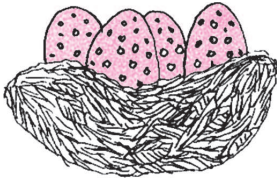
1. $sum_all()$ – obliczenie sumy aktualnych wartości wszystkich wyrazów ciągu zawartych w kubku (działa w czasie $O(\log k)$);
2. $sum(i, j)$ – obliczenie sumy wyrazów o indeksach od i do j , dla $1 \leq i \leq j \leq k$ (działa w czasie $O(k)$);
3. $update_all(new_minimum)$ – aktualizacja dolnego ograniczenia na całym przedziale do wartości co najmniej $new_minimum$ (działa w czasie $O(1)$);
4. $update(i, j, new_minimum)$ – zwiększenie wyrazów o indeksach od i do j , dla $1 \leq i \leq j \leq k$, do wartości co najmniej $new_minimum$ (działa w czasie $O(k \log k)$).

Zauważmy teraz, że dowolny zakres indeksów od i do j ($1 \leq i \leq j \leq n$) można rozbić na pewną liczbę pełnych kubków (oczywiście, nie więcej niż \sqrt{n}) oraz na co najwyżej dwa niepełne kubki (te skrajne).

Dzięki temu zapytanie o sumę liczb na przedziale od i do j można podzielić na nie więcej niż \sqrt{n} zapytań $sum_all()$ oraz co najwyżej dwa zapytania $sum(i', j')$. Stąd każde takie zapytanie obsługujemy w czasie $O(\sqrt{n} \log n)$. Operację modyfikacji ciągu na indeksach od i do j można także wykonać w czasie $O(\sqrt{n} \log n)$, podobnie rozbijając cały przedział na nie więcej niż \sqrt{n} kubków, na których wykonujemy operację $update_all(new_minimum)$, i co najwyżej dwa brzegowe kubki z wykonywaną operacją $update(i', j', new_minimum)$.

Przykład. W tabeli na następnej stronie przedstawiono, jak zmienia się przykładowa kubelkowa struktura danych ($n = 9$) w wyniku pojedynczej modyfikacji. Warto zwrócić uwagę, że w środkowym kubku zmienia się tylko dolne ograniczenie, tj. $minimum$.





	Kubek 1			Kubek 2			Kubek 3					
	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9			
t	4	2	1	7	8	1	1	5	2			
$sorted_t$	1	2	4	1	7	8	1	2	5			
sum_sorted_t	0	1	3	7	0	1	8	16	0	1	3	8
$minimum$	0			0			0					
update(3, 8, 4)												
t	4	2	4	7	8	1	4	5	2			
$sorted_t$	2	4	4	1	7	8	2	4	5			
sum_sorted_t	0	2	6	10	0	1	8	16	0	2	6	11
$minimum$	0			4				0				

Pozostaje opisać, jak korzystając z przechowywanych danych, efektywnie wykonać cztery operacje pomocnicze oferowane przez kubek.

```

function sum_all()
    pos := ostatnia pozycja taka, że sorted_t[pos] < minimum
    return minimum · pos + sum_sorted_t[k] – sum_sorted_t[pos]

```

Ostatnią pozycję pos znajdujemy, wyszukując binarnie. Zauważmy, że w tablicy t jest dokładnie pos liczb mniejszych od $minimum$ oraz dokładnie $k - pos$ liczb nie mniejszych niż $minimum$. Skoro aktualna wartość każdej liczby to $\max(minimum, t[i])$, więc suma aktualnych wartości wynosi $minimum \cdot pos$ (sumujemy pos najmniejszych liczb) plus suma $k - pos$ największych liczb, czyli $sum_sorted_t[k] - sum_sorted_t[pos]$.

```

function sum(i, j)
    result := 0
    for p := i to j do
        result := result + max(minimum, t[p])
    return result

```

W powyższej funkcji sumujemy aktualne wartości wyrazów z kubelka z określonych pozycji.

Aktualizacja dolnego ograniczenia na cały kubek jest bardzo łatwa:

```

function update_all(new_minimum)
    minimum := max(new_minimum, minimum)

```

Jeśli pojawia się nowe dolne ograniczenie, które nie dotyczy całego zakresu obejmowanego przez kubek, lecz jedynie jego części, należy zaktualizować liczby tylko z tego zakresu. Niestety, po takiej operacji tablice $sorted_t$ oraz sum_sorted_t stają się nieaktualne, więc obliczamy je ponownie. Oto zapis stosownego algorytmu:

```

function update(i, j, new_minimum)
    for p := i to j do
        t[p] := max(t[p], new_minimum)
    sorted_t := sort(t[1..k])
    sum_sorted_t[0] := 0
    for p := 1 to k do
        sum_sorted_t[p] := sum_sorted_t[p - 1] + sorted_t[p]

```

Zaprezentowane rozwiązanie jest dosyć szybkie, jednak nie widać powodu, dla którego problemu ($MAX, +$) nie można by rozwiązać jeszcze szybciej. Być może któremuś z Czytelników uda się skonstruować takie rozwiązanie?

Czytelnik, który do końca lipca 2013 roku przyśle do redakcji rozwiązanie opisanego problemu o najlepszej złożoności, nie gorszej jednak niż $O(n + m\sqrt{n})$, zostanie nagrodzony kilogramem szwajcarskiej czekolady w przesyłce prosto z Zurychu. W przypadku wielu rozwiązań o tej samej złożoności nagrodzimy subiektywnie najładniejsze, w przypadku tego samego najładniejszego rozwiązania – pierwsze spośród otrzymanych.

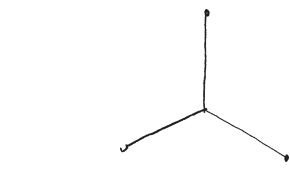




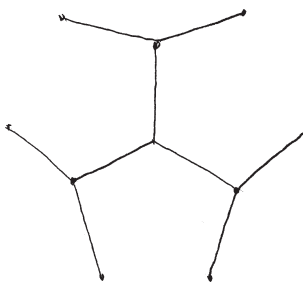
mała delta

Lekcja rysunku (5) – jeszcze raz dwunastościan

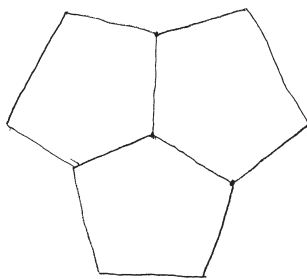
Ostatnio rysowaliśmy dwunastościan foremny i dwudziestościan foremny. Przedstawimy jeszcze jeden sposób rysowania dwunastościanu foremnego. Najpierw narysujemy trzy odcinki mniej więcej równej długości wychodzące z jednego punktu pod kątem około 120 stopni (rys. 1). Dalej wykorzystujemy symetrię figury, a te trzy odcinki są zaczątkiem trzech pięciokątów – ścian rysowanego dwunastościanu. Z końca każdego z odcinków rysujemy po dwa nowe zbliżonej długości, tworzące dalsze boki wspomnianych pięciokątów (rys. 2). Przy rysowaniu warto pamiętać o symetrii, to znacznie ułatwia wykonanie lepszego rysunku. Zamykamy teraz te trzy pięciokąty (rys. 3). Pozostały trzy pary odcinków, które trzeba „domknąć”, żeby otrzymać kolejne trzy pięciokąty. W każdym przypadku robimy to za pomocą trzech odcinków, dwóch krótszych i jednego dłuższego między nimi (rys. 4, 5). Ten dłuższy powinien być równoległy do leżącego naprzeciw. Zresztą te krótsze też powinny mieć swoje równoległe odpowiedniki; znów działa symetria.



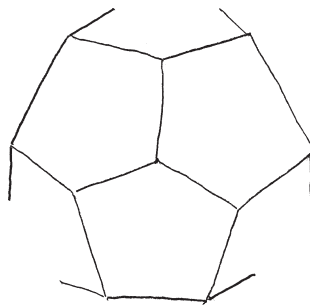
Rys. 1



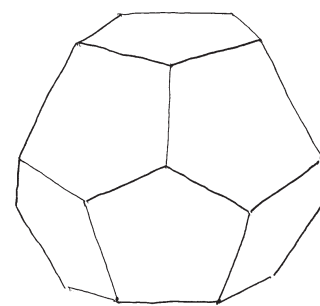
Rys. 2



Rys. 3

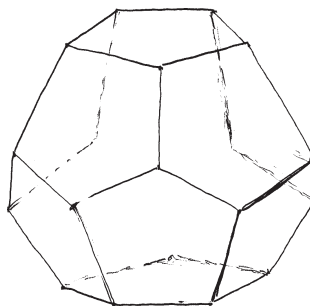


Rys. 4

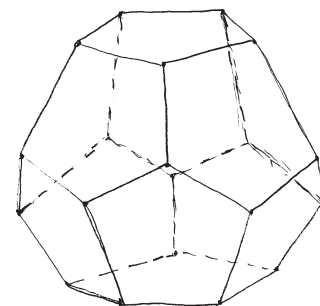


Rys. 5

Tylne, niewidoczne krawędzie rysujemy, odwracając w pewnym sensie wyjściową sytuację, pamiętając, że przeciwległe ściany dwunastościanu powinny być równoległe (rys. 6, 7).



Rys. 6



Rys. 7

pisal i rysował Zdzisław POGODA



mała delta

Nauka pieczenia

Jeffrey spojrział w kierunku piekarnika, gdzie apetycznie brązowało kruche ciasto nadziewane jabłkami. Był pewien, że odkrył naukową metodę umożliwiającą otrzymanie ciasta idealnego: o strukturze cieniutkich płatków, delikatnego, ale chrupkiego.

Klasyczne ciasto kruche przygotowuje się według formuły 3-2-1. Na trzy części objętości mąki przypadają dwie części tłuszczu i jedna część wody. Zazwyczaj dodaje się jeszcze szczyptę soli, a jeśli ciasto ma być słodkie, również kilka łyżeczek cukru.

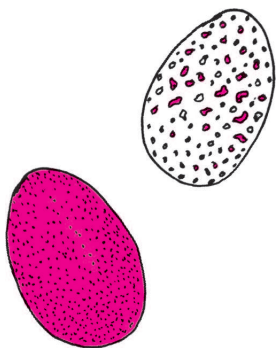
Jeffrey zastanawiał się, czym kierują się ludzie kupujący mrożone ciasto kruche w supermarketach. Ostatecznie przepisu 3-2-1 sknocić się nie da, a oszczędność czasu na mieszaniu składników i rozwałkowywaniu placka wynosi zaledwie od kilku do kilkunastu minut.

Składniki ciasta kruchego nie są bynajmniej jednorodne. Zwykła mąka pszenna składa się przede wszystkim ze skrobi, około 10% jej masy to woda, a od 8 do 15% to białka: głównie glutelina i gliadyna. Jeśli do mąki dodać wody, glutelina i gliadyna łączą się, tworząc gluten. To właśnie długie łańcuchy glutenu nadają apetyczną sprężystość pierogom, ale ich nadmiar całkowicie rujnuje ciasto kruche, które staje się zbyt twarde. Formowanie się glutenu można utrudnić, dodając do ciasta tłuszczu, który „chroni” cząsteczki białek przed wiązaniem się z cząsteczkami wody. Niektórzy zakwaszają ciasto za pomocą octu winnego – ma to na celu osłabienie włókien glutenowych.

Jeffrey przekonał się jednak na własnej skórze, że glutenu nie należy się nadmiernie bać. Kiedyś bardzo dokładnie zmiksował mąkę z tłuszczem, żeby dokładnie zabezpieczyć mąkę przed reagowaniem z wodą. Rezultat? Ciasto wyszło niesmaczne, bez „płatkowej” struktury i nie nadawało się do niczego.

Niemal pół wieku temu w czasopiśmie *Bakers Digest* opisano, skąd się bierze owa „płatkowa” struktura. Okazuje się, że najważniejsze jest, by podczas wyrabiania ciasta dodany do niego tłuszcz składał się zarówno z frakcji stałej, jak i z frakcji płynnej. Ta druga zapobiega powstawaniu nadmiernej ilości glutenu, a ten, który i tak powstanie podczas wyrabiania ciasta, układa się w warstwy rozseparowane frakcją stałą. Kiedy temperatura ciasta przekracza 70 stopni Celsjusza, frakcja stała topi się, pozostawiając rozdzielone płatki ciasta. Dalsze zwiększanie temperatury prowadzi do odparowania wody, co nadaje ciastu pożądaną chrupkość.

Jeffrey, jak większość ludzi z jego pokolenia, dzielił tłuszcze na „dobre” i „złe”. Ten podział na kategorie moralne mógł przebiegać według kilku różnych schematów. „Złe” były kwasy tłuszczowe nasycone i trans, popularnością nie cieszył się też ostatnio smalec, być może z uwagi na jego delikatny, ale charakterystyczny aromat. Jeffrey uważał jednak, że aromat ten doskonale komponuje się z jabłkami. Do łask konsumentów wróciło za to niedawno masło, choć zawiera ono na ogół więcej od smalcu nasyconych kwasów tłuszczowych.



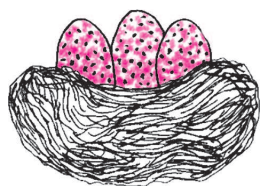
Smalec ma wyższą od masła temperaturę topnienia, nie zawiera też tyle wody, ułatwiającej tworzenie się glutenu. Na dodatek, w niskiej temperaturze cząsteczki kwasów tłuszczowych smalcu tworzą skupiska większe od tych osiągalnych w maśle. Wszystko to sprawia, że smalec jest doskonałym wyborem dla tych, którzy w cieście kruchym cenią jego „płatkową” strukturę.

Jeffrey pamiętał, że jego babcia zawsze siekała ciasto nożem, aby nie ogrzać nadmiernie tłuszczu ciepłem własnych rąk, a po wyrobieniu chłodziła ciasto w lodówce. Sam nigdy nie był przesadnie staranny, jeśli chodzi o temperaturę ciasta, a mimo to jego ostatnie eksperymenty kulinarne prowadziły do nader apetycznych wyników.

Kiedy na świecie szalała druga wojna światowa, artykuł opublikowany w czasopiśmie *Cereal Chemistry* orzekł, że jeśli do kruchego ciasta używać schłodzonego tłuszczu, bardzo ważne jest, ile dodaje się wody i jaka jest jej temperatura. Jednak kiedy tłuszcz ma temperaturę pokojową, czynniki te stają się nieistotne – w rozsądnym zakresie ilości i temperatury wody.

Jeffrey wyjął ciasto z piekarnika. Kuszący zapach wypełnił już całą kuchnię, wędrował do pozostałych części mieszkania. Rozległ się dzwonek do drzwi. To przyszła Marion.

przygotował Krzysztof TURZYŃSKI



Elementy fabuły i zawarte w tekście wiadomości pochodzą z książki J. Steingartena *The Man Who Ate Everything*, Random House, Nowy Jork 1998.

Hipoteza Kakeyi

Marcin KOTOWSKI*, Michał KOTOWSKI*

Wyobraźmy sobie igłę umieszczoną wewnątrz pewnego zbioru na płaszczyźnie. Iglę traktujemy jak odcinek jednostkowy, który możemy dowolnie obracać i przesuwając w obrębie naszego zbioru. Załóżmy, że chcielibyśmy wykonać igłą obrót o 360° – jak wiele miejsc do tego potrzeba?

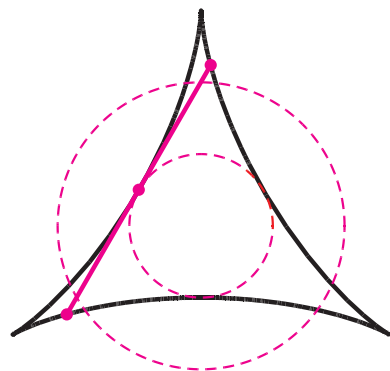
Oczywiście, możemy umieścić igłę na środku koła o promieniu $1/2$ i obrócić ją bez przesuwania, co wymaga pola równego $\frac{\pi}{4}$. Po chwili zastanowienia widać, że rozwiązanie to nie jest optymalne. Umieszczając igłę wewnątrz kształtu utworzonego przez trzy łuki deltoidy, przedstawionego na rysunku, a następnie przesuwając i obracając ją tak, aby w każdej chwili stykała się z brzegiem figury w trzech punktach, możemy wykonać pełny obrót przy polu $\frac{\pi}{8}$. Czy da się jeszcze lepiej?

Pytanie to zadał po raz pierwszy japoński matematyk Soichi Kakeya w 1917 roku. Jak łatwo się przekonać, aby wewnątrz zbioru dało się wykonać pełny obrót igły, musi on zawierać odcinek jednostkowy w każdym kierunku. Własność ta ma sens nie tylko na płaszczyźnie, ale też w przestrzeni dowolnego wymiaru, co motywuje następującą definicję:

Definicja 1. Zbiór $K \subseteq \mathbb{R}^n$ nazwiemy *zbiorem Kakeyi*, jeśli zawiera on odcinek jednostkowy w każdym kierunku.

Zaskakującej odpowiedzi na pytanie Kakeyi udzielił Abraham Besicovitch w 1919 roku. Okazuje się, że istnieją zbiory o dowolnie małym polu, wewnątrz których można obrócić igłę! Co więcej, można nawet skonstruować zbiory Kakeyi o polu równym zero. Konstrukcję, opartą o sprytne sklepanie trójkątów o coraz mniejszych polach, można obejrzeć na stronie <http://www.math.ucla.edu/~tao/java/Besicovitch.html>.

To jednak jeszcze nie koniec. Nawet wśród zbiorów o mierze zero istnieją zbiory „mniejsze” i „większe”. Intuicję z tym związaną formalnie ujmują pojęcie tzw. **wymiaru Minkowskiego**, który (mówiąc bardzo ogólnie) mierzy, jak dobrze zbiór wypełnia przestrzeń. Wymiar ten może być liczbą niecałkowitą.



Formalnie, wymiar Minkowskiego zbioru S określamy jako

$$\dim_M(S) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\varepsilon)}{\log(1/\varepsilon)},$$

gdzie $N(\varepsilon)$ jest minimalną liczbą kostek o boku ε niezbędną do pokrycia zbioru S . Intuicyjnie, zbiór ma wymiar Minkowskiego d , jeśli minimalna liczba kostek o boku ε , niezbędnych do jego pokrycia, skaluje się jak $(1/\varepsilon)^d$. Przykładem zbioru o niecałkowitym wymiarze Minkowskiego jest zbiór Cantora, którego wymiar wynosi $\log_3 2 \approx 0,6309$. Inne, często używane pojęcie wymiaru to tzw. wymiar Hausdorffa.

*Institute for Quantum Computing, Waterloo, Kanada

Przykładami zbiorów o niecałkowitym wymiarze Minkowskiego są zbiory samopodobne (fraktale). Maksymalny możliwy wymiar zbioru $S \subseteq \mathbb{R}^n$ wynosi n .

Możemy teraz wrócić do pytania, jak duży w sensie wymiaru Minkowskiego musi być zbiór Kakeyi.

Hipoteza (Hipoteza Kakeyi). *Jeśli $K \subseteq \mathbb{R}^n$ jest zbiorem Kakeyi w przestrzeni n -wymiarowej, to K ma wymiar Minkowskiego (i wymiar Hausdorffa) równy n .*

Hipotezę tę udało się dotychczas udowodnić jedynie dla $n = 2$. W wyższych wymiarach, pomimo wysiłków wielu matematyków, pozostaje ona problemem otwartym, powiązany z wieloma działami matematyki, między innymi z analizą harmoniczną i równaniami różniczkowymi cząstkowymi.

Skoro nie potrafimy udowodnić hipotezy Kakeyi w \mathbb{R}^n , nasuwa się pytanie, czy istnieje jakaś prostsza wersja lub szczególny przypadek problemu, który łatwiej rozwiązać. Zwróćmy uwagę, że do zdefiniowania zbioru Kakeyi potrzebujemy jedynie abstrakcyjnego pojęcia prostej czy odcinka, natomiast nie jest istotne, że mamy do czynienia z liczbami rzeczywistymi. W szczególności możemy rozważać dyskretny wariant problemu, w którym n -wymiarową przestrzeń euklidesową zastępujemy przestrzenią nad ciałem skończonym.

Niech \mathbb{F}_q będzie ciałem o q elementach. Przez \mathbb{F}_q^n będziemy oznaczać zbiór wektorów (a_1, \dots, a_n) , gdzie $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{F}_q$, z naturalną operacją dodawania po współrzędnych. Zamiast przestrzeni euklidesowej \mathbb{R}^n rozważamy więc skończoną przestrzeń \mathbb{F}_q^n o q^n elementach. Prostą w kierunku v przechodzącą przez punkt a , gdzie $v, a \in \mathbb{F}_q^n$, nazwiemy, podobnie jak w przypadku euklidesowym, zbiór postaci $\{a + tv : t \in \mathbb{F}_q\}$. Każda taka prosta zawiera q punktów.

Ponieważ nasza przestrzeń jest teraz skończona, bardziej naturalne w definicji zbioru Kakeyi będzie zastąpienie odcinków prostymi.

Definicja 2. Zbiór $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ nazwiemy *zbiorem Kakeyi*, jeśli zawiera on prostą w kierunku każdego wektora z \mathbb{F}_q^n .

Aby sformułować hipotezę Kakeyi dla ciał skończonych, potrzebujemy jeszcze dyskretnego odpowiednika wymiaru. W przestrzeni \mathbb{F}_q^n naturalnym odpowiednikiem zbioru wymiaru d będzie zbiór mocy rzędu q^d . Prowadzi to do następującej hipotezy.

Twierdzenie (Hipoteza Kakeyi dla ciał skończonych). *Niech \mathbb{F}_q będzie ciałem skończonym o q elementach. Dla każdego $n \geq 1$ istnieje taka stała $c_n > 0$, niezależna od q , że jeśli $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ jest zbiorem Kakeyi, to*

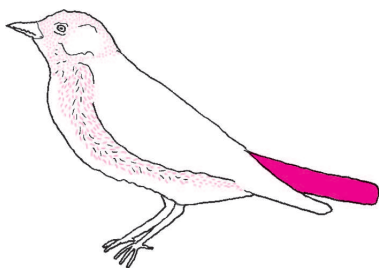
$$|K| \geq c_n q^n.$$

Problem ma teraz bardziej kombinatoryczny charakter niż w przypadku euklidesowym, co nie znaczy, że musi być łatwiejszy do rozwiązania. Hipotezę Kakeyi dla ciał skończonych postawiono w 1999 roku. Przez dziesięć lat, pomimo prób wielu matematyków, w tym medalistów Fieldsa, nie udało się jednak jej udowodnić.

W związku z tym wielkim zaskoczeniem okazał się przedstawiony przez Zeeva Dvira w 2009 roku piękny i prosty dowód hipotezy Kakeyi dla ciał skończonych. Dowód, z pewnością zasługujący na miano Dowodu z Księgi, korzysta z tzw. *metody wielomianowej*, stosowanej już wcześniej w kombinatoryce, a przy tym jest tak elementarny, że daje się zrozumieć z wykorzystaniem podstawowej wiedzy licealnej!

W dowodzie kluczową rolę grają wielomiany nad ciałami skończonymi. Niech f będzie wielomianem n zmiennych x_1, \dots, x_n o współczynnikach z \mathbb{F}_q . Powiemy, że f ma miejsce zerowe w punkcie $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}_q^n$, jeśli $f(x_1, \dots, x_n) = 0$. Stopniem jednomianu postaci $x_1^{a_1} \dots x_n^{a_n}$ nazywamy sumę wykładników: $a_1 + \dots + a_n$, a stopniem wielomianu – największy stopień jednomianu wchodzącego w skład f .

Przed przystąpieniem do dowodu hipotezy przedstawiamy dwa lematy, których dowód jest ćwiczeniem dla Czytelnika. Nad ciałem nieskończonym (np. \mathbb{R}) wielomian



Ciało to struktura algebraiczna, w której można wykonywać zwyczajne działania dodawania i mnożenia oraz dzielić przez elementy różne od zera. Przykładem ciała o skończonej liczbie elementów jest \mathbb{Z}_p , zbiór liczb od 0 do $p - 1$ z działaniami dodawania i mnożenia modulo p .



Rozwiązanie zadania M 1383.

Z nierówności trójkąta mamy

$$|b - c| + |a + b + c| \geq |a + 2b|.$$

Pozbyliśmy się tym samym zmiennej c i wystarczy teraz udowodnić, że

$$|a - b| + |a + 2b| \geq |a| + |b|.$$

W tym celu zamieniamy zmienne:

$u = a - b$, $v = a + 2b$, tzn. $b = v - u/3$,
 $a = 2u + v/3$. Otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} |a| + |b| &= \left| \frac{2u + v}{3} \right| + \left| \frac{v - u}{3} \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{3}|u| + \frac{1}{3}|v| + \frac{1}{3}|v| + \frac{1}{3}|u| = \\ &= |u| + \frac{2}{3}|v| \leq \\ &\leq |u| + |v| = |a - b| + |a + 2b|. \end{aligned}$$

zerujący się w każdym punkcie ciała musi być tożsamościowo równy zeru (mieć wszystkie współczynniki zerowe). Zauważmy, że nie jest to prawda nad ciałami skończonymi – dla dowolnego ciała skończonego \mathbb{F}_q wielomian $f(x) = \prod_{a \in \mathbb{F}_q} (x - a)$ jest wielomianem stopnia q , który zeruje się w każdym punkcie \mathbb{F}_q , a nie jest tożsamościowo równy zeru. Każdy wielomian o tej własności musi mieć jednak odpowiednio wysoki stopień, o czym mówi następujący lemat.

Lemat 1 (Lemat Schwartz–Zippela). Niech f będzie wielomianem n zmiennych x_1, \dots, x_n o współczynnikach z \mathbb{F}_q . Niech f ma stopień $d > 0$. Wtedy liczba miejsc zerowych f wynosi co najwyżej $d \cdot q^{n-1}$.

Dowód przebiega przez indukcję względem n . Dla $n = 1$ jest to po prostu stwierdzenie, że wielomian jednej zmiennej, mający stopień d , ma co najwyżej d miejsc zerowych. W szczególności, jeśli wielomian f ma stopień nie większy niż $q - 1$ i zeruje się w każdym punkcie $x \in \mathbb{F}_q^n$, to musi być tożsamościowo równy zeru.

Lemat 2. Niech $K \subseteq \mathbb{F}_q^n$ będzie zbiorem mocy mniejszej niż $\binom{n+d}{n}$. Wtedy istnieje wielomian f w zmiennych x_1, \dots, x_n stopnia co najwyżej d , który zeruje się we wszystkich punktach K i nie jest tożsamościowo równy zeru.

W dowodzie kluczowa jest obserwacja, że jednomianów w zmiennych x_1, \dots, x_n stopnia co najwyżej d jest dokładnie $\binom{n+d}{n}$, wobec czego układ równań na współczynniki wielomianu f o zadanych właściwościach ma niezerowe rozwiązania.

Mając w ręku powyższe lematy, możemy przystąpić do dowodu hipotezy Kakeyi. Przypuśćmy, że istnieje zbiór Kakeyi K o mniej niż $\binom{n+q-1}{n}$ elementach. Z Lematu 2 wnioskujemy, że istnieje nietrywialny wielomian f stopnia co najwyżej $q - 1$, zerujący się w każdym punkcie K . Zbiór K jest zbiorem Kakeyi, więc dla dowolnego niezerowego wektora $x \in \mathbb{F}_q^n$ zawiera on prostą w kierunku x , czyli zbiór postaci $\{y + tx : t \in \mathbb{F}_q\}$ dla pewnego $y \in \mathbb{F}_q^n$. Rozpatrzmy teraz obcięcie wielomianu f do prostej w kierunku x , a więc wielomian jednej zmiennej h_x określony jako

$$h_x(t) = f(y + tx).$$

Dla każdego $t \in \mathbb{F}_q$ mamy $y + tx \in K$, więc h_x zeruje się punkcie t . Oznacza to, że h_x zeruje się w każdym punkcie ciała \mathbb{F}_q , a ponieważ (tak jak f) ma stopień co najwyżej $q - 1$, więc musi być tożsamościowo równy zeru. Zatem dla każdego $x \in \mathbb{F}_q^n$ mamy $h_x \equiv 0$.

Oznaczmy stopień f przez d i rozpiszmy f na części jednorodne, czyli

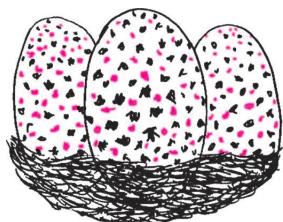
$$f = \sum_{i=0}^d f_i,$$

gdzie f_i jest wielomianem złożonym z jednomianów stopnia dokładnie i . Nietrudno sprawdzić, że dla dowolnego $x \in \mathbb{F}_q^n$ wyraz wiodący wielomianu $h_x(t) = f(y + tx)$, a więc współczynnik przy t^d , wynosi $f_d(x)$. Skoro h_x jest równy tożsamościowo zeru, to ma wszystkie współczynniki równe zeru, a więc dla każdego $x \in \mathbb{F}_q^n$ zachodzi $f_d(x) = 0$. Jednak f_d ma stopień $d \leq q - 1$, więc gdyby nie był tożsamościowo równy zeru, to na mocy lematu Schwartz–Zippela mógłby mieć co najwyżej $d \cdot q^{n-1} < q^n - q$ miejsc zerowych. Stąd wniosek, że $f_d \equiv 0$. Założyliśmy jednak, że wielomian f ma stopień d , czyli w szczególności f_d nie jest tożsamościowo równy zeru – otrzymujemy więc sprzeczność.

Wywnioskowaliśmy zatem, że dowolny zbiór Kakeyi K musi mieć moc $|K| \geq \binom{n+q-1}{n}$, co z dokładnością do wyrazów niższego rzędu w q wynosi $\approx \frac{1}{n!} q^n$. Udowodniliśmy więc hipotezę Kakeyi ze stałą $c_n \approx \frac{1}{n!}$.

Stosując bardziej wyrafinowany wariant metody wielomianowej – tzw. metodę krotności – można udowodnić hipotezę Kakeyi z asymptotycznie lepszą stałą $c_n \approx \frac{1}{4^n}$. Z drugiej strony, znane są konstrukcje zbiorów Kakeyi rozmiaru bliskiego $\frac{1}{2^{n-1}} q^n$ dla dostatecznie dużego q .

Czytelnikowi zainteresowanemu tym zagadnieniem, a w szczególności innymi zastosowaniami metody wielomianowej, polecamy materiały ze strony <http://warsztatywww.wikidot.com/www8:kody-ciala-igly> przygotowane przez autorów artykułu.



Rozwiązanie zadania F 829.

Oznaczmy przez ν stosunek długości wiszącej części liny do całkowitej długości liny. Niech N będzie naprężeniem liny tam, gdzie zaczyna się jej wisząca część. Warunek równowagi dla wiszącej części to $\nu mg = 2N \sin \alpha$. Z kolei siła tarcia statycznego jednej z dwóch leżących części liny T nie może przekroczyć nacisku tej części liny na zbocze; nacisk ten jest równy $(1 - \nu)mg \cos \alpha/2$. Ta siła tarcia musi zrównoważyć dwie siły: składową siły grawitacji wzdłuż zbocza $(1 - \nu)mg \sin \alpha/2$ działającą na leżącą część liny oraz naprężenie liny N . Podstawiając wartości funkcji trygonometrycznych, otrzymujemy maksymalną wartość ν równą $3 - 2\sqrt{2} \approx 0,17$. Co ciekawe, jest to maksymalna część długości liny, jaka może wisieć w powietrzu dla dowolnego kąta α .

Parzyste, nieparzyste

Jakub RADOSZEWSKI

Zadanie pojawiło się na Akademickich Mistrzostwach Polski w Programowaniu Zespołowym w 2012 roku.

Zadanie. Powiemy, że ciąg liczb naturalnych jest k -parzysty, jeśli każdy jego k -elementowy spójny fragment ma parzystą sumę. Przykładowo, ciąg:

$$A = (4, 3, 4, 2, 1, 2, 5, 2, 6, 1, 4, 1, 2, 4)$$

jest 5-parzysty, a ciąg:

$$B = (5, 2, 4, 4, 1, 6, 3, 2, 3, 5, 6, 7, 4, 1)$$

nie. Ile minimalnie wyrazów ciągu B trzeba zmienić, aby stał się on 5-parzysty?

Następujące podejście jest bardzo naturalne. Suma pierwszych pięciu wyrazów ciągu B jest równa 16, jest więc parzysta – nic nie trzeba zmieniać. Suma wyrazów od drugiego do szóstego jest równa 17 – to źle. Aby suma ta stała się parzysta, wystarczy szósty wyraz ciągu zamienić na jakikolwiek nieparzysty, np. na 1:

$$B' = (5, 2, 4, 4, 1, 1, 3, 2, 3, 5, 6, 7, 4, 1).$$

Teraz suma pięciu rozważanych wyrazów jest równa 12 – możemy iść dalej. Kolejny wyraz ciągu jest równy 3, a suma pięciu wyrazów kończących się na tym wyrazie to 13. Wystarczy zatem na siódmej pozycji ciągu wstawić jakąkolwiek liczbę parzystą, np. 2. Nowy ciąg ma postać:

$$B'' = (5, 2, 4, 4, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 6, 7, 4, 1).$$

Kontynuując to podejście, zmienimy jeszcze wyrazy 3, 6, 7 i 1. Niestety, wykonaliśmy w sumie sześć zamian, a da się lepiej.

Spróbujmy podejść do zadania bardziej metodycznie. Przede wszystkim zauważmy, że znaczenie ma jedynie parzystość wyrazów ciągu. Wystarczy więc, zamiast B , rozważać ciąg:

$$C = (1, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 1, 0, 1, 0, 1).$$

Oznaczmy przez W binarny ciąg wynikowy (powstały z C poprzez minimalną liczbę zamian).

Dla dowolnego i , sumy $W_i + W_{i+1} + W_{i+2} + W_{i+3} + W_{i+4}$ oraz $W_{i+1} + W_{i+2} + W_{i+3} + W_{i+4} + W_{i+5}$ muszą mieć tę samą parzystość. Stąd $W_i = W_{i+5}$. Widzimy zatem, że ciąg W rozpada się na 5 podciągów stałych: $W_1 = W_6 = W_{11}$, $W_2 = W_7 = W_{12}$ itd.

Zapiszmy ciąg C tak, aby wyrazy o indeksach różniących się o 5 znajdowały się jeden pod drugim:

1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	1	

Wyrazy położone w tych samych kolumnach muszą stać się równe w ciągu W . Aby wykonać jak najmniej zamian, w pierwszej kolumnie ustawimy same zera, w drugiej – same jedynki, w trzeciej – zera, w czwartej i piątej – jedynki. Razem wyszły nam trzy zamiany. Jakże to proste!

Otóż... nie do końca. Zapiszmy nasz wynikowy ciąg:

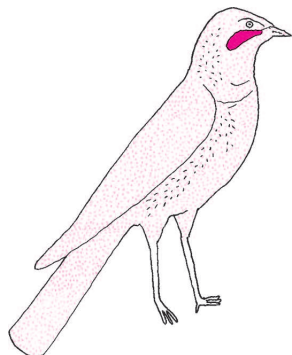
0	1	0	1	1
0	1	0	1	1
0	1	0	1	

Widzimy, że sumy wszystkich pięcioelementowych fragmentów ciągu są równe, ale – nieparzyste! No tak – widać, gdzie popełniliśmy błąd. Aby wszystkie sumy stały się parzyste, należałoby jedną z kolumn zmienić na odwrot. Najbardziej opłaca się wybrać kolumnę, która w tym układzie wymaga najmniej zamian: ustawiamy jedynki w pierwszej kolumnie (względnie zera w drugiej lub w czwartej). Ostatecznie wykonaliśmy cztery zamiany. Oto uzyskany przez nas ciąg wynikowy:

$$W = (1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1)$$

oraz ciąg B po minimalnej liczbie zamian:

$$B_W = (5, 1, 4, 1, 1, 1, 3, 2, 3, 5, 1, 7, 4, 1).$$



Rozwiązanie zadania F 830.

Siła działająca na dziewczę trzymające się liny jest w każdej chwili prostopadła do kierunku ruchu dziewczęcia, nie wykonuje więc nad dziewczęciem żadnej pracy. Prędkość dziewczęcia zderzającego się ze słupem będzie więc równa jego prędkości początkowej.

Informatyczny kącik olimpijski (61): Czworokąty wypukłe

W tym kąciku zajmiemy się zadaniem *Quadrilaterals* z obozu w Petrozawodsku w 2006 roku. Na płaszczyźnie dane jest n punktów w położeniu ogólnym (tzn. żadna trójka punktów nie leży na jednej prostej). Należy wyznaczyć liczbę czworokątów wypukłych, których wierzchołki znajdują się wśród podanych punktów.

Aby sprawdzić, czy punkty p_0, p_1, p_2, p_3 mogą być kolejnymi wierzchołkami czworokąta wypukłego w porządku przeciwnym do kierunku ruchu wskazówek zegara, wystarczy zbadać, czy każda trójka kolejnych punktów tworzy zakręt w lewo. W tym celu można zbadać znak iloczynu wektorowego:

$$(p_i - p_{(i-1) \bmod 4}) \times (p_{(i+1) \bmod 4} - p_i) > 0.$$

Sprawdzając wszystkie możliwe czwórki uporządkowane, liczbę „dobrych czwórek” możemy wyznaczyć w czasie $O(n^4)$. Liczbę czworokątów wypukłych uzyskamy, dzieląc liczbę „dobrych czwórek” przez 4 (bierzemy poprawkę na obroty cykliczne).

Aby otrzymać szybsze rozwiązanie, skorzystamy z pewnego pomyslowego triku. Rozważmy dowolną nieuporządkowaną czwórkę punktów (w położeniu ogólnym) i zastanówmy się, jakie czworokąty można na niej zbudować. W zależności od wzajemnego ustawienia punktów mamy dwa przypadki (patrz rys. 1): albo wszystkie punkty leżą na brzegu otoczki wypukłej (przypadek A), albo trzy punkty leżą na brzegu otoczki wypukłej, a czwarty punkt w środku (przypadek B). Łatwo przekonać się, że w pierwszym przypadku czwórka punktów wyznacza jeden czworokąt wypukły, natomiast w drugim przypadku dostajemy trzy różne czworokąty wklęsłe.

Powiemy, że para punktów $\{p_1, p_2\}$ tworzy *przecięcie* z parą punktów $\{q_1, q_2\}$, jeśli punkty q_1, q_2 leżą po różnych stronach prostej wyznaczonej przez punkty p_1, p_2 . Zauważmy, że czwórka punktów z przypadku A generuje nam dwa przecięcia (gdy za punkty p_1, p_2 weźmiemy przeciwległe wierzchołki czworokąta wypukłego), natomiast w przypadku B są to trzy przecięcia (gdy jeden z punktów p_1, p_2 leży w środku otoczki wypukłej). Niech P będzie liczbą wszystkich przecięć w zadanym zbiorze n punktów, natomiast a i b będą liczbą czwórek punktów tworzących układy odpowiednio typu A i typu B. Możemy napisać następujący układ równań:

$$\begin{cases} \binom{n}{4} = a + b \\ P = 2a + 3b \end{cases}$$

Rozwiązując ten układ, dostajemy, że liczba czworokątów wypukłych to $a = 3\binom{n}{4} - P$ (przy okazji: liczba wszystkich czworokątów to $a + 3b = 2P - 3\binom{n}{4}$).

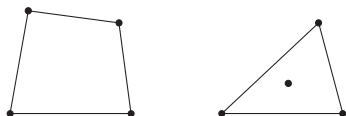
Pozostaje pokazać, jak wyznaczyć liczbę P . Jeśli dla ustalonej pary punktów $\{p_1, p_2\}$ dokładnie x punktów leży po jednej stronie prostej p_1p_2 i y punktów leży po drugiej stronie tej prostej, to mamy $x \cdot y$ przecięć zawierających parę $\{p_1, p_2\}$. Rozważając każdą taką parę $\{p_1, p_2\}$ osobno, uzyskujemy czas $O(n^3)$.

Szybciej wyznaczmy P , korzystając z metody zmiatania. Ustalmy punkt p_1 i przesunmy punkty na płaszczyźnie tak, żeby środek układu współrzędnych znalazł się w p_1 . Dla każdego innego punktu q wyznaczmy kąt $\alpha(q) \in [0, 2\pi)$, jaki tworzy *półprosta* p_1q z osią OX . Niech q_1, \dots, q_{n-1} będzie listą tych punktów posortowaną rosnąco względem kątów $\alpha(q) \bmod \pi$, czyli względem kątów, jakie tworzy *prosta* p_1q z osią OX . Na początku przyjmujemy $p_2 = q_1$ i wyznaczamy liczby x i y punktów, które leżą powyżej i poniżej prostej p_1p_2 (tj. odpowiednio na lewo i na prawo od wektora $\overrightarrow{p_1p_2}$). W każdym kolejnym kroku $i = 1, \dots, n-2$ zmieniamy punkt p_2 na q_{i+1} i uaktualniamy x i y (patrz rys. 2):

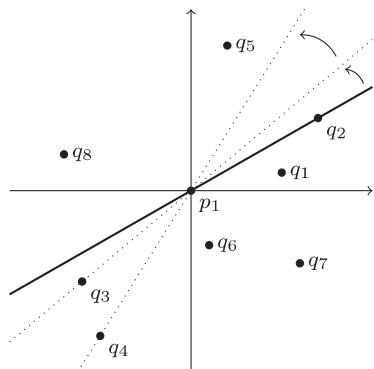
if $\alpha(q_i) < \pi$ **then** $y := y + 1$ **else** $x := x + 1$;
if $\alpha(q_{i+1}) < \pi$ **then** $x := x - 1$ **else** $y := y - 1$;

Ponieważ dla ustalonego punktu p_1 sortowanie zajmie czas $O(n \log n)$, a przejście – czas $O(n)$, więc cały algorytm wykona się w czasie $O(n^2 \log n)$. Uzyskany wynik (sumę iloczynów $x \cdot y$) musimy podzielić przez 2, gdyż interesują nas nieuporządkowane pary punktów $\{p_1, p_2\}$.

Formalnie iloczyn wektorowy jest zdefiniowany w przestrzeni trójwymiarowej; w zadaniach z geometrii w dwóch wymiarach zwykle określa się go dla wektorów $v_1 = [x_1, y_1]$, $v_2 = [x_2, y_2]$ jako liczbę $x_1y_2 - x_2y_1$.



Rys. 1. Dwa przypadki położenia nieuporządkowanej czwórki punktów: A (po lewej) i B (po prawej).



Rys. 2. Przejście prostej ze stanu $(i, x, y) = (2, 2, 5)$ do stanu $(3, 2, 5)$, a następnie do $(4, 3, 4)$.

Tomasz IDZIASZEK

Rozmiar liści (jak) wysokich drzew



Rosnący na Tasmanii najwyższy znany żyjący przedstawiciel gatunku *Eucalyptus regnans* o wysokości około 100 metrów.

www.humboldt.edu/redwoods

Poniżej, gałązka z liśćmi, kwiatami oraz zawiązkami owoców tego samego gatunku.



Wielkość rozwiniętych liści drzew okrytonasiennych (okrytozalążkowych), czyli owocujących drzew liściastych (przykładem liściastego drzewa nagonasiennego jest miłorząb), jest bardzo zróżnicowana, od kilku milimetrów do ponad metra. Zróżnicowanie to jednak istotnie zmniejsza się dla gatunków osiagających największą wysokość, dla których wielkość liści zawiera się między 10 a 20 centymetrów.

Dlaczego liście najwyższych drzew nie są ani mniejsze, ani większe niż kilkanaście centymetrów i dlaczego drzewa liściaste nie rosną większe niż około 100 metrów, a największe z nich rosną tylko w lasach tropikalnych?

Autorzy pracy [1] argumentują, że wiąże się to z ograniczeniami wynikającymi z mikrohydrodynamiki, której prawom podlega transport życiodajnej energii w postaci cukrów wytwarzanych w liściach w procesie fotosyntezy.

Transport odbywa się w żywej tkance, zwanej łykiem, poprzez rurki sitowe (u okrytonasiennych) – wyspecjalizowane wydłużone komórki (których promień okazuje się być ograniczony do około 20 mikronów). Transport ten można rozpatrywać analogicznie do obwodu elektrycznego.

Odpowiednikiem napięcia jest ciśnienie osmotyczne związane z różnicą stężeń (głównie cukrów) w liściach i w zwykłej wodzie, które jest zbliżone u różnych gatunków. Natomiast oporem są, po pierwsze, półprzepuszczalne błony w źródle i w odbiorniku, czyli w liściach i w tkankach, które mają być odżywione, a po drugie – opór w pniu.

Opory związane z pokonywaniem błon są odwrotnie proporcjonalne do powierzchni tych błon, które są proporcjonalne do długości liścia oraz długości pnia. Wynika stąd, że opór związany z odbiorem można pominąć.

Natomiast opór pnia jest proporcjonalny do jego długości (tak jak opór omowy linii przesyłowej).

Skuteczność przesyłania cukrów jest odwrotnie proporcjonalna do oporu, więc drzewo zbyt wysokie być nie może (ze względu na opór przesyłania w pniu), a największe wysokości (im wyżej, tym więcej światła, a więc potencjalnie efektywniejsza fotosynteza) osiąga tylko tam, gdzie warunki są idealne.

Z kolei zbyt małe liście nie generują wystarczającego początkowego strumienia soków, który rośnie z rozmiarem liścia, jak rzeka rośnie wraz z jej dorzeczem.

Natomiast zbyt duże liście przestają przyspieszać transport w najwyższych drzewach, bo dominuje tam opór pnia. W takim razie drzewo „nie opłaca się” ponosić wysokich kosztów ich tworzenia i utrzymania.

W ten sposób podobna wielkość liści i maksymalna wysokość drzew liściastych znajduje nowe, oparte o prawa fizyki, wyjaśnienie [1].

Wielkości te osiagają optymalne wartości ze względu na skuteczność dystrybucji substancji odżywczych.

Piotr ZALEWSKI

[1] Kaare H. Jensen, Maciej A. Zwieniecki, *Physical limits to leaf size in tall trees*, *Phys. Rev. Lett.* **110**(2013)018104.

Największy współczesny GMO

Jeżeli przejrzeć daty, kiedy oznaczono pełne genomy różnych organizmów, to widać wyraźne opóźnienie takich badań roślin w stosunku do bakterii i zwierząt.

Rośliny bardzo wcześnie (zapewne ponad 1,5 miliarda lat temu) oddzieliły się od „wspólnego pnia” ewolucyjnego, a wspólnym przodkiem roślin i np. ludzi był zapewne organizm jednokomórkowy, mający jądro, a w nim materiał genetyczny (eukariont). O roślinach wiadomo, że mają bardzo duże i złożone genomy, dlatego też genetycy, w celu urealnienia badań, długo szukali gatunku rośliny z „małym” genomem. Wybór padł na rzodkiewnika, *Arabidopsis thaliana*. To niepozorny kwiatowy chwast, dostosowany do średnich warunków klimatycznych, o krótkim czasie generacji, łatwy w rozmnażaniu (rośnie nawet na trawniku mojego Instytutu), na który twórca zielnika nie zwróciłby szczególnej uwagi.

Dla genetyków okazał się bezcenny, ponieważ liczba elementów jego genomu wynosi 125 milionów; tworzą one 25 500 genów, co pod względem wielkości można porównywać z genomami muszki *D. melanogaster* i nicienia *C. elegans*. Zresztą podobną liczbę genów mają ssaki, ale ich genomy składają się z około 3 mld elementów. Najdłuższy zbadany genom roślinny należy do rośliny ozdobnej *Paris japonica* i składa się ze 150 mld elementów. Zatem nie długość i nie liczba genów określają pozycję ewolucyjną organizmu.

Genomem rzodkiewnika zajęła się w 1996 roku duża międzynarodowa grupa badaczy, projekt zakończono 4 lata później. Był to wstęp do poznawania genomów ziemniaka, ryżu, soi, jęczmienia, kukurydzy, pszenicy. Jak widać, sprawa jest poważna, wiąże się z wyżywieniem całego świata. Ostatnie wyniki dotyczą genomu pszenicy. Pszenica jest jednym z najważniejszych surowców spożywczych, na świecie produkuje się jej 680 milionów ton, stanowi 1/5 poboru kalorii w pożywieniu ludzi. Co roku zdarzają się na świecie klęski hodowców zbóż związane ze zmianami klimatu lub wzrostem liczby pasożytów pszenicy (wirusy, grzyby, owady). Dziś hodowcom pszenicy dokuczają głównie dewastujące pola choroby, np. rdza traw oraz brak odporności na suszę.

Już sama wiedza wstępna o tym genomie zapowiadała trudne wyzwanie naukowe. Uważa się, że genom pszenicy zwyczajnej (wypiek chleba) powstał w wyniku międzyrodzajowej hybrydyzacji trzech genomów trzech różnych gatunków z rodziny traw, istniejących obecnie w jądrze pszenicy osobno, w dodatku każdy w podwojonej wersji (w genomie kukurydzy, na przykład, wymieszały się genomy dwu trawiastych przodków). Drugim interesującym badaczy gatunkiem komercyjnym jest pszenica twarda (wyrób makaronu), hybryda dwu genomów z rodziny innych traw. Hybrydę pszenicy twardej i żyta jest wyhodowane i uprawiane w Polsce pszenżyto.

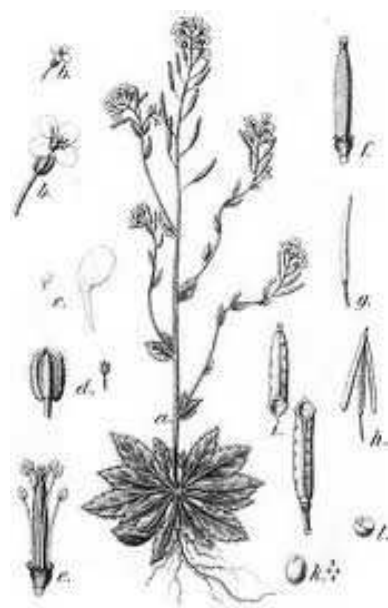
Po oznaczeniu genomu pszenicy zwyczajnej (2010 r.) w laboratoriach W. Brytanii, Niemiec i USA zaproponowano w listopadzie 2012 r. komentarz o lokalizacji wielu genów i ich relacji do złożonych cech agronomicznych. Wstępna wiedza o genomie, jak w innych projektach genomicznych, jest propozycją „szkicu” genomu: identyfikacji większości genów i prób ich lokalizacji w chromosomach. Takie wyniki pozwalają już na wyciąganie wielu wniosków, ale też stymulują do dalszej pracy. W przypadku pszenicy zostały nieodpłatnie udostępnione światu, stanowi to zachętę także dla hodowców zbóż do współpracy z naukowcami.

Genom pszenicy zwyczajnej składa się z około 16 miliardów elementów (5 razy dłuższy niż genom człowieka) i 96 000 genów. Nadal nie ma pełnej odpowiedzi na pytanie, który gen należy do którego trawiastego przodka. W cyklach hodowlanych zmierzających do uzyskania coraz lepszych odmian niektóre cechy zaczęły dominować, a niektóre eliminowano. Badania genomu świadczą o tym, że hodowcy wzmocnili geny nadające trwałość przy przechowywaniu oraz geny związane z przemianami energii.

Wiedza o pełnym zapisie genetycznym pszenicy pomoże w modyfikacji istniejących odmian w kierunku poprawy ich właściwości agrarnych, a także w identyfikacji genów nadających korzystne cechy dzikim, a spokrewnionym gatunkom traw.

Naprawdę napracowali się nasi praojcowie, hodowcy roślin, kreując lub selekcyjując ten złożony GMO.

Magdalena FIKUS



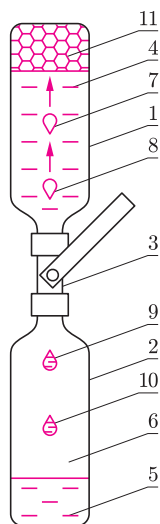
Rzodkiewnik



Pszenica

Nie tylko lśniące włosy *Stanisław BEDNAREK*

Materiały i przyrządy: dwie butelki połączone zaworem kulowym (zob. *Delta* nr 11/2012), około 1–1,5 l gęstego szamponu do włosów, linijka, kątomierz, stoper lub zegarek z sekundnikiem, kalkultrowe naczynie z ciepłą wodą, pisak wodoodporny oraz termometr ze skalą od zera do kilkudziesięciu °C.



Rys. 1. Budowa przyrządu i obserwowane w nim efekty; 1, 2 – przezroczyste plastikowe butelki, 3 – zawór kulowy, 4, 5 – szampon, 6 – powietrze, 7, 8 – pęcherzyki powietrza, 9, 10 – krople szamponu, 11 – piana.

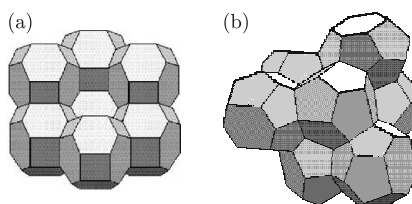
Prosty przyrząd zbudowany z dwóch przezroczystych, plastikowych butelek połączonych zaworkiem kulowym, którego używaliśmy do wytwarzania i likwidacji tornada opisywanego w poprzednich kącikach, świetnie nadaje się do przeprowadzenia jeszcze kilku interesujących doświadczeń. Górną butelkę należy całkowicie napełnić szamponem (rys. 1) i bardzo powoli otwierać zawór. W szyjce górnej butelki, tuż nad zaworem, utworzy się pęcherzyk powietrza i będzie się powoli poruszał pionowo w górę (fot. 1), a jednocześnie do dolnej butelki kapnie porcja szamponu. Zmieniając otwarcie zaworu, możemy zbadać, jak wpływa to na rozmiary pęcherzyków, odstęp czasu między ich pojawianiem się oraz ich prędkość, pamiętając, że wielkości te zależą także od rodzaju użytego szamponu, średnicy zastosowanego zaworu i temperatury szamponu. Warto zbadać dokładniej te zależności. Rozmiary pęcherzyka możemy z dobrym przybliżeniem określić przez odczytanie ich na skali linijki przyłożonej do ścianki górnej butelki.

Ruch pęcherzyków możemy zbadać ilościowo. W celu wyznaczenia ich prędkości na bocznej powierzchni górnej butelki odmierzymy i rysujemy wodoodpornym pisakiem odcinek o długości około 20 cm, usytuowany pionowo i zaczynający się nieco nad szyjką butelki. Odcinek ten będzie drogą pokonywaną przez pęcherzyk. Ustawiamy niewielki stopień otwarcia zaworu, żeby wytworzyć pęcherzyk powietrza o rozmiarach kilku milimetrów, i mierzymy czas ruchu pęcherzyka wzdłuż tej drogi, po czym obliczamy prędkość.

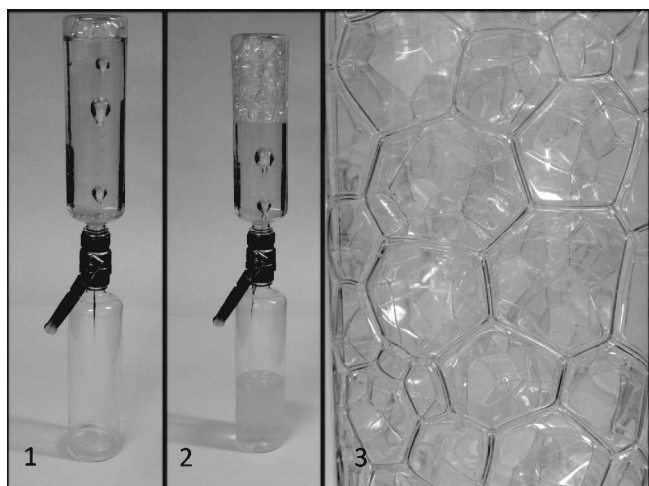
Analizując obserwowany efekt od strony teoretycznej, łatwo zauważyć, że na poruszający się pęcherzyk działają dwie główne siły skierowane pionowo. Są to: siła wyporu szamponu F_w , zwrócona do góry, i siła oporu lepkiego F_o , zwrócona w dół. W stanie ustalonym wypadkowa tych sił równa się zeru i pęcherzyk jest w ruchu jednostajnym i prostoliniowym. Siła wyporu jest wprost proporcjonalna do objętości pęcherzyka, a więc do trzeciej potęgi jego promienia, a siła oporu lepkiego wzrasta liniowo wraz z promieniem. Wyjaśnia to, dlaczego większe pęcherzyki osiągają większe prędkości. Dla ścisłości należy dodać, że zaraz po utworzeniu pęcherzyka jego prędkość wzrasta wykładniczo do ustalonej wartości granicznej ruchu jednostajnego, którą wyznaczaliśmy. Przeprowadzone doświadczenia pozwalają także zauważyć, że prędkość ruchu pęcherzyków wzrasta wraz ze wzrostem temperatury szamponu, gdyż współczynnik lepkości, decydujący o wartości siły oporu, maleje wykładniczo ze wzrostem temperatury.

Po kilkunastokrotnym przeprowadzeniu opisanych doświadczeń nad powierzchnią szamponu pojawi się okazała piana (fot. 2). Jest ona zbudowana z zamkniętych komórek, rozdzielonych cienkimi warstewkami szamponu, ograniczonymi z dwóch stron błoną powierzchniową. W idealnym przypadku komórki te powinny mieć strukturę zapewniającą minimalizowanie energii swobodnej. Jest ona związana przede wszystkim z napięciem powierzchniowym, a zatem komórki piany powinny być wypełniającymi przestrzeń wielościanami o najmniejszym polu przy ustalonej objętości. W rzeczywistości jednak zdarzają się odstępstwa od tej regularnej struktury, spowodowane m.in. przypadkowymi zaburzeniami podczas wychodzenia pęcherzyków powietrza ponad górną powierzchnię szamponu czy łączeniem się sąsiednich komórek (fot. 3).

Zagadnienie znalezienia kształtu komórek piany okazało się fascynującym problemem matematycznym. Kelvin uważał, że rozwiązanie składa się z czternastościanów, takich jak na rysunku 2(a). W 1993 r. Weaire i Phelan znaleźli jednak strukturę mającą pole powierzchni o 0,3% mniejsze, przedstawioną na rysunku 2(b).

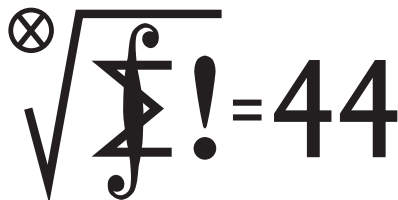
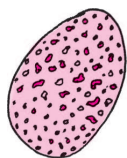


Rys. 2. Modele komórek piany: (a) Kelvina, (b) Weairego i Phelana.



Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

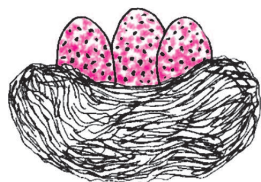


Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2013

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 645 ($WT = 1,15$) i 646 ($WT = 2,67$) z numeru 9/2012

Jędrzej Garnek	Poznań	47,73
Roksana Słowik	Knurów	47,20
Wojciech Nadara	Warszawa	39,64
Janusz Olszewski	Warszawa	37,87
Paweł Łabędzki	Kielce	36,92
Zbigniew Sewartowski	Wieliczka	35,45
Rami Marcin Ayoush	Szelków	34,52

Krzepiące (ostatnio jakoś rzadkie) zjawisko – jednocześnie dwie nowe postacie w Klubie 44 M: pan Jędrzej Garnek oraz pani Roksana Słowik. Panie stanowią (niestety) wyraźną mniejszość wśród uczestników Ligi; tym większa radość, że oto mamy w naszym Klubie już piątą Panią!



Zadania z matematyki nr 659, 660

Redaguje Marcin E. KUCZMA

659. Wierzchołki n -kąta foremnego są pokolorowane dwoma kolorami. Co jednostkę czasu pokolorowanie zmienia się: każdy wierzchołek przyjmuje kolor, który bezpośrednio przed tym momentem miała większość z trójki wierzchołków: sam rozważany wierzchołek oraz dwa z nim sąsiadujące. Proces kończy się, gdy nowe pokolorowanie okaże się identyczne z poprzednim (tzn. gdy nic się już nie zmienia). Dla każdej liczby naturalnej $n \geq 3$ wyjaśnić, dla jakich początkowych konfiguracji kolorów proces będzie trwał nieskończenie.

660. Dana jest liczba naturalna $k > 1$. Znaleźć wszystkie liczby naturalne $n > 1$, spełniające nierówność $d(n^k) \leq k \cdot d(n)$, gdzie $d(x)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby naturalnej x .

Zadanie 660 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2012

Przypominamy treść zadań:

651. Znaleźć wszystkie pary liczb całkowitych (m, n) , dla których liczby

$$\frac{m+1}{n} + \frac{n+1}{m} \quad \text{oraz} \quad \frac{m^2}{n} + \frac{n^2}{m}$$

są także całkowite.

652. Udowodnić nierówność

$$\frac{a^{n+1}}{a+b} + \frac{b^{n+1}}{b+c} + \frac{c^{n+1}}{c+a} \geq \frac{a^n + b^n + c^n}{2}$$

dla liczb rzeczywistych $a, b, c > 0$ oraz liczb całkowitych $n > 0$.

651. Sprowadzenie podanych sum ułamków do wspólnego mianownika pokazuje, że iloczyn mn powinien być dzielnikiem liczb $m^2 + m + n^2 + n$ oraz $m^3 + n^3$. Zatem n ma być dzielnikiem liczb $m^2 + m$ oraz m^3 , więc także liczby $m^3 - (m^2 + m)(m - 1)$, równej m . Przez symetrię, liczba m ma być dzielnikiem liczby n . Dostajemy warunek $|m| = |n|$.

Gdy $m = -n$, podane w zadaniu sumy wynoszą -2 oraz 0 (więc są całkowite). Jeśli zaś $m = n$, wynoszą one odpowiednio $2 + \frac{2}{n}$ oraz $2n$. Są one obie całkowite wtedy i tylko wtedy, gdy $n = \pm 1$ lub $n = \pm 2$.

Otrzymujemy odpowiedź: szukane pary to wszystkie pary postaci $(-n, n)$, gdzie $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, a ponadto cztery pary $(-2, -2)$, $(-1, -1)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$.

652. Autor zadania, pan Witold Bednarek, przysłał je wraz z takim zmyślnym rozwiązaniem: średnia arytmetyczna układu $2n + 1$ liczb, mianowicie $(2n - 1)$ -krotnie powtórzonej liczby a^{n+1} oraz liczb ab^n , b^{n+1} , jest nie mniejsza od ich średniej geometrycznej, równej $a^n b$:

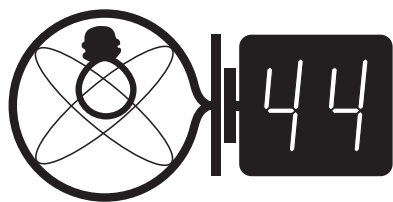
$$(2n - 1)a^{n+1} + (a + b)b^n \geq (2n + 1)a^n b.$$

Do obu stron dodajemy $(2n + 1)a^{n+1}$ i po prostym przekształceniu otrzymujemy

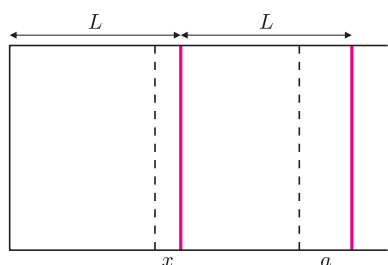
$$\frac{a^{n+1}}{a+b} \geq \frac{(2n+1)a^n - b^n}{4n}.$$

Wystarczy teraz napisać analogiczne nierówności dla par b, c oraz c, a , po czym dodać te trzy nierówności, by uzyskać tezę zadania.

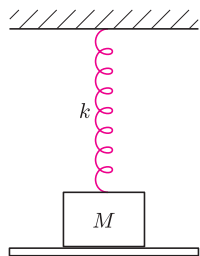
Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*



Termin nadsyłania rozwiązań: 30 VI 2013



Rys. 1



Rys. 2

556. W poziomym cylindrze, w odległościach L i $2L$ na prawo od zamkniętego końca znajdują się dwa tłoki (rys. 1), które mogą przemieszczać się bez tarcia (grubość tłoków pomijamy). W lewej części znajduje się para wodna pod ciśnieniem p_0 , w prawej powietrze o takim samym ciśnieniu. Ciśnienie pary nasyconej wody w danej temperaturze wynosi $2p_0$. Prawy tłok został wolno wepchnięty na odległość a . O ile przesunął się lewy tłok? Temperatura jest stała.

557. Detektor fal radiowych znajduje się na brzegu jeziora na wysokości h nad poziomem wody. Rejestruje on sygnały wysyłane przez satelitę wznoszącego się nad horyzontem. Przy jakich kątach wzniesienia satelity nad horyzontem obserwuje się maksima sygnału? Długość fali emitowanej przez satelitę wynosi λ . Przyjmujemy, że powierzchnia jeziora jest idealnie gładka.

Rozwiązania zadań z numeru 12/2012

Przypominamy treść zadań:

548. Ciężarek o masie M zawieszono na sprężynie o współczynniku sprężystości k i położono na podstawce (rys. 2). W chwili początkowej sprężyna była nieodkształcona. Podstawkę zaczęto opuszczać w dół z przyspieszeniem a . Po jakim czasie ciężarek stracił kontakt z podstawką? Jakie było maksymalne wydłużenie sprężyny?

549. Obwód elektryczny składa się z ogniwa o zaniedbywalnym oporze wewnętrznym i dwóch oporników połączonych szeregowo. Voltomierz wskazał spadek napięcia na pierwszym oporniku $U_1 = 4$ V, na drugim oporniku $U_2 = 6$ V, na obu opornikach $U = 12$ V. Jakie są spadki napięć na każdym z oporników, gdy voltomierz nie jest nigdzie podłączony?

548. Gdy $a \geq g$, czyli przyspieszenie podstawki jest nie mniejsze od przyspieszenia ziemskiego, ciężarek odrywa się od podstawki od razu. Zmiana energii kinetycznej ciężarka po zakończeniu ruchu w dół wynosi 0 i równa jest pracy sił ciężkości i sprężystości: $0 = Mg x_0 - kx_0^2/2$, gdzie x_0 jest maksymalnym wydłużeniem sprężyny i wynosi $2Mg/k$.

Rozważmy przypadek $a < g$. Równanie ruchu ciężarka, dopóki nie straci on kontaktu z podstawką, ma postać $Ma = Mg - kx - F(x)$, gdzie x jest wydłużeniem sprężyny, a $F(x)$ siłą reakcji podstawki. W chwili oderwania, po przebyciu przez ciężarek drogi s , jest $F(s) = 0$. Stąd $s = M(g - a)/k$. Z drugiej strony $s = at^2/2$, ponieważ do chwili oderwania ciężarek wraz z deską porusza się ruchem jednostajnie przyspieszonym i szukany czas wynosi $t = \sqrt{2M(g - a)/ka}$. Prędkość ciężarka w chwili oderwania ma wartość $v = at = \sqrt{2Ma(g - a)/k}$. Od chwili oderwania ciężarek porusza się ruchem harmonicznym.

Z zasady zachowania energii $k(\Delta l - s)^2/2 + Mv^2/2 = kA^2/2$, gdzie $\Delta l = Mg/k$ jest wydłużeniem sprężyny w stanie równowagi, a $|\Delta l - s|$ jest odległością od położenia równowagi w chwili oderwania, wyznaczamy amplitudę drgań $A = M\sqrt{a(2g - a)}/k$. Maksymalne wydłużenie sprężyny x_0 jest sumą wydłużenia w położeniu równowagi Δl oraz amplitudy drgań $x_0 = Mg/k + M\sqrt{a(2g - a)}/k$.

549. Ponieważ opór ogniwa jest zaniedbywalny, suma spadków napięć na obu opornikach równa jest sile elektromotorycznej ogniwa, która wynosi $\epsilon = 12$ V, jak wynika z trzeciego pomiaru. Oznaczmy opór voltomierza przez R_V , a oporników przez R_1 i R_2 . Niech natężenie prądu płynącego przez opornik R_2 , gdy voltomierz połączony jest równolegle z opornikiem R_1 , wynosi I_1 . Drugie prawo Kirchhoffa ma w tym przypadku postać $\epsilon - U_1 - R_2 I_1 = 0$, stąd $I_1 = (\epsilon - U_1)/R_2$. Spadek napięcia na połączonych równolegle opornikach R_1 i R_V wynosi $U_1 = R_V R_1 I_1 / (R_V + R_1)$ i prowadzi to do równania $R_2(R_V + R_1) = 2R_V R_1$. Analogicznie rozważając przypadek połączenia voltomierza z opornikiem R_2 , otrzymujemy równanie $R_1(R_V + R_2) = R_V R_2$. Eliminacja R_V daje związek $2R_2 = 3R_1$. Gdy voltomierz nie jest podłączony, natężenie prądu w obwodzie wynosi $I = \epsilon / (R_1 + R_2) = 2\epsilon / (5R_1)$. Spadek napięcia na pierwszym oporniku wynosi więc $U'_1 = R_1 I = 4,8$ V, na drugim $U'_2 = \epsilon - U'_1 = 7,2$ V.

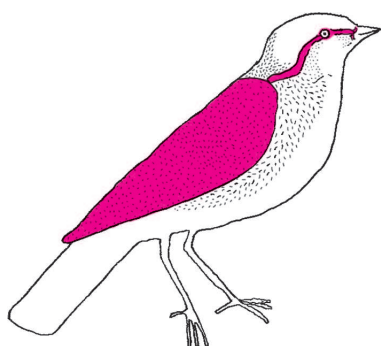
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F**
po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań
542 ($WT = 2,35$) i 543 ($WT = 2,45$)
z numeru 9/2012

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	39,02
Tomasz Rudny	Warszawa	35,20
Tomasz Wietecha	Tarnów	31,13
Krzysztof Magiera	Łosiów	28,34

Prosto z nieba: Galaktyka na końcu Wszechświata

Parsek to dystans, z którego odległość kątowa Ziemia-Słońce wynosi $1''$ łuku ($1 \text{ pc} \approx 3,2616$ roku świetlnego).

Poczerwienienie z jest funkcją obserwowanej i emitowanej długości λ_o i λ_e , $z = \lambda_o/\lambda_e - 1$.

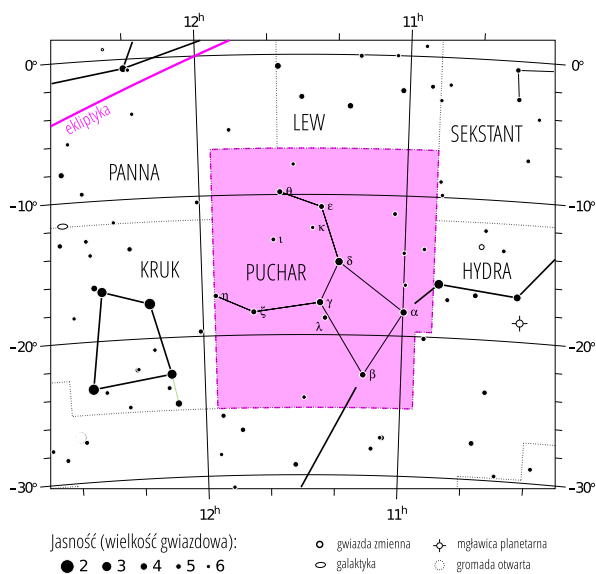


Odległości astronomiczne mierzone są w okolicy Układu Słonecznego w parsekach (lub latach świetlnych), pomiędzy zgrupowaniami gwiazd w Galaktyce – w kiloparsekach, a między galaktykami w Grupie Lokalnej – w megaparsekach. Spojrzenie w jeszcze większej skali wymaga badania *poczerwienienia* fotonów: od czasów Hubble'a wiemy, że odległe obiekty oddalają się od nas tym szybciej, im dalej od nas się znajdują. Obserwowane promieniowanie ma wtedy tym większe względne przesunięcie długości fali (oznaczane z), im dalej znajduje się źródło – za pomocą odpowiedniego modelu kosmologicznego można zatem wielkość z związać z odległością. Galaktyka UDFy-38135539, uważana do niedawna za najdalszą znaną, ma $z = 8,55$, co tłumaczy się na 10 miliardów parseków lub wiek około 13,1 miliarda lat (obserwujemy promieniowanie wyświecone przez gwiazdy zaledwie 600 milionów lat po Wielkim Wybuchu).

Lepsze jest wrogiem dobrego, a w dziedzinie dużych poczerwienień panuje szczególnie zacięta rywalizacja. Niedawne dane Teleskopu Hubble'a, połączone z obserwacjami Teleskopu Spitzera, ujawniają jeszcze starszą galaktykę, nazwaną MACS0647-JD, dla której z wynosi, zdaniem badaczy, aż 11! Wszechświat dla $z = 11$ miał jedynie 420 milionów lat (3% obecnego wieku). Odkrycie jest dziełem przeglądu nieba CLASH (ang. *Cluster Lensing And Supernova survey with Hubble*), który wykorzystuje zjawisko soczewkowania grawitacyjnego światła odległych galaktyk na bliższych nam grupach galaktyk. Pole grawitacyjne soczewki, w tym przypadku położonej około 1,6 Gpc od nas gromady galaktyk MACS J0647.7+7015, wzmacnia światło źródła – bez tej dodatkowej „pomocy” odległa galaktyka byłaby po prostu zbyt słaba nawet dla Teleskopu Hubble'a. Poczerwienienie wyznaczono, analizując zdjęcia obiektu w różnych filtrach – MACS0647-JD jest widoczna tylko w „najbardziej czerwonych”, czyli najdłuższych falach. Metoda ta nie jest, co prawda, pomiarem spektrograficznym, tzn. obserwacją przesunięcia długości fali konkretnej linii widmowej; takich, powszechnie uważanych za ostateczne potwierdzenie, danych dostarczy dopiero Teleskop Kosmiczny Webba, który znajdzie się na orbicie w 2018 roku.

Michał BEJGER

Niebo jak własna kieszeń: Kwiecień



Gwiazdozbiór Pucharu. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

W tym miesiącu odnajdziemy na niebie gwiazdozbiór Pucharu (łac. *Crater*), należący do grupy czterdziestu ośmiu opisanych przez samego Ptolemeusza w II w. n.e. Gwiazdozbiór znajduje się w kwietniu w południowej części wieczornego nieba pomiędzy Panną, Hydram, Lwem i Krukiem; ostatnie dwie konstelacje stanowią dobry początek poszukiwań. Według mitu Puchar należy do boga Apolla – gnuśny Kruk, wysłany z naczyniem po wodę, zwlekał z powrotem, bardziej niż służbą zainteresowany znalezionymi przypadkowo figami. Przyniesiona w ramach przeprosin Hydra (wąż wodny) nie udobruchała Apolla, który w pasji cisnął całą tę menażerię na nieboskłon. Najjaśniejszą gwiazdą Pucharu jest δ Crateris, Labrum (z łac. krawędź, a także warga), o jasności $3,56^m$, łączona z legendą o Świętym Graalu. Konstelacja zawiera również kilka galaktyk o jasności mniejszej niż 11^m , odkrytych przez Herschela (NGC 3887, NGC 3511) i dostępnych obserwacjom za pomocą amatorskich teleskopów. Z Pucharem związany jest też rój η Krateridów, widoczny w styczniu na półkuli południowej; na półkuli północnej natomiast spodziewamy się kwietniowych Lirydów (15–25 IV, max. 22 IV, liczba zliczeń na godzinę może sięgnąć setki, choć zwykle wynosi około 15).

Księżyc znajdzie się w nowiu 10 IV, a pełnia nastąpi 25 IV. Wtedy również dojdzie do *częściowego*, a zatem mało widowiskowego zaćmienia Księżyca (szkoda, bo obszar zaćmienia przypada na Europę). Na niebie w kwietniu królują duże planety: Jowisz ($-1,89^m$) w gwiazdozbiórze Byka i Saturn ($0,88^m$, Waga), który 28 IV znajdzie się w opozycji (najlepszy moment do fotografowania jego tarczy i księżyców!). Wenus ($-3,8^m$) jest praktycznie niewidoczna przed zachodem Słońca, podobnie jak Mars ($1,18^m$), który znajduje się obecnie bardzo blisko Słońca, przez co nie ma szans na jego obserwację; dotyczy to także Urana. Merkury ($-0,02^m$) pojawia się natomiast rankiem, tuż przed wschodem.

M. B.

Geometria analityczna kojarzona bywa z dużą ilością rachunków, takie rozwiązania często są długie i pracochłonne. Oto kilka przykładów, że nie zawsze jest tak źle.

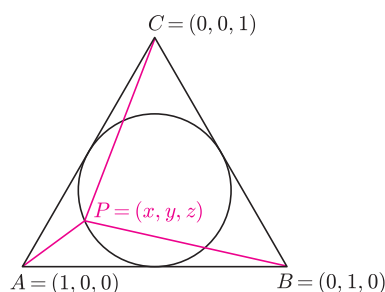
1. Dany jest trójkąt równoboczny ABC oraz dowolny punkt P na jego okręgu wpisanym. Wykaż, że suma $PA^2 + PB^2 + PC^2$ nie zależy od wyboru punktu P .

2. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$

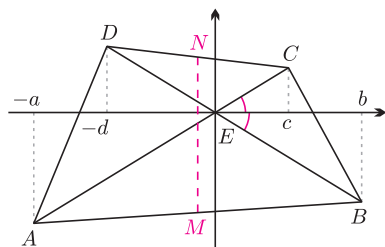
3. Rozstrzygnij, ile rozwiązań ma układ równań $\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 20, \\ (x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 5. \end{cases}$

4. W czworokącie wypukłym $ABCD$ punkty M i N są odpowiednio środkami boków AB i CD , zaś przekątne przecinają się w punkcie E . Wykaż, że prosta zawierająca dwusieczną kąta BEC jest prostopadła do prostej MN wtedy i tylko wtedy, gdy $AC = BD$.

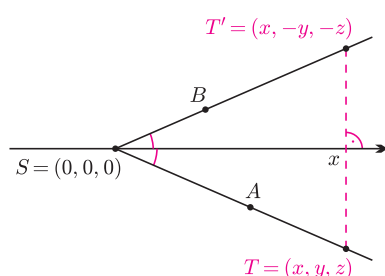
5. W czworościanie rozważamy dwusieczne trzech kątów płaskich mających wspólny wierzchołek. Wykaż, że jeżeli pewne dwie z tych dwusiecznych są prostopadłe, to wszystkie one są parami prostopadłe.



Rys. 1. Odległość punktów (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) równa jest $\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$.



Rys. 2



Rys. 3. Przy symetrii względem osi OX współrzędna x się nie zmienia, a współrzędne y i z zmieniają znak.

Zadania 4 i 5 pochodzą z LXII Olimpiady Matematycznej.

Rozwiązania

R1. Wprowadźmy układ współrzędnych w \mathbb{R}^3 tak, aby $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$ (rys. 1). Wtedy równanie płaszczyzny ABC to $x + y + z = 1$.

Rozważmy sferę daną równaniem $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ dla takiego $r > 0$, aby okrąg wpisany w trójkąt ABC był przekrojem tej sfery płaszczyzną ABC .

Niech $P = (x, y, z)$. Wówczas $PA^2 + PB^2 + PC^2 = ((x - 1)^2 + y^2 + z^2) + (x^2 + (y - 1)^2 + z^2) + (x^2 + y^2 + (z - 1)^2) = 3(x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + 3 = 3r^2 - 2 + 3 = 3r^2 + 1$, czyli faktycznie nie zależy od wyboru punktu P z okręgu. \square

R2. Równania opisują płaszczyznę przechodzącą przez punkty $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ i $(0, 0, 1)$ oraz sferę o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu 1. Sfera ta przechodzi przez te same trzy punkty, więc przecina się z daną płaszczyzną wzdłuż okręgu przez nie wyznaczonego. Stąd układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań. \square

R3. Równania opisują okrąg o środku $(2, 1)$ i promieniu $2\sqrt{5}$ oraz okrąg o środku $(-4, -2)$ i promieniu $\sqrt{5}$. Odległość między środkami tych okręgów równa jest $\sqrt{(2 + 4)^2 + (1 + 2)^2} = \sqrt{6^2 + 3^2} = 3\sqrt{2^2 + 1^2} = 3\sqrt{5}$, czyli równa sumie ich promieni. Okręgi są więc styczne i układ równań ma jedno rozwiązanie. \square

R4. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby $E = (0, 0)$ oraz by dwusieczna kąta BEC była zawarta w dodatniej półosi OX (rys. 2). Czworokąt jest wypukły, więc pierwszymi współrzędnymi punktów A, B, C, D są odpowiednio $-a, b, c, -d$ dla pewnych $a, b, c, d > 0$.

Prosta MN jest prostopadła do osi OX wtedy i tylko wtedy, gdy pierwsze współrzędne punktów M i N są równe, czyli gdy $\frac{1}{2}(-a + b) = \frac{1}{2}(c - d)$ (*).

Odcinki AC i BD tworzą z poziomą osią ten sam kąt ($\frac{1}{2} \sphericalangle BEC$), więc warunek $AC = BD$ równoważny jest warunkowi, że rzuty tych odcinków na oś OX są równe. Każdy z rzutów zawiera punkt $E = (0, 0)$, zatem są one równe wtedy i tylko wtedy, gdy $a + c = b + d$ (**).

Warunki (*) i (**) są równoważne, co kończy dowód. \square

R5. Wprowadźmy układ współrzędnych tak, aby wyróżniony wierzchołek S czworościanu był w punkcie $(0, 0, 0)$, a prostopadłe dwusieczne kątów płaskich ASB i BSC były zawarte odpowiednio w dodatnich półosiach OX i OY .

Rozważmy dowolny punkt $T = (x, y, z)$ z półprostej SA^{\rightarrow} . Jego obrazem w symetrii względem osi OX jest punkt $T' = (x, -y, -z)$ na półprostej SB^{\rightarrow} (rys. 3). Z kolei obrazem punktu T' w symetrii względem osi OY jest punkt $T'' = (-x, -y, z)$ na półprostej SC^{\rightarrow} . Punkty T'' i T są więc symetryczne względem osi OZ . Zatem, z dowolności wyboru T , całe półproste SC^{\rightarrow} i SA^{\rightarrow} są symetryczne względem OZ . Stąd dwusieczna kąta CSA zawarta jest w osi OZ , co kończy dowód. \square