



tel. 22 632 10 34 fax 22 632 10 32

8 października 2013 roku zmarł





Michał Święcki

fizyk

zastępca redaktora naczelnego *Delty* (1980–1983)

redaktor naczelny *Małej Delty/Szkiełka i Oka* (1983–1990)

SPIS TREŚCI NUMERU 12 (475)

Czterdzieści lat minęło <i>Marek Kordos</i>	str. 1
Z życia muchy <i>Zofia Miechowicz</i>	str. 2
Złoty podział w sortowaniu <i>Marcin Peczański</i>	str. 4
O długowiecznych pchłach i twierdzeniu ergodycznym <i>Katarzyna Pietruska-Paluba</i>	str. 6
Wartościowe obserwacje gwiazd zmiennych amatorskim teleskopem <i>Magdalena Otulakowska-Hypka</i>	str. 8
 O (ludzim) myśleniu <i>Magdalena Fikus</i>	str.11
 Liczby geometryczne <i>Urszula Pastwa</i>	str.12
Ze świata USOS. Część 3 – O układaniu optymalnych planów zajęć w systemie USOS <i>Krzysztof Ciebiera,</i> <i>Marcin Mucha</i>	str.14
 Ludzka strona baterii <i>Stanisław Bednarek</i>	str.16
Astronomia ekstremalna	str.17
 Zadania	str.17
Stożkowe	str.18
Kącik przestrzenny (20): Sfery Dandelina <i>Michał Kieza</i>	str.19
Jeszcze jedna twarz greja <i>Krzysztof Turzyński</i>	str.20
Aktualności	str.21
Informatyczny kącik olimpijski (67): Karty <i>Jakub Radoszewski</i>	str.22
Klub 44	str.23
Prosto z nieba: Cmentarzysko beziemiennych planet <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Grudzień	str.24
 Kąty trójścienne <i>Joanna Jaszuska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzęstowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerna, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.

Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:

Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020, 02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

str.14 **Kolporter:** www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

str.16 **RUCH S.A.:** www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

str.17 Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

str.18 Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

str.19 prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

str.20 pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

str.21 Koszt połączenia wg taryfy operatora.

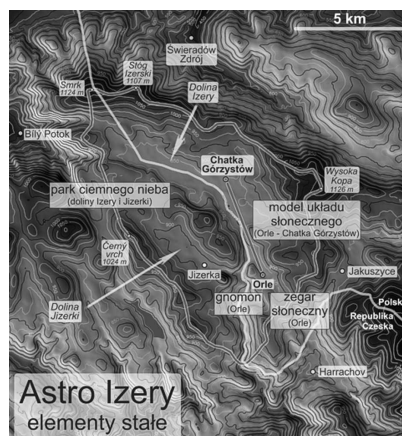
Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.):

deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Czytelnik Wnikliwy zastanawiać się może, czemu ten numer nie ma sygnatury 12(480). Sprawę wyjaśnia fakt, że o ile udało się nam nadrobić straty numerów wynikłe ze stanu wojennego (wydawaliśmy po odwieszeniu dwa numery miesięczne), to brutalnej prywatyzacji RSW „Prasa-Książka-Ruch” nie zdołaliśmy się przeciwstawić i straciliśmy numery 11 i 12/1989 oraz 1, 2 i 3/1990.

Czterdzieści lat minęło

Ten numer zamyka czterdzieści lat miesięcznika *Delta*. Numer próbny został wydrukowany 8 grudnia 1973 roku w nakładzie 50 egzemplarzy, a równo z Nowym Rokiem został wydany w nakładzie 30 tys. identyczny z nim numer 1. Wiąże się z tym anegdotka: nie uwzględniliśmy ingerencji cenzury, bo tak się z niej śmiało, że zapomnieliśmy to zrobić – chodziło o to, by nie ujawniać wielkości obszaru Instytutu Fizyki Jądrowej w Krakowie.

Ale nie o anegdotach chcę pisać. Mając dość wyjątkowy przywilej wydawania miesięcznika przez lat czterdzieści, chciałbym podzielić się z Czytelnikami swoją opinią, czym on się różni od „niedelt”. Bo zawsze chcieliśmy, by się różnił. Powstało nawet takie hasło reklamowe: *Delta is different*, co jest bardziej dziwne niż zrzeczne, ale nam się spodobało.

Różnica, ów – jak się dzisiaj mówi – mit założycielski *Delty*, polega na postawieniu jasno sprawy:

jeśli chcesz uprawiać naukę, przygotuj się na to, że to ogromny wysiłek.

Każdy gołym okiem zauważy, że jest to pod prąd dzisiejszych trendów, które w słowie pisanim wyrażają się tytułami *Jak nauczyć swojego psa fizyki czy Krowy w labiryncie* i objawiają przekonanie, iż najlepszą drogą do nauki są figle i swawole. Nie jest to – wbrew pozorom – znak czasu: podobną rolę pełniły kiedyś *Śladami Pitagorasa* czy *Zerko żeglarz* itp. My byliśmy zdania, że przez „uchachanie” droga do nauki nie prowadzi – jedyne, co można tą drogą uzyskać, to przyzwolenie społeczności na wydawanie na naukę pieniędzy z budżetu (i zapewne – moim zdaniem – tylko o to chodzi).

Odpowiednikiem takiego stanowiska w pedagogice i (ponoć) w psychologii rozwojowej jest traktowanie dziecka jak dorosłego. My ordynowaliśmy ludziom, którzy jeszcze do nauki nie dotarli, takie pozycje, jak *Co to jest matematyka* Couranta i Robbinsa, *Geometrię pogładową* Hilberta i Cohn-Vossena, *O liczbach i figurach* Rademachera i Toeplitza. Aby nie odstawać znanadto od tych ideałów, ukuliśmy dyrektywę, która kazała

dążyć do tego, by *Delta* to była mówiąca nauka.

W praktyce oznaczało to przykazanie, by o danym temacie pisali wyłącznie ci, którzy w tej dziedzinie pracują. I więcej: nawet jeśli nam się wydawało, że jakiś uczony pisze zbyt zawile, to nie kwestionowaliśmy jego tekstu, jeśli miał on wielu uczniów – jeśli ich tylu ma, to znaczy, że mówi o swojej pracy właściwie.

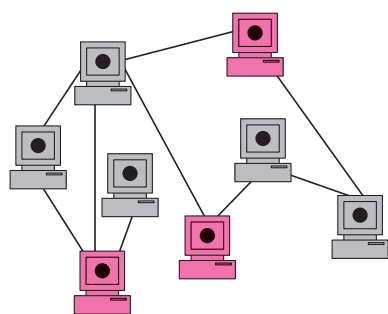
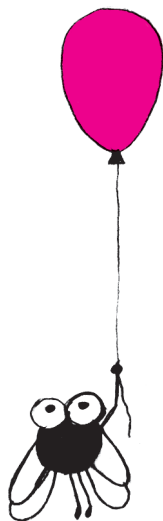
Po czterdziestu latach pracy w *Delcie* mam poczucie dobrze spełnianego obowiązku. Zapewniają mnie o tym ci, którzy na taką, niełatwą przecież, propozycję drogi do nauki przystali. Wymiernie widać to przede wszystkim w naszym Klubie 44 M, zrzeszającym fanatyków ciężkiej pracy nad niebanalnymi zadaniami – o poziomie Klubu świadczy fakt, że za jego prowadzenie Marcin Kuczma otrzymał w 1992 roku Medal Hilberta; rozmiar sukcesu może pokazać to, iż równocześnie uczczono w ten sposób Martina Gardnera za kącik matematyczny w *Scientific American*. Drugie wymierne świadectwo to nasz Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki – na dziesięć nagród, jakie zostały przyznane w dziedzinie matematyki w dotychczasowych edycjach Konkursu Prac Młodych Naukowców Unii Europejskiej, dziewięć wywalczyli Polacy, laureaci naszego KUPzM. No i wreszcie istnieje, z *Delty* poczęte, środowisko Szkół Matematyki Pogładowej, których, jak dotąd, odbyło się 51, i do którego to środowiska zaliczają się nie tylko matematycy.

Dulce et decorum est zmagać się z opornym umysłem, aby go skłonić do pojęcia tego, co jeszcze wydaje mu się nieopojęte.

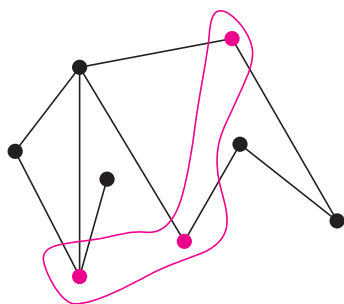
I mogę obiecać w imieniu własnym oraz kolegium redakcyjnego *Delty* (którego średni wiek już dawno jest mniejszy od jej wieku), że tego rodzaju trudu będziemy naszym Czytelnikom nadal dostarczać.

Marek KORDOS





Rys. 1



Rys. 2. Minimalny niezależny zbiór dominujący (czyli maksymalny zbiór niezależny) w grafie.

Zapewne każdy z nas dobrze zna muszkę owocówkę (*drosophila melanogaster*, co tłumaczy się dosłownie jako ciemnobrzucha miłośniczka rosy).

Dla większości ta dobra znajomość niekoniecznie musi budzić dobre skojarzenia – być może z uwagi na jej natrętny muszy charakter i masową obecność letnią porą w pobliżu nieopatrznie zostawionych bez przykrycia słodkich owoców. Niemal równie powszechna jest wiedza o jej zasługach naukowych w dziedzinie genetyki. Mało kto zdaje sobie sprawę z tego, że to nie pies Łajka, a właśnie muszka była pierwszą ziemską istotą, która wybrała się w podróż kosmiczną. Ale czy ktoś uwierzy, że muszka pomogła również w rozwiązywaniu pewnego problemu z pogranicza matematyki i informatyki?

Większość systemów komputerowych, z jakimi mamy obecnie do czynienia, to tak zwane systemy rozproszone, czyli niezależne urządzenia (stosując pewne uproszczenie, będziemy dalej mówić o procesorach) połączone, mniej lub bardziej ściśle, w jedną sieć, mogące się komunikować i sprawiające wrażenie jednej całości. Jednym z kluczowych zadań, przed jakim staje projektant takiego systemu, jest rozwiązanie problemu komunikacji. Ustanowienie bezpośredniego połączenia między każdymi dwoma urządzeniami w sieci byłoby nieefektywne i nieopłacalne, konieczne jest więc wyznaczenie możliwie najmniejszego zbioru procesorów (tak zwanych liderów), który będzie miał bezpośrednie połączenie z każdym procesorem z zewnątrz. Model matematyczny tego zagadnienia najłatwiej jest przedstawić w języku teorii grafów. Zbiór wszystkich komputerów w sieci możemy utożsamiać z wierzchołkami grafu, a strukturę połączeń pomiędzy nimi opisuje zbiór krawędzi tego grafu (rys. 1).

Zbiór parami niesąsiednich wierzchołków grafu, w którym swojego sąsiada ma każdy wierzchołek spoza zbioru, a do tego jest nienadmiarowy (czyli jeśli cokolwiek z niego zabierzemy, to przestanie mieć tę pierwszą cechę), w teorii grafów nosi nazwę minimalnego niezależnego zbioru dominującego. Jest to pojęcie dualne do pojęcia maksymalnego zbioru niezależnego. Maksymalny zbiór niezależny to taki, w którym żadne dwa wierzchołki nie są połączone krawędzią (niezależność) i nie możemy do niego dołożyć nic więcej, żeby własności niezależności nie stracić (maksymalność). Można wykazać, że minimalny niezależny zbiór dominujący jest jednocześnie maksymalnym zbiorem niezależnym i odwrotnie.

Szukanie zbioru liderów w rozproszonej sieci sprowadza się więc do wyznaczenia maksymalnego zbioru niezależnego w reprezentującym ją grafie. Jak znaleźć taki zbiór? Przyjrzyjmy się na początek najprostszym metodom.

Rozwiązanie 1. Ustawiamy wierzchołki grafu w dowolnym porządku.

Następnie zgodnie z zadanym porządkiem sprawdzamy, czy kolejne wierzchołki mogą znaleźć się w zbiorze liderów (czy nie mają już w tym zbiorze sąsiada). Jeżeli tak, to dodajemy taki wierzchołek do zbioru.

Rozwiązanie 2. Ustawiamy wierzchołki grafu w dowolnym porządku.

Następnie zgodnie z zadanym porządkiem dodajemy wierzchołek do zbioru liderów, natomiast wszystkich jego sąsiadów wyrzucamy z rozważań.

Te najprostsze algorytmy są jednocześnie stosunkowo szybkie. Oba działają liniowo względem liczby krawędzi. Jednak oba te podejścia mają naturę sekwencyjną i w związku z tym średnio pasują do modelu systemów rozproszonych. W 1982 roku znany informatyk-teoretyk Leslie Valiant uznał problem wyznaczania maksymalnego zbioru niezależnego za jedno z większych wyzwań informatyki teoretycznej, twierdząc jednocześnie, że trudno sobie wyobrazić, w jaki sposób ten problem mógłby być rozwiązany równoległe w istotnie mniejszej liczbie kroków. Trzy lata później Avi Wigderson i Richard Karp znaleźli skomplikowany algorytm

* Wydział Matematyki, Informatyki i Ekonometrii, Uniwersytet Zielonogórski



Rozwiązanie zadania F 845.

Postać transformacji pól nie zależy od tego, z jakich źródeł pochodzą. Możemy więc dla uproszczenia wyobrazić sobie, że pole, które bada pierwszy obserwator, zostało wytworzone przez spoczywającą względem niego jednorodnie naładowaną płaszczyznę. Ze względu na tzw. skrócenie Lorentza obserwator poruszający się z prędkością v równoległą do naładowanej płaszczyzny stwierdzi, że powierzchniowa gęstość zgromadzonego na niej ładunku wynosi

$$\sigma' = \sigma / \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(gdzie c oznacza prędkość światła), a więc mierzona przez niego wartość składowej natężenia pola elektrycznego prostopadłej do płaszczyzny to

$$E' = E / \sqrt{1 - v^2/c^2},$$

gdzie E oznacza wartość mierzoną w układzie spoczynkowym płaszczyzny.

Dla obserwatora poruszającego się z prędkością prostopadłą do płaszczyzny gęstość ładunku będzie taka sama, jak w układzie spoczynkowym płaszczyzny, a więc zmierzy on także takie samo natężenie pola, jak mierzone w układzie spoczynkowym.

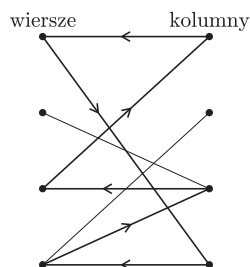
Łącząc oba wnioski, stwierdzamy, że drugi obserwator (poruszający się z prędkością v) zmierzy taką samą wartość składowej pola równoległej do jego kierunku ruchu, jak obserwator spoczywający i $1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ razy większą wartość składowej prostopadłej.

POS to skrót prekursora organu sensorycznego.



Rozwiązanie zadania M 1406.

Niech G będzie grafem o $2n$ wierzchołkach oznaczających wiersze i kolumny planszy. Krawędź pomiędzy wierszem w a kolumną k jest w G wtedy i tylko wtedy, gdy punkt o współrzędnych (w, k) jest zamalowany. Graf G ma więc $2n$ krawędzi. Jak wiadomo, jeśli graf o N wierzchołkach nie ma cyklu, to ma co najwyżej $N - 1$ krawędzi. Zatem G zawiera cykl. Z definicji krawędzi w G wynika, że będzie on parzystej długości $2m$ i wyznaczone przez niego krawędzie to szukane punkty a_1, \dots, a_{2m} .



o złożoności $O(\log^3 n)$, który następnie poprawił zespół pod kierunkiem Nogi Alona, izraelskiego matematyka i informatyka, uzyskując algorytm o złożoności $O(\log n)$.

Mamy zatem efektywne algorytmy rozwiązujące problem znajdowania maksymalnego zbioru niezależnego w grafie. W każdym z nich każdy wierzchołek musi znać swoich sąsiadów w grafie, podczas gdy w prawdziwych sieciach mogą występować ograniczenia możliwości komunikacji. Wyobraźmy sobie, na przykład, system kontroli lotu działający w ten sposób, że zrzucamy z samolotu na pewnym terenie tysiące urządzeń monitorujących, które mają się komunikować. Urządzenia mogą jedynie wysłać sygnały do urządzeń znajdujących się w odpowiedniej odległości. Mamy sieć, którą można reprezentować za pomocą grafu, którego wierzchołki będą odpowiadały urządzeniom, natomiast krawędzie będzie determinowała odległość między nimi. Niestety, urządzenia zostały rozmieszczone na danym terenie w sposób losowy i nie mamy pojęcia, jak wygląda faktyczna struktura sieci. Co możemy zrobić w takim przypadku?

Okazuje się, że natura dawno wymyśliła za nas rozwiązanie tego problemu, a klucz do niego umieściła na głowie muszki owocówki. Ten fakt zaobserwowała oraz opracowała pod kątem matematycznym grupa matematyków i biologów, w skład której wchodził: Yehuda Afek, Noga Alon, Omer Barad, Eran Hornstein, Naama Barkai i Ziv Bar-Joseph. Wyniki swoich obserwacji zawarli w artykule *A biological solution to a fundamental distributed computing problem* (Biologiczne rozwiązanie podstawowego problemu obliczeń rozproszonych), który ukazał się w prestiżowym czasopiśmie *Science*.

Dorośla muszka ma na głowie zespół włoskowatych organów sensorycznych. Kształtują się one jeszcze w stadium larwalnym z sąsiadujących, równorzędnych komórek. Nie ma jednak żadnego klucza, który pomógłby nam wskazać, z których komórek (nazywanych POS-ami) wykształcą się organy sensoryczne. Wiemy natomiast, czym charakteryzują się wybrane już POS-y:

- każda z komórek zostaje POS-em lub sąsiadem POS-a,
- żadne dwa POS-y nie są sąsiadami.

Na głowie muszki tworzy się więc maksymalny zbiór niezależny w grafie komórek – zbiór POS-ów. Poszczególne komórki nie mają informacji, jak wygląda całość struktury. Mogą jedynie wysłać do swoich sąsiadów sygnał (produkując duże stężenie proteiny Delta), że chcą zostać POS-em. Cały proces trwa około trzech godzin i zawsze kończy się sukcesem. Muszka potrafi zrobić dokładnie to, o co nam chodzi! Algorytm, którego mogliśmy się od niej nauczyć, jest zaskakująco prosty.

Rozwiązanie 3

- *Pewien losowy zbiór komórek wyraża chęć zostania POS-em i wysyła sygnał do wszystkich swoich sąsiadów.*
- *Każda komórka, która chce zostać POS-em i nie otrzymała sygnału od żadnego ze swoich sąsiadów, zostaje POS-em.*
- *Każdy POS „usypia” wszystkich swoich sąsiadów.*
- *Cała procedura powtarza się na zbiorze komórek, które nie zostały jeszcze wybrane na POS-y ani uspione.*

Algorytm ten wykonuje pesymistycznie $O(\log^2 n)$ iteracji i z dużym prawdopodobieństwem łączna liczba wysyłanych w nim sygnałów jest optymalna (z dokładnością do stałego czynnika). Czytelników obeznanych z informatyczną terminologią i poszukujących ciekawych szczegółów odsyłam do wspomnianego wyżej artykułu. Tekstowi, który ukazał się w czasopiśmie, towarzyszą filmy przedstawiające proces wyboru POS-ów u muszki oraz dodatek zawierający wszelkie techniczne szczegóły.

Złoty podział w sortowaniu

Marcin PECZARSKI*

Złoty podział odcinka, zwany też złotą proporcją, jest doskonale znany. Okazuje się, że podobną własność można sformułować dla problemu sortowania. Niech $P = (X, \preceq)$ będzie *zbiorem częściowo uporządkowanym*, czyli zbiorem X wyposażonym w relację częściowego porządku $\preceq \subseteq X \times X$, spełniającą warunki:

- (zwrotność) $x \preceq x$ dla każdego $x \in X$;
- (przechodniość) jeśli $x \preceq y$ i $y \preceq z$, to $x \preceq z$ dla każdych $x, y, z \in X$;
- (antysymetryczność) jeśli $x \preceq y$ i $y \preceq x$, to $x = y$ dla każdych $x, y \in X$.

Zbiorem *liniowo uporządkowanym* nazywamy zbiór częściowo uporządkowany, w którym każde dwa elementy są porównywalne, czyli spełniony jest dodatkowy warunek:

- (spójność) $x \preceq y$ lub $y \preceq x$ dla każdych $x, y \in X$.

Rozszerzeniem liniowym zbioru częściowo uporządkowanego $P = (X, \preceq_P)$ nazywamy każdy zbiór liniowo uporządkowany $Q = (X, \preceq_Q)$, który zachowuje relację porządku, czyli $\preceq_P \subseteq \preceq_Q$. Rozszerzenie liniowe utożsamiamy z permutacją elementów zbioru X .

W dalszym ciągu będziemy rozważać tylko zbiory skończone. Dla przykładu niech $X = \{a, b, c\}$. Totalnym nieporządkiem na tym zbiorze jest zbiór częściowo uporządkowany $P_0 = (X, \preceq_0)$, taki że nie zachodzi $x \preceq_0 y$ dla dowolnych różnych $x, y \in X$. P_0 ma sześć rozszerzeń liniowych:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a).$$

Sortowanie zbioru częściowo uporządkowanego polega na zadawaniu pytań o relację między jego elementami w celu wybrania jednego z jego rozszerzeń liniowych. Niech $P_1 = (X, \preceq_1)$ będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, który chcemy posortować. Jeśli na pytanie o elementy x i y uzyskamy odpowiedź, że $x \preceq y$, to rozszerzamy relację \preceq_1 o tę informację. Wynikiem jest nowa relacja \preceq_2 i nowy zbiór częściowo uporządkowany $P_2 = (X, \preceq_2)$. Formalnie relacja \preceq_2 jest *domknięciem przechodnim* relacji \preceq_1 uzupełnionej o porównanie $x \preceq y$.

Domknięcie przechodnie relacji dwuargumentowej ϱ na zbiorze X jest to najmniejsza (w sensie inkluzji) relacja przechodnia ϱ' na zbiorze X , taka że $\varrho \subseteq \varrho'$.

Sortowanie kończy się, gdy w wyniku zadawania kolejnych pytań otrzymamy zbiór liniowo uporządkowany. Oczywiście, nie ma sensu zadawanie pytania, na które znamy odpowiedź, czyli pytania o relację między elementami x i y , jeśli $x \preceq_1 y$ lub $y \preceq_1 x$. Dla zachowania ścisłości przyjmujemy, że po zadaniu takiego pytania relacja nie zmienia się.

Wróćmy do naszego przykładu trójelementowego zbioru X i totalnego nieporządku na nim. Chcąc go posortować, możemy zadać pytanie o relację między elementami a i b . Jeśli odpowiedzią jest $a \preceq b$, to nadal możliwe są rozszerzenia liniowe

$$(a, b, c), (a, c, b), (c, a, b).$$

Jeśli natomiast odpowiedź brzmi $b \preceq a$, to pozostają rozszerzenia liniowe

$$(b, a, c), (b, c, a), (c, b, a).$$

Zauważmy, że wykonanie porównania dzieli zbiór rozszerzeń liniowych na dwa rozłączne podzbiory. Niech $e(P)$ oznacza liczbę rozszerzeń liniowych zbioru częściowo uporządkowanego. Łatwo zauważyć, że dla dowolnego zbioru częściowo uporządkowanego P jeśli P' i P'' oznaczają rozszerzenie P odpowiednio o warunek $x \preceq y$ i $y \preceq x$, to $e(P) = e(P') + e(P'')$ i przynajmniej jedna z wartości $e(P')$ lub $e(P'')$ jest nie mniejsza niż $\frac{1}{2}e(P)$.

Zastanówmy się, jaka jest minimalna liczba porównań $C(P)$ potrzebna i zawsze wystarczająca do posortowania danego zbioru częściowo uporządkowanego P . Gdyby było tak, jak w powyższym przykładzie, że zawsze możemy podzielić zbiór rozszerzeń liniowych na równoliczne podzbiory, to wystarczyłoby $\lceil \log_2 e(P) \rceil$ porównań. Niestety, nie zawsze jest to możliwe. Rozważany przykład pokazuje, że możemy uzyskać trójelementowy zbiór rozszerzeń liniowych i wtedy najlepszy możliwy do uzyskania podział jest w stosunku 1 : 2. Okazuje się, że najprawdopodobniej jest to przypadek najbardziej pesymistyczny. Mówi o tym hipoteza 1/3-2/3 sformułowana wiele lat temu niezależnie przez Kislicyna, Fredmana i Liniala.

Hipoteza 1. *Dla dowolnego skończonego zbioru częściowo uporządkowanego P , który nie jest liniowo uporządkowany, zawsze możemy wskazać dwa elementy, takie że w wyniku ich porównania (niezależnie od wyniku tego porównania) otrzymujemy rozszerzenie R , dla którego zachodzi*

$$\frac{1}{3}e(P) \leq e(R) \leq \frac{2}{3}e(P).$$

Powyższą hipotezę udowodniono dla wielu przypadków szczególnych, co pozwala wierzyć w jej prawdziwość. Jednak w ogólnym przypadku nadal pozostaje jednym z ważniejszych problemów otwartych teorii zbiorów częściowo uporządkowanych. Prawdziwość tej hipotezy implikuje możliwość posortowania zbioru częściowo uporządkowanego P za pomocą maksymalnie $\lceil \log_{1,5} e(P) \rceil$ porównań (przypomnijmy, że $\log_{1,5} n > \log_2 n$ dla $n > 1$).

Czy można lepiej? Wydaje się, że tak. Autor tego artykułu sformułował kilka lat temu **hipotezę złotego podziału** dla zbiorów częściowo uporządkowanych.

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Hipoteza 2. Dla dowolnego skończonego zbioru częściowo uporządkowanego P , który nie jest liniowo uporządkowany, zawsze możemy wskazać dwa kolejne porównania, takie że niezależnie od ich wyniku otrzymujemy kolejno rozszerzenia R i S , dla których zachodzi

$$e(P) \geq e(R) + e(S).$$

Hipoteza złotego podziału jest bardziej ogólna od hipotezy 1/3-2/3. Innymi słowy, prawdziwość hipotezy złotego podziału implikuje prawdziwość hipotezy 1/3-2/3, gdyż każdy kontrprzykład dla hipotezy 1/3-2/3 jest również kontrprzykładem dla hipotezy złotego podziału. Załóżmy, że P jest kontrprzykładem dla hipotezy 1/3-2/3. Wtedy dla każdego porównania na P jeden z jego wyników daje nierówność $e(R) > \frac{2}{3}e(P)$. Oczywiście, dla każdego porównania na R możemy wskazać jego wynik, taki że $e(S) \geq \frac{1}{2}e(R)$. Stąd $e(R) + e(S) \geq \frac{3}{2}e(R) > e(P)$ i otrzymaliśmy kontrprzykład dla hipotezy złotego podziału.

Jak można się domyślić, hipotezy złotego podziału również nie udało się udowodnić w ogólności, ale dowiedziono jej w tak wielu przypadkach szczególnych, że mamy podstawy, aby wierzyć w jej prawdziwość.

Zmierzając do finału, zobaczymy dwa proste twierdzenia, które uzasadniają nazwę hipotezy. Niech F_n będzie n -tą liczbą Fibonacciego, rozpoczynając od $F_1 = F_2 = 1$, a $\varphi = (1 + \sqrt{5})/2$ stałą złotej proporcji.

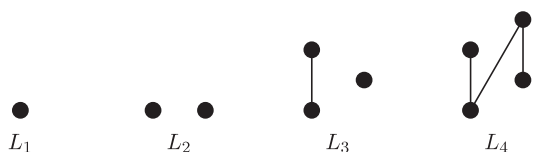
Twierdzenie 1. Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa i zachodzi $e(P) < F_{n+3}$, to $C(P) \leq n$.

Dowód prowadzimy przez indukcję. Dla $n = 0$ z założenia wynika, że $e(P) < F_3 = 2$, czyli zbiór P ma tylko jedno rozszerzenie liniowe, więc jest już posortowany. Dla $n = 1$ zachodzi $e(P) < F_4 = 3$, czyli P ma co najwyżej dwa rozszerzenia liniowe, które można rozróżnić jednym porównaniem.

Założmy teraz, że twierdzenie jest prawdziwe dla $n - 1$ i $n - 2$. Niech $e(P) < F_{n+3}$. Wybieramy dwa porównania, aby spełnić nierówność $e(P) \geq e(R) + e(S)$, gdzie R i S oznaczają zbiory częściowo uporządkowane otrzymane odpowiednio po pierwszym i drugim porównaniu. Z własności liczb Fibonacciego wynika, że zachodzi przynajmniej jedna z nierówności $e(R) < F_{n+2}$ lub $e(S) < F_{n+1}$. Z założenia indukcyjnego w pierwszym przypadku możemy posortować R za pomocą co najwyżej $n - 1$ porównań, a w drugim posortować S za pomocą co najwyżej $n - 2$ porównań. Zatem w obu przypadkach możemy dokończyć sortowanie P tak, aby nie przekroczyć n porównań.

Twierdzenie 2. Jeśli hipoteza o złotym podziale jest prawdziwa, to

$$\sup_P \frac{C(P)}{\log_\varphi e(P)} = 1.$$



W powyższym twierdzeniu kres górny jest po wszystkich skończonych zbiorach częściowo uporządkowanych, których dotyczy hipoteza złotego podziału, czyli skończonych i nieuporządkowanych liniowo. Niech P będzie takim zbiorem częściowo uporządkowanym. Niech n będzie liczbą porównań wymaganych do jego posortowania ($n \geq 1$ i nie można go posortować za pomocą $n - 1$ porównań). Z poprzedniego twierdzenia wynika, że $e(P) \geq F_{n+2}$. Wiadomo, że ciąg Fibonacciego spełnia nierówność $F_{n+2} > \varphi^n$ dla $n \geq 1$, zatem

$$\frac{C(P)}{\log_\varphi e(P)} \leq \frac{n}{\log_\varphi F_{n+2}} < 1.$$

Linial wskazał ciąg zbiorów częściowo uporządkowanych L_n , nazywanych drabinami, takich że L_n ma n elementów, $C(L_n) = n - 1$ oraz $e(L_n) = F_{n+1}$. Rysunek u dołu strony pokazuje diagramy Hassego kilku początkowych zbiorów L_n i pozwala odgadnąć regułę ich konstrukcji oraz genę ich nazwy.

Diagram Hassego jest to sposób przedstawienia zbioru częściowo uporządkowanego (X, \preceq) za pomocą grafu nieskierowanego. Elementy przedstawia się jako węzły, a relacje między elementami zaznacza się, łącząc te węzły krawędziami. Przy czym rysuje się tylko niezbędne krawędzie. Jeśli $x \preceq y$, to element x rysuje się niżej niż element y , a krawędź między nimi rysuje się tylko wtedy, gdy nie istnieje taki element $z \in X \setminus \{x, y\}$, że $x \preceq z \preceq y$.

Ponieważ

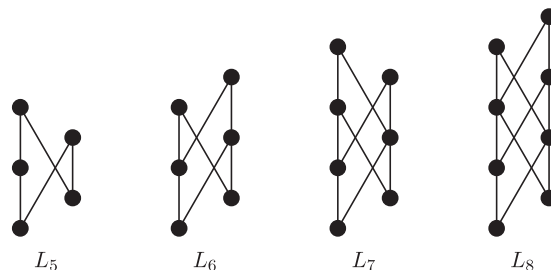
$$F_n = \frac{\varphi^n - (1 - \varphi)^n}{\sqrt{5}},$$

więc mamy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{C(L_n)}{\log_\varphi e(L_n)} = 1.$$

Z powyższych rozważań wnioskujemy, że postulowanego ograniczenia tego $C(P) \leq \log_\varphi e(P)$ nie da się już poprawić. Równość zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy P jest liniowo uporządkowany – wtedy $e(P) = 1$ i $C(P) = 0$. Zauważmy też, że $\log_{1.5} n > \log_\varphi n > \log_2 n$ dla $n > 1$. Nieco nieformalnie można powiedzieć, że podczas sortowania każde porównanie może zmniejszyć średnio liczbę rozszerzeń liniowych przynajmniej o współczynnik złotej proporcji. Tak właśnie jest dla drabin. Chcąc posortować drabinę L_n , należy porównać dwa jej elementy maksymalne. W wyniku zbiór jej rozszerzeń liniowych o licznosci F_{n+1} zostaje podzielony na dwa podzbiory o licznosci odpowiednio F_n i F_{n-1} , a problem redukuje się do posortowania odpowiednio drabiny L_{n-1} lub L_{n-2} .

Element maksymalny w zbiorze częściowo uporządkowanym (X, \preceq) jest to taki element $x \in X$, że nie istnieje element $y \in X \setminus \{x\}$, dla którego $x \preceq y$.

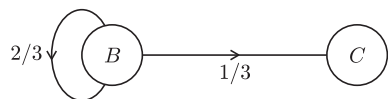


O długowiecznych pchłach i twierdzeniu ergodycznym, czyli co dzieje się z łańcuchami Markowa po długim czasie

Katarzyna PIETRUSKA-PALUBA*

Przypomnijmy jedno z zagadnień, którym zajmowaliśmy się w pierwszej części artykułu (*Delta* 9/2013). Pchła poruszała się między ziemią (Z), psem (P), kotem (K) i człowiekiem (C), za każdym razem przeskakując w jedno z pozostałych dopuszczalnych położeń. Prawdopodobieństwo wyboru każdego docelowego miejsca skoku było takie samo i równe $1/3$. W momencie, gdy pchła wskakiwała na człowieka – ginęła. Wyliczyliśmy, że średni czas życia pchły wynosi 3.

Zastanówmy się teraz nad nieco innym pytaniem. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że pchła nadal będzie żyła po wykonaniu n skoków, czyli – oznaczając przez T moment śmierci pchły – ile wynosi $\mathbb{P}(T > n)$? Odpowiedź jest prosta: w każdym swoim skoku pchła albo wskoczy na człowieka (prawdopodobieństwo $1/3$), albo przejdzie do stanu bezpiecznego (oznaczymy go B – rys. 1) – z prawdopodobieństwem $2/3$.



Rys. 1

Moment śmierci to moment pierwszej wizyty w stanie C . Zatem szukane prawdopodobieństwo to prawdopodobieństwo przebycia n -odcinkowej drogi $B \rightarrow B \rightarrow B \rightarrow \dots \rightarrow B$, czyli $2/3 \cdot 2/3 \cdot \dots \cdot 2/3 = (\frac{2}{3})^n$. Wielkość ta maleje wykładniczo i szybko staje się bliska zeru. Na przykład prawdopodobieństwo tego, że pchła będzie żyła po 10 skokach, to około 0,017, a po 30 skokach: $5,22 \cdot 10^{-6}$.

Gdy prawdopodobieństwa przeskoków nie będą zupełnie jednolite, lecz powiedzmy następujące:

$$p_{ZC} = p_{ZK} = p_{ZP} = 1/3, \quad p_{KP} = p_{PK} = 3/4, \quad p_{KC} = p_{PC} = 1/4,$$

albo, na przykład,

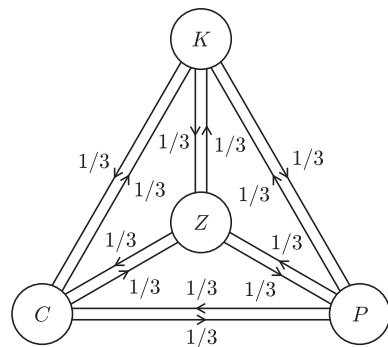
$$p_{ZC} = \mu, \quad p_{ZK} = p_{ZP} = \frac{1}{2}(1 - \mu), \quad p_{KC} = p_{PC} = \rho, \quad p_{KP} = p_{PK} = (1 - \rho),$$

to nawet dla niewielkich, byleby wciąż dodatnich wartości μ i ρ , prawdopodobieństwo przeżycia będzie nadal wykładniczo szybko malało wraz z upływem czasu.

W pierwszym przypadku będziemy mieli ograniczenie $\mathbb{P}(T > n) \leq (\frac{3}{4})^n$, a w drugim – $\mathbb{P}(T > n) \leq \max((1 - \mu)^n, (1 - \rho)^n)$.

Czytelniku, udowodnij tę nierówność!

W sytuacji takiej jak opisana zachowanie po długim czasie nie jest ciekawe: pchła po skończonym czasie zginie (prawie na pewno), a prawdopodobieństwo przeżycia wykładniczo zanika.



Rys. 2

No to zrezygnujmy z eksterminacji insektów i przypuśćmy, że pchła może skakać, jak długo chce. Rozpatrzmy dwa przypadki: pierwszy, w którym pchła przeskakuje z człowieka z równym prawdopodobieństwem na ziemię, psa i kota (rys. 2), oraz bardziej złożony, kiedy człowiek strąca pchłę na podłogę z prawdopodobieństwem $1/2$, a z prawdopodobieństwami po $1/4$ pchła przeskakuje na jedno ze zwierząt; z kolei z ziemi pchła skacze z takim samym prawdopodobieństwem na człowieka, psa i kota, a ponadto kiedy pchła jest na zwierzęciu, to z prawdopodobieństwem $3/4$ przeskakuje na drugie zwierzę, a z prawdopodobieństwem $1/4$ – na człowieka (rys. 3).

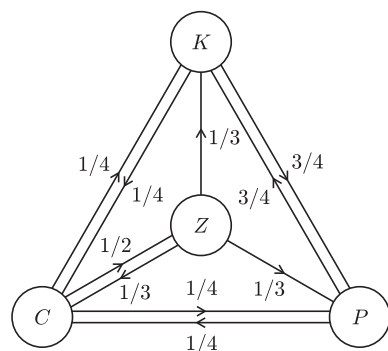
W przypadku pierwszym (kiedy graf ma postać taką, jak na rysunku 2) zdrowy rozsądek podpowiada, że po długim czasie wpływ miejsca startu na to, gdzie pchła znajdzie się w danej chwili, wygasa, i że dla każdego ze stanów prawdopodobieństwo zastania tam pchły w danym momencie staje się w przybliżeniu równe $1/4$ (bo przecież pchła gdzieś być musi). Oznaczmy taki rozkład przez $\mu = (\mu_Z, \mu_C, \mu_K, \mu_P) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$. Ma on następującą ciekawą własność: jeżeli X_n to położenie pchły w chwili n , wtedy zakładając, że w chwili n zmienna X_n ma rozkład μ (czyli $\mathbb{P}(X_n = Z) = \mathbb{P}(X_n = C) = \mathbb{P}(X_n = K) = \mathbb{P}(X_n = P) = \frac{1}{4}$), dostaniemy, że X_{n+1} ma też rozkład μ .

Sprawdźmy:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{n+1} = Z) &= \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = C) \mathbb{P}(X_n = C) + \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = K) \mathbb{P}(X_n = K) + \\ &\quad + \mathbb{P}(X_{n+1} = Z | X_n = P) \mathbb{P}(X_n = P) = \\ &= p_{CZ} \mathbb{P}(X_n = C) + p_{KZ} \mathbb{P}(X_n = K) + p_{PZ} \mathbb{P}(X_n = P) = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_n = Z), \end{aligned}$$

i tak samo dla pozostałych położeń.

Rozkład o takiej własności nazywamy *rozkładem stacjonarnym* dla naszego łańcucha Markowa.



Rys. 3

*Instytut Matematyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

Zastanówmy się, czy w drugiej sytuacji, a więc dla łańcucha Markowa o grafie jak z rysunku 3, też istnieje rozkład stacjonarny?

Za pomocą takiego samego rachunku jak wyżej obliczamy, że

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = Z) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_n = C), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = C) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = K) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = P), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = K) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = C) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = P), \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = P) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(X_n = Z) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_n = C) + \frac{3}{4}\mathbb{P}(X_n = K), \end{cases}$$

czyli składowe rozkładu stacjonarnego muszą spełniać układ równań:

$$\begin{cases} \mu_Z = \frac{1}{2}\mu_C, \\ \mu_C = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_K + \frac{1}{4}\mu_P, \\ \mu_K = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_C + \frac{3}{4}\mu_P, \\ \mu_P = \frac{1}{3}\mu_Z + \frac{1}{4}\mu_C + \frac{3}{4}\mu_K. \end{cases}$$

Układ ten jest zależny; przekształcając go, otrzymujemy: $\mu_C = 2\mu_Z$, $\mu_K = \mu_P = \frac{10}{3}\mu_Z$. Mamy jednak dodatkową informację – wiemy przecież, że $\mu_Z + \mu_C + \mu_K + \mu_P = 1$. Biorąc to pod uwagę, dostaniemy:

$$\mu_Z = \frac{3}{29}, \quad \mu_C = \frac{6}{29}, \quad \mu_K = \mu_P = \frac{10}{29}.$$

A zatem wyznaczyliśmy rozkład stacjonarny. Można też łatwo wywnioskować, że jest on w tym przypadku jedyny.

Czy samo wyznaczenie rozkładu stacjonarnego coś mówi nam o zachowaniu procesu po długim czasie? Okazuje się, że tak – wynika to z jednej z wersji tak zwanego twierdzenia ergodycznego dla łańcuchów Markowa. Aby zwięźle je wysłowić, wprowadźmy kilka oznaczeń. Niech $S = \{E_1, E_2, \dots, E_M\}$ będzie przestrzenią stanów dla łańcucha (w naszym zadaniu mamy $S = \{Z, C, K, P\}$). Dalej, dla $E_i, E_j \in S$ oznaczmy przez $p_{ij}^{(n)}$ prawdopodobieństwo

$$p_{ij}^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = E_j | X_0 = E_i).$$

Jest to tak zwane prawdopodobieństwo przejścia w n krokach. Zakładamy ponadto, że dla dowolnego $k = 1, 2, \dots$ mamy

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = E_j | X_k = E_i) = \mathbb{P}(X_n = E_j | X_0 = E_i)$$

(ta własność nazywa się *jednorodnością łańcucha w czasie*). Dla $E_i \in S$, okresem stanu E_i nazywamy liczbę

$$o(E_i) = \text{NWD}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}.$$

Gdy wszystkie stany $E_i \in S$ mają okres równy 1, to łańcuch Markowa nazywa się nieokresowym.

Jesteśmy teraz gotowi, by sformułować potrzebną nam wersję twierdzenia ergodycznego.

Twierdzenie. Niech łańcuch Markowa o przestrzeni stanów $S = \{1, 2, \dots, M\}$ będzie nieokresowy i jednorodny w czasie. Ponadto założmy, że dla dowolnych $i, j \in S$ istnieje takie n , że $\mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i) > 0$. Wtedy istnieje dla niego dokładnie jeden rozkład stacjonarny μ , a ponadto dla dowolnych $i, j \in S$ mamy

$$p_{ij}^{(n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mu_j.$$

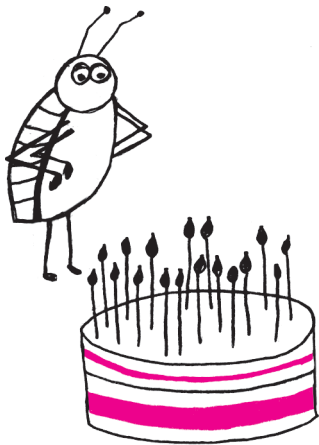
Nasz łańcuch spełnia założenia tego twierdzenia: łatwo sprawdzamy, że jest on nieprzywiedlny, a co do braku okresowości – mamy np. $p_{ZZ}^{(2)} > p_{ZC}p_{CZ} > 0$ oraz $p_{ZZ}^{(3)} > p_{ZK}p_{KC}p_{CZ} > 0$, czyli $o(Z) = 1$; podobnie dla pozostałych stanów.

Tak naprawdę to nieokresowości pozostałych stanów nie musimy sprawdzać bezpośrednio: wiadomo bowiem, że jeżeli E_i i E_j są takimi stanami, że dla pewnych m_0, n_0 jest $p_{ij}^{(n_0)} > 0$ oraz $p_{ji}^{(m_0)} > 0$, to $o(E_i) = o(E_j)$.

Zadanie. Udowodnić powyższe stwierdzenie.

A zatem – mając wyznaczone rozkłady stacjonarne – możemy zastosować twierdzenie ergodyczne i wywnioskować, że w przypadku łańcucha o grafie z rysunku 2 prawdopodobieństwo tego, że pchła będzie w konkretnym stanie, będą faktycznie wszystkie zmierzały do $1/4$, natomiast dla łańcucha o grafie 3 asymptotyczne prawdopodobieństwo tego, że pchła będzie na ziemi, to $3/29$, na człowieku – $6/29$, a na kocie lub na psie – $10/29$.

Można zinterpretować to też następująco: wpuściwszy do pokoju mnóstwo pcheł (N) i każąc im się poruszać zgodnie z zasadami naszego łańcucha, po długim czasie około $\frac{3}{29}N$ pcheł zastaniemy na ziemi, $\frac{6}{29}N$ – na człowieku, a najbardziej zapchlone będą zwierzęta: po $\frac{10}{29}N$ będzie na kocie i na psie.



Łańcuch Markowa o założonej w twierdzeniu własności nazywamy nieprzywiedlnym.

Czytelnika zainteresowanego takimi i pokrewnymi zagadnieniami odsyłamy do książek:

- [1] William Feller, *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*, tom I, wyd. III, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2012.
- [2] Jacek Jakubowski, Rafał Sztencel, *Wstęp do teorii prawdopodobieństwa*, wyd. IV, Script, Warszawa 2010.

Wartościowe obserwacje gwiazd zmiennych amatorskim teleskopem

Magdalena OTULAKOWSKA-HYPKA*



Rozwiązanie zadania F 846.

Ciecz, obracając wirnik turbiny, zmniejsza swoją prędkość. Przyjmijmy, że za turbiną, z dala od niej, ciecz płynie z prędkością v_2 . Moc przekazana wirnikowi turbiny równa jest stracie energii kinetycznej w jednostce czasu

$$P = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \frac{dm}{dt},$$

gdzie $\frac{dm}{dt}$ oznacza masę cieczy przepływającej przez powierzchnię wirnika w jednostce czasu. Z drugiej strony, moc ta równa jest iloczynowi siły F , z jaką ciecz działa na wirnik (siła ta jest przeciwna do siły działającej na ciecz), i prędkości v przepływu cieczy przez powierzchnię S . Siła F równa jest zmianie pędu cieczy w jednostce czasu, czyli $F = (v_1 - v_2) \frac{dm}{dt}$, a więc

$$P = Fv = (v_1 - v_2)v \frac{dm}{dt}.$$

Przyrównując oba wyrażenia na P i korzystając ze współliniowości wektorów v_1 , v_2 i v , wnioskujemy, że $v = \frac{1}{2}(v_1 + v_2)$. Otrzymujemy zatem

$$P = \frac{1}{2}(v_1^2 - v_2^2) \frac{1}{2}(v_1 + v_2) \rho S = \\ = \frac{1}{4} \rho S v_1^3 (1+x)(1-x^2),$$

gdzie $x = v_2/v_1$. Jak łatwo sprawdzić, dla $x = 1/3$ moc P osiąga wartość maksymalną, która wynosi

$$P_{\max} = \frac{16}{27} \rho S v_1 \frac{v_1^2}{2},$$

czyli jest równa $16/27$ energii docierającej przez powierzchnię S w jednostce czasu.

Uwaga: Podczas przepływu przez powierzchnię wirnika (i spowalniania) rurka prądu nieściśnawej cieczy ulega poszerzeniu – pole jej przekroju daleko przed wirnikiem wynosi A_1 i A_2 daleko za nim, przy czym $A_1 v_1 = S v = A_2 v_2$. Poszerzenie rurki prądu następuje w pobliżu powierzchni S . Obliczona powyżej skalarna wielkość v to średnia wartość składowej normalnej prędkości cieczy przepływającej przez powierzchnię S .

Rozgwieżdżone nocne niebo może dostarczyć nam niesamowitych wrażeń estetycznych. Jeśli postanowimy mu się przyjrzeć, szczególnie z daleka od światła miasta, naszym oczom ukaże się piękno migoczących gwiazd. Gdy warunki do obserwacji są wystarczająco dobre, gołym okiem da się dostrzec różne kolory i jasności ciał niebieskich. Z kolei użycie nawet małego teleskopu pozwala na docenienie jeszcze większej ilości gwiazdnych atrakcji. Między innymi dzięki temu, że jasność niektórych gwiazd jest zmienna, obserwacje takich obiektów są bardzo interesujące i niemal zawsze możemy mieć pewność, że coś ciekawego się wydarzy.

Jasność różnych typów gwiazd może zmieniać się od tysięcznych części do wielu wielkości gwiazdowych (magnitudo, w skrócie mag) w czasie od ułamków sekundy do lat. Współczesne katalogi zawierają parametry ponad stu tysięcy gwiazd zmiennych, a kolejne tysiące kandydatek czeka na weryfikację. Powody zmian jasności gwiazd mogą być różne. Rozróżniamy gwiazdy zmienne geometrycznie, których zmiany jasności są konsekwencją orientacji obiektu względem obserwatora. Przykładem są układy podwójne, w których oba składniki obiegają po swoich orbitach wspólny środek masy. Jeżeli mamy szczęście obserwować tego typu układ pod odpowiednim kątem, czyli mniej więcej w płaszczyźnie orbity, to możemy dostrzec naprzemienne zaćmienia jednej gwiazdy przez drugą. Gdy jedna z nich chowa się za drugą podczas ruchu po orbicie, jasność układu spada, natomiast kiedy widzimy oba składniki, jasność wzrasta. Innym powodem zmienności gwiazd są procesy fizyczne zachodzące w samej gwiazdzie lub w otaczającej ją materii. Na przykład gwiazdy pulsujące cyklicznie zmieniają swoje rozmiary na skutek procesów zachodzących w ich wnętrzach. Czasami układy podwójne są tak ciasne, że następuje w nich przepływ materii z jednego składnika na drugi. Takie obiekty są czasem zwane gwiazdami kataklizmicznymi, ponieważ przepływ materii może być powodem różnorodnych „kataklizmów”, czyli wybuchów, obserwowanych jako pojaśnienia układu.

Dlaczego, poza tym, że obserwacje gwiazd zmiennych są ciekawe same w sobie, są one również ważne? Otóż dzięki nim możemy lepiej poznać właściwości fizyczne gwiazd i ich ewolucję. Na przykład zmienne cefeidy odgrywają niezwykle ważną rolę przy wyznaczaniu odległości do dalekich galaktyk oraz przy szacowaniu wieku Wszechświata, zmienne typu Mira pozwalają zrozumieć dalsze etapy ewolucji naszego Słońca, a supernowe wykorzystuje się do pomiarów tempa ekspansji Wszechświata i badania hipotez związanych z ciemną energią. Poszukiwanie życia na pozasłonecznych planetach wiąże się również bardzo często z obserwacją zmienności jasności gwiazd. Istnieje wiele profesjonalnych programów badawczych, które poświęcone są obserwacjom gwiazd zmiennych, jednak nie zapewniają one nieprzerwanej obserwacji wszystkich interesujących obiektów. Znaczna część długookresowych danych fotometrycznych pochodzi z amatorskich obserwacji, wykonanych przy użyciu prywatnych teleskopów prawdziwych pasjonatów astronomii. Wyniki takich obserwacji coraz częściej umieszczane są na specjalnych portalach internetowych, z których potem wielu profesjonalnych astronomów korzysta podczas pracy naukowej. Dzięki nim możliwe jest, na przykład, przeprowadzenie bardzo szczegółowej analizy długookresowej zmienności gwiazd, dokładne zaplanowanie czasu obserwacji ciekawszych obiektów, np. przy użyciu obserwatoriów kosmicznych, porównanie zmienności gwiazd obserwowanej w paśmie optycznym z innymi pasmami promieniowania, albo też z komputerowymi modelami teoretycznymi. Poniżej przedstawiam przykład obserwacji gwiazdy kataklizmicznej, a konkretnie nowej karłowatej YZ Cnc. Pokazuje on, jak ogromną wartość naukową mogą mieć amatorskie obserwacje fotometryczne.

*doktorantka Centrum Astronomicznego im. M. Kopernika w Warszawie

YZ Cnc jest jedną z najbardziej aktywnych gwiazd nowych karłowatych typu SU UMa, tzn. układem kataklizmicznym, w którym obserwujemy bardzo częste

Guider to urządzenie ułatwiające bardzo precyzyjne prowadzenie (z ang. *guiding*) teleskopów. Wykorzystuje on dowolny jasny obiekt i „śledząc” jego położenie w polu widzenia, wyznacza dodatkowe korekty ruchu teleskopu. Dzięki temu poprawia dryf obrazu między jednym zdjęciem a drugim, który wynika, na przykład, z osiadania grawitacyjnego głównego lustra lub uginającej się nieznacznie tuby. Taki sposób prowadzenia teleskopu jest bardzo precyzyjny.



wybuchy oraz superwybuchy. Zwykle wybuchy dla tego obiektu to trwające 3–4 dni pojaśnienia o około 3 mag od poziomu minimalnej jasności. Superwybuchy natomiast pojawiają się około dziesięć razy rzadziej i trwają aż kilkanaście dni na poziomie o 1 mag wyższym od zwykłych wybuchów. Obserwacje te zostały wykonane przeze mnie i mojego promotora, dr. hab. Arkadiusza Olecha, 4 marca 2013 r. na tarasie przed Centrum Astronomicznym im. M. Kopernika PAN, blisko centrum Warszawy. Użyliśmy typowego sprzętu amatorskiego: teleskopu Maksutowa 127 mm o ogniskowej 1500 mm przytwierdzonego do montażu Sky Watcher HEQ5 SynTrek, wyposażonego w kamerę CCD Orion G3. Ten zestaw jest tylko jednym z wielu dostępnych na rynku, a jego cena to kilka tysięcy złotych (ceny, na szczęście, coraz szybciej maleją i stają się coraz bardziej przystępne dla obserwatorów-amatorów; istnieje też rynek wtórny, na którym ceny potrafią być o połowę niższe). Warto tutaj dodać, że nie użyliśmy żadnego guidera i montaż „poradził sobie” z trwającymi 75 sekund ekspozycjami przy tak dużej ogniskowej.

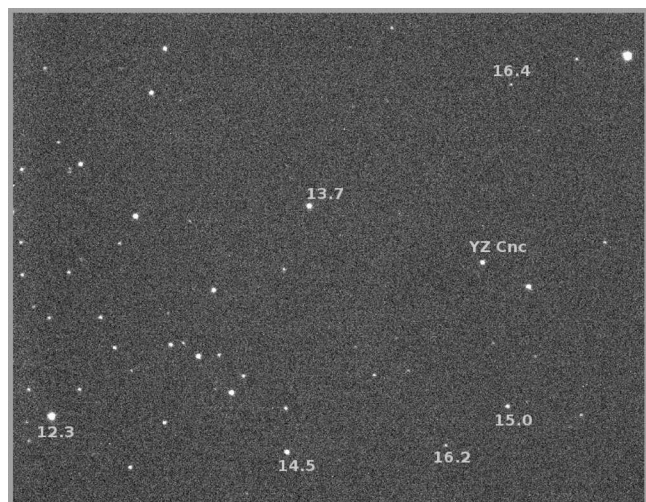
Obserwacje danego obiektu najlepiej jest wykonywać przez kilka godzin bez przerwy, zależnie od długości okresu zmienności gwiazdy. W idealnym przypadku powinien być on w całości pokryty obserwacjami. Pole wokół gwiazdy YZ Cnc obserwowaliśmy przez około półtorej godziny, wykonując ekspozycje o czasie 75 sekund. Na każdym ze zdjęć znajduje się gwiazda zmienna, którą badamy, oraz inne gwiazdy przydatne do porównania jasności gwiazdy zmiennej (rys. 1). Następnie wykonaliśmy fotometrię interesujących nas gwiazd, czyli pomiar ich jasności, używając darmowego oprogramowania do redukcji danych. Najpierw wykorzystaliśmy program *IRAF* (<http://www.iraf.net>), który został stworzony przez National Optical Astronomy Observatory (NOAO). *IRAF* posłużył do wykonania wstępnej redukcji danych, czyli poprawek niedoskonałości i szumów kamery CCD.

Następnie do wykonania fotometrii wykorzystaliśmy program *Daophot*, napisany przez Petera Stetsona (<http://www.star.bris.ac.uk/~mbt/daophot>). Wybór oprogramowania jest sprawą indywidualną i zależy od używanego systemu operacyjnego, możliwości finansowych oraz doświadczenia użytkownika. Dobra wiadomość jest taka, że wybór jest całkiem spory, bo dostępnych jest wiele różnych programów służących do wykonania fotometrii w dość zautomatyzowany sposób.

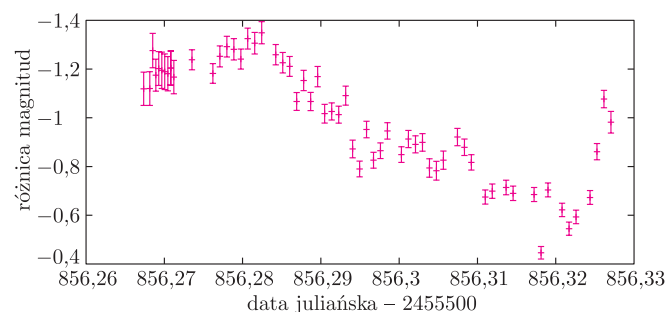
Okazało się, że jasność YZ Cnc to około 14 wielkości gwiazdowych z błędami na poziomie 0,01 mag. Najślabsze zarejestrowane gwiazdy mają jasność około 17 mag.

Naszym celem było narysowanie wykresu zależności jasności od czasu obserwacji, czyli krzywej zmian blasku. Zwyczajowo czas wyraża się w takim przypadku w tzw. dniach juliańskich. (JD; jest to liczba dni, która upłynęła od 1 stycznia roku 4713 p.n.e. Jest to ciągła rachuba czasu. Według niej można przypisać każdemu dniu następującemu po tej dacie jednoznaczny numer stosowany głównie do obliczeń astronomicznych. Taka ciągła rachuba czasu jest bardzo użyteczna przy pracy z danymi astronomicznymi.)

Efekt obserwacji obrazuje rysunek 2. Widać na nim wyraźnie zmienność gwiazdy YZ Cnc. Wiemy już, że gwiazda ta należy do nowych karłowatych typu SU UMa, a więc na jej krzywej zmian blasku możemy rozróżnić liczne wybuchy i superwybuchy. Powstają one w dysku akrecyjnym tworzącym się wokół białego karła, który przechwytuje materię ze swojego towarzysza – gwiazdy ciągu głównego. Wybuchy i superwybuchy to jednak



Rys. 1. Obserwowane pole YZ Cnc z zaznaczonymi jasnościami sąsiadujących obiektów (zdjęcie przed redukcją danych).



Rys. 2. Wynikiem ciągu obserwacji jest krzywa zmian blasku, czyli zależność (tutaj względnej) jasności od czasu, który podano w dniach juliańskich.



zjawiska trwające znacznie dłużej od czasu prezentowanych tutaj obserwacji. Skąd zatem zmiana jasności, którą zaobserwowaliśmy? Takie częste i niewielkie, bo mające amplitudy o wartości ułamka magnitudy, zmiany jasności nowych karłowatych można nazwać supergarbami (*superhumps*). Ich natura nie jest do końca znana i istnieje kilka modeli teoretycznych, które starają się wyjaśnić ich pochodzenie. Model TTI (*thermal-tidal instability*), czyli model zakładający istnienie niestabilności termiczno-pływowych w dysku akrecyjnym takiego układu kataklizmicznego (Y. Osaki, 1996), tłumaczy supergarby jako efekt rotacji linii apsyd dysku wydłużonego w wyniku zaburzeń pływowych spowodowanych przez towarzysza białego karła. Takie zaburzenie jest największe, gdy materia poruszająca się w wydłużonym dysku akrecyjnym wejdzie w rezonans 3 : 1 z okresem orbitalnym układu. Wiadomo jednak, że model TTI nie rozwiązuje całego problemu, ponieważ nie zgadza się ze wszystkimi obserwacjami. Alternatywą dla TTI jest model opierający się na zwiększonym przepływie masy (*enhanced mass transfer model*, EMT, J. Smak, 2004) na białego karła. Efekt ten związany jest bezpośrednio z napromieniowaniem przepływającej materii przez gwiazdę ciągu głównego i jest szczególnie istotny dla bardzo ciasnych układów podwójnych. Supergarby według tego modelu są rezultatem bardzo

zmiennego tempa przepływu materii, które spowodowane jest zmiennym napromieniowaniem towarzysza białego karła. Można je zatem wytłumaczyć jako efekt wzmożonej dyssypacji energii kinetycznej strumienia przepływającej materii (J. Smak, 2009).

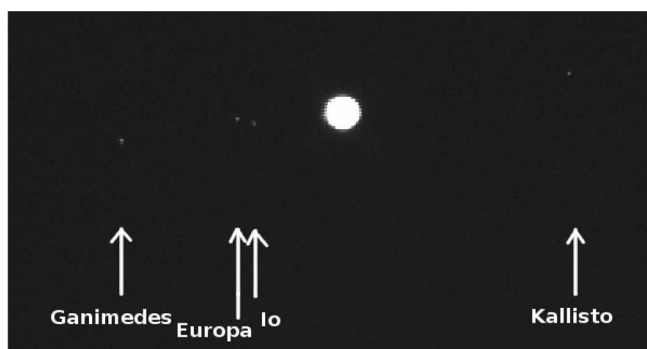
Okres obserwowanych supergarbów P_s jest bezpośrednio związany z okresem orbitalnym P_o układu zależnością otrzymaną po raz pierwszy przez Stolza i Schoembsa w roku 1984:

$$(P_s - P_o)/P_o = -3,3 \cdot 10^{-2} + 0,84P_s \text{ dni.}$$

Dzięki tej zależności, na podstawie obserwacyjnie zmierzonego P_s , możemy w prosty sposób wyznaczyć wartość okresu orbitalnego danego układu gwiazd, czyli jeden z jego podstawowych parametrów.

Warto też podkreślić, że poziom 17,5 wielkości gwiazdowych uzyskany małym teleskopem z centrum dużego miasta to genialna sprawa. Dla porównania, na początku lat 90. XX wieku teleskop o średnicy 60 cm w Obserwatorium Astronomicznym w Ostrowiku pod Warszawą, wyposażony w dobry fotometr, miał zasięg do około 12 wielkości gwiazdowej. Gorąco zachęcamy wszystkich Czytelników do sprawdzenia swoich sił w praktyce. Jak widać, nawet z bardzo oświetlonego miejsca i przy użyciu małego teleskopu możliwe jest wykonanie wartościowych naukowo obserwacji. Wyniki warto przesłać do jednego z portali internetowych zbierających fotometryczne dane od obserwatorów z całego świata. Wśród najbardziej znanych anglojęzycznych stron znajduje się The American Association of Variable Star Observers (AAVSO) – <http://www.aavso.org> oraz Center for Backyard Astrophysics (CBA) – <http://cbastro.org/>. Zawierają one dużo informacji przydatnych dla początkujących obserwatorów.

Oprócz czysto naukowego aspektu obserwacje astronomiczne pozwalają przede wszystkim bezpośrednio obcować z pięknem nocnego nieba. Na zakończenie i na zachętę: zdjęcia Jowisza i jego naturalnych satelitów, a także powierzchni Księżyca, wykonane za pomocą amatorskiego sprzętu opisanego powyżej.



Przykładowe zdjęcia wykonane za pomocą zestawu użytego do obserwacji YZ Cnc. Zdjęcia były robione teleskopem Newton 200/1000, przy użyciu montażu SkyWatcher.

O (ludzkim) myśleniu

Zapytano pięciu polskich filozofów nominowanych do Nagrody im. Barbary Skargi, czym jest myślenie? Uważam to bardzo ogólne pytanie, kierowane nie do neurobiologów, za ważne i nakłaniające do „myślenia”. Sama, oczywiście, przez kilka minut zastanawiałam się, jak bym odpowiedziała na to pytanie, nie będąc ani neurobiologiem, ani filozofem.

Filozofowie odpowiadali dość podobnie i – co ciekawe – przez przeczenie: czym nie jest myślenie. Najbardziej podobało mi się rozważanie, że myślenie jest potyczką z bezmyślnością. Podobną sztuczkę zastosowałam kiedyś przy pomocy zaprzyjaźnionego astrofizyka w poszukiwaniu odpowiedzi na pytanie o znaczenie wolności w nauce. Doszliśmy razem do wniosku, że łatwiej dać przykłady, co się działo z nauką BEZ wolności.

Uczestnicząc w debacie festiwalowej o znaczeniu nauki w ogóle, zostałam zaproszona do dyskusji o pytaniach, na które nauka NIE odpowie. Miałam się zająć naukami biologicznymi.

Podzieliłam całość na cząstkowe pytania.

- Problemy, na które na razie nauka nie odpowiada, ale kiedyś odpowie. Wynika to z braku szeroko rozumianych narzędzi badawczych i z braku dostępności obiektów badawczych. Oto wybrany z wielu przykład: nie umiemy obserwować życia komórki od wewnątrz, co mogłoby owocować próbami sterowania przyżyciowo komórką. Nadzieję na takie badania daje choćby Nagroda Nobla 2013 w fizjologii i medycynie. Oczekuję rozwiązania takie zadania, jak wytworzenie biologicznych tkanek i narządów „do wymiany”.
- Problemy, które nie wiemy, czy kiedykolwiek nauka rozwiąże, tu każdemu przychodzi do głowy pytania o mechanizmy działania układu nerwowego, w szczególności mózgu, w szczególności mózgu ludzkiego (znowu element Nagrody Nobla 2013). Wiele jeszcze zrozumiemy, ale czy możemy zrozumieć w pełni? Gdyby tak, to zagrożeniem wydaje się naturalna potrzeba człowieka manipulacji poznanymi choć częściowo mechanizmami. W tej klasie problemów widziałabym też kontrolę nad całą biosferą, w kierunku zachowania przyjaznych życiu warunków. Nie wiem, czy nie mamy tu jednak do czynienia z problemami nie do rozwiązania przez nauki przyrodnicze, na to pole wkracza inżynieria społeczna – bardzo trudna do sterowania przez nas w powyższym kierunku. Przez nas – czyli przez kogo?
- Problem, którego nauka nigdy nie rozwiąże, to powtórzenie warunków, w których powstało życie na Ziemi i poznanie etapów tego procesu. Tyle, jeśli chodzi o patrzenie wstecz. Ale i w przyszłości nie możemy przewidzieć, jaką drogą podąży ewolucja w przyszłych stuleciach i tysiącletniach (jeżeli takowe są do osiągnięcia przez nasz gatunek). Ewolucja nie postępuje w sposób zaplanowany, jest ciągiem różnych przypadków. Wystarczająco ośmieszaliśmy się, planując w XIX wieku wygląd ludzi za 100 lat: małe wątłe nóżki unoszące wielką czaszkę z wielkim (w domyśle) mózgiem. Wraz z końcem naszej planety skończy się też ewolucja.

Istnieją też problemy, których OBECNIE nauka rozwiązywać nie chce. Granice tego „chcenia” są w dużej mierze wyznaczone przez inną naukę: etykę. Te granice też przesuwają się z czasem: wystarczy wspomnieć odwagę lekarzy z byłych wieków, którzy w ukryciu dokonywali pierwszych sekcji zmarłych – w tych czasach był to czyn przestępczy. Dziś nie chcemy ingerować w genom ludzki – komórki rozrodcze czy też zarodek we wczesnym etapie rozwoju, nie zauważając, że ingerencją w genom ludzki jest postęp medycyny i przedłużanie wieku ludzi (także okresu, gdy zdolni są do rozrodu) w dawnych wiekach skazanych na wczesną śmierć.

O genetycznych tabu napiszę przy innej okazji.

Magdalena FIKUS



mała delta

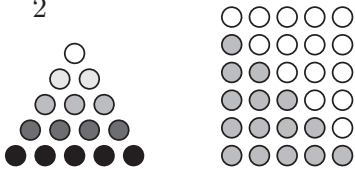
Liczby geometryczne

Od najmłodszych lat każdy z nas poznaje świat liczb, zliczając zabawki, jabłka czy książki. Nikogo nie dziwi zatem przedstawienie liczby 5 jako pięciu kulek. Tylko czy takie przedstawienie może pomóc w odkrywaniu świata komuś, kto ukończył już przedszkole? Okazuje się, że tak – wystarczy uważne spojrzenie i wyobraźnia, a może nam przynieść nieoczekiwane spostrzeżenia.

Spróbujemy poukładać z kulek różne figury, a zaczniemy od trójkątów. Trójkąt o boku n powstaje poprzez ułożenie jednej kulki w wierzchołku, dwóch kulek poniżej, trzech kulek w kolejnym rzędzie i tak dalej, aż do podstawy złożonej z n kulek (jak na rysunku dla $n = 5$). W takim razie taki trójkąt jest złożony z $T_n = 1 + 2 + \dots + n$ kulek (liczbę T_n będziemy nazywać liczbą trójkątną). Jednocześnie, odrobinę przekładając kulki, można z dwóch takich trójkątów ułożyć prostokąt o wymiarach $n \times (n + 1)$. A co to oznacza? Oczywiście:

$$2 \cdot T_n = 2 \cdot (1 + 2 + \dots + n) = n(n + 1),$$

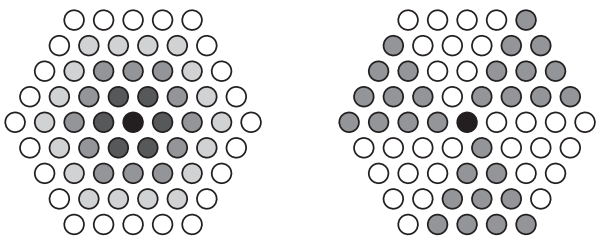
czyli $T_n = \frac{n(n + 1)}{2}$.



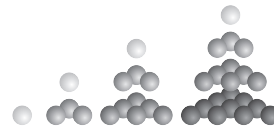
Zachęceni tym małym sukcesem spróbujemy pójść dalej i ułożyć z kulek sześciokąt: wkładamy jedną kulkę w środek, otaczamy ją sześcioma kulkami, te otaczamy dwunastoma kolejnymi i tak dalej.

Do zbudowania sześciokąta o boku n zużywamy więc $S_n = 1 + 6 + 12 + \dots + 6(n - 1)$ kulek (taką liczbę będziemy nazywać liczbą sześciokątną). Czy można ją łatwo obliczyć? Oczywiście – przecież sześciokąt składa się z kulki w środku i sześciu trójkątów, o boku o jeden mniejszym niż bok sześciokąta. W takim razie

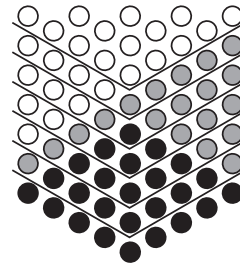
$$S_{n+1} = 1 + 6 \cdot T_n = 1 + 3n(n + 1) = 1 + 3n + 3n^2.$$



Co będziemy budować dalej? Oczywiście można zabawiać się różnymi wielokątami, ale można również zacząć przygodę w trzecim wymiarze – zbudujemy piramidę o podstawie trójkąta.



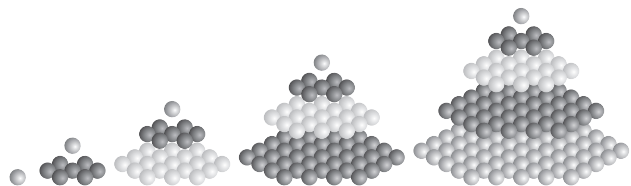
Do zbudowania n poziomów takiego czworościanu potrzebujemy $U_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$. Czyli ile? 1, 4, 10, 20 – co to za liczby? Czy można wyrazić je w inny sposób? Znow pomoże nam układanka, tym razem przestrzenna. Z trzech takich piramid możemy ułożyć graniastosłup o wysokości $n + 2$ i o podstawie trójkąta o boku n :



W takim razie otrzymujemy kolejną własność:

$$3 \cdot U_n = (n + 2) \cdot T_n = \frac{1}{2}n(n + 1)(n + 2).$$

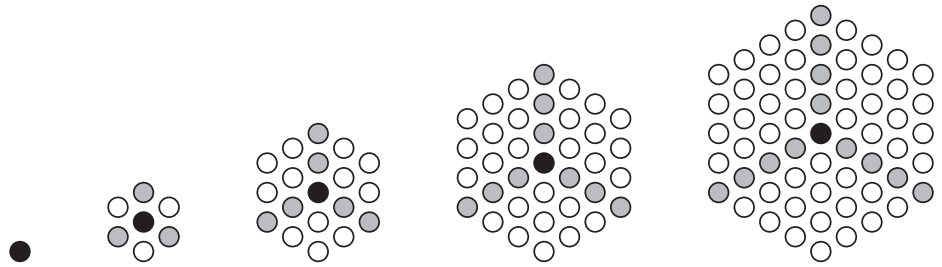
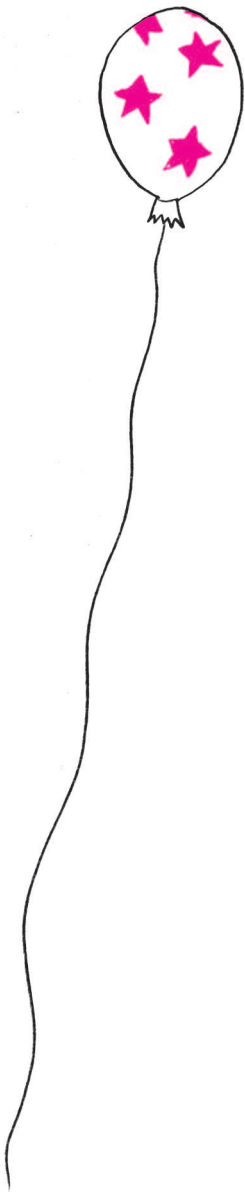
Spróbujemy jeszcze ułożyć piramidy z sześciokątów. Jedna kulka na szczycie, siedem kulek niżej, i tak dalej aż do podstawy z S_n kulek. Zużyliśmy w ten sposób $W_n = S_1 + S_2 + \dots + S_n$ kulek: dla kolejnych n są to liczby 1, 8, 27, 64, ... Chwileczkę! Czyżby to były sześciany liczb naturalnych? Na to wygląda, ale jak się o tym przekonać?



Wystarczy odpowiednio „powyginać” dokładane sześciokąty:

$$S_{n+1} = 1 + 3n + 3n^2$$

kulek można ułożyć w trzy ściany sześcianu o boku $n + 1$. Potem już nietrudno złożyć z kolejnych takich kawałków sześcian:



W ten sposób udało nam się pokazać kolejną zależność między naszymi liczbami:

$$S_1 + S_2 + \dots + S_n = n^3.$$

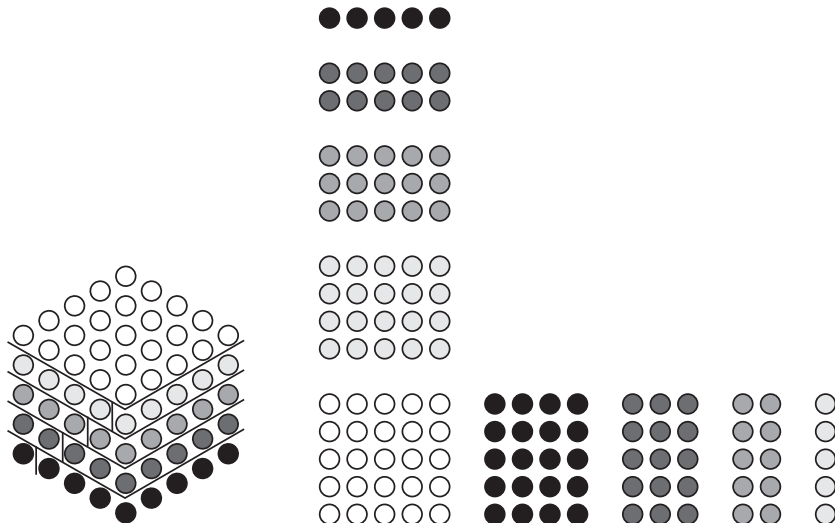
Na zakończenie spróbujemy pójść jeszcze dalej – ułożyć piramidę z sześcianów (choć można traktować ją jako obiekt czterowymiarowy, my będziemy myśleć o niej jako o sześcianach ułożonych jeden na drugim). Ile zużyjemy kulek? Tym razem będzie to

$$Z_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3.$$

I znów możemy przyjrzeć się uważnie tak otrzymanym liczbom:

$$1, 9, 36, 100, \dots$$

Są to kwadraty... liczb trójkątnych! A dlaczego? Wystarczy każdy z sześcianów odpowiednio pociąć i ułożyć z otrzymanych kawałków pasek w kształcie litery L – kolejne takie paski złożą się w kwadrat o boku $1 + 2 + \dots + n = T_n$:



A może da się odgadnąć te wzory bezpośrednio z takiej tabelki?

n	T_n	S_n	U_n	W_n	Z_n
1	1	1	1	1	1
2	3	7	4	8	9
3	6	19	10	27	36
4	10	37	20	64	100
5	15	61	35	125	225
6	21	91	56	216	441

I tak otrzymaliśmy kolejny wzór

$$Z_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = T_n^2.$$

Czytelnik Wytrwały z pewnością odnajdzie jeszcze inne zależności między liczbami geometrycznymi (czyli takimi, które odpowiadają liczbie kulek w pewnych figurach i bryłach). Każda z nich pomaga zrozumieć pewną zależność, której dowodzenie standardowymi metodami może okazać się wcale niełatwe...

Małą Deltę przygotowała Urszula PASTWA
doktorantka, Wydział Matematyki i Nauk Informacyjnych,
Politechnika Warszawska

Ze świata USOS. Część 3 – O układaniu optymalnych planów zajęć w systemie USOS

Krzysztof CIEBIERA*, Marcin MUCHA*

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

W tak dużej organizacji, jaką jest uczelnia wyższa, przy tak dużej liczbie uczestniczących w zajęciach studentów i wykładowców oraz tak bogatej ofercie dydaktycznej, przygotowanie dla wszystkich studentów indywidualnych planów zajęć, zgodnie z ich zainteresowaniami i preferencjami, to duże wyzwanie logistyczne. Wiele uczelni wymaga od studentów samodzielnego wyboru przedmiotów (takich jak *Wstęp do analizy czy Algorytmika*) oraz grup zajęciowych (takich jak grupa ćwiczeniowa numer 3, odbywająca się w środy między 8 a 10). Niektóre przedmioty są prowadzone poza macierzystym wydziałem studenta, np. lektoraty oferowane przez *Szkołę Języków Obcych*, czy zajęcia z wychowania fizycznego prowadzone przez *Studium WF*. **Rejestracja do grup zajęć** polega na tym, że student zapisany na przedmiot wybiera jedną z wielu grup zajęć (takich jak wykład, ćwiczenia, czy laboratorium) tego przedmiotu. Niektóre uczelnie układają plany tak, aby wszystkie zajęcia z jednego przedmiotu odbywały się w tym samym terminie, ale najczęściej grupy ćwiczeniowe mają różne terminy, różnych prowadzących, a nawet różne limity liczby osób. Studenci starają się tak dobrać grupy, aby trafić do lubianych profesorów, uniknąć kolizji i niepotrzebnych okienek między zajęciami. Nie zawsze jest to możliwe. Oto autentyczny (choć dość ekstremalny) plan jednego ze studentów studiującego równoległe dwa kierunki na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego (w skrócie MIM).



	PI	WT	ŚR	CZ	PT
7					
8					
9	WYK			WYK	
10					
11	WYK				
12					
13					
14					
15					
16	WYK				
17					
18					
19					
20					
21					

Wydawać by się mogło, że najprostszą zasadą zapisów jest „kto pierwszy ten lepszy”. Budzi ona jednak wiele kontrowersji, gdyż preferuje studentów mających sprawniejsze łącza internetowe czy komputery, niepotrzebnie stwarza też zagrożenie dla stabilności uczelnianych serwerów. Rozwiązanie zastosowane na Wydziale MIM polega na tym, że w pierwszym kroku zbiera się od studentów ich preferencje, a potem na ich podstawie przydziela studentów do grup. Język do opisu preferencji pozwala na definiowanie podzbiorów grup w kolejności od najbardziej do najmniej pożądanых, a także wskazanie, na które zajęcia student nie zamierza chodzić. Na przykład:

- najbardziej chcę chodzić na {wykład z przedmiotu A do grupy 1, ćwiczenia z przedmiotu A do grupy 1, laboratorium z przedmiotu B do grupy 3},
- w drugiej kolejności mój pożądaný grafik to {wykład z przedmiotu A w grupie 3, ćwiczenia z przedmiotu A w grupie 3, laboratorium z przedmiotu B w grupie 2},
- nie będę uczęszczał na wykład z przedmiotu B (powtarzam przedmiot i chcę chodzić tylko na laboratorium).

Zadaniem programu jest znalezienie takiego przydziału studentów do grup, w którym studenci będą mieli **jak najmniej konfliktów** (zajęć odbywających się w tym samym czasie) i będzie spełnionych **najwięcej preferencji** (wszystkie grupy, na które zapisany jest student, należą do podzbioru odpowiadającego preferencji).

Pierwszy opracowany algorytm ustawiał studentów w losowej kolejności, a następnie w tej kolejności przypisywał ich do grup. Dla każdego studenta sprawdzano wszystkie możliwe przypisania i wybierano najlepsze z nich. Takie rozwiązanie mogłoby wydawać się racjonalne, ale szybko okazało się, że

część studentów (ta, która nie miała szczęścia w losowaniu) była z niego niezadowolona, gdyż ich plany miały wiele kolizji.

Żeby móc poszukiwać rozwiązania optymalnego, trzeba najpierw opisać problem matematycznie i podać **funkcję celu**, która będzie optymalizowana – dokładnie lub w sposób przybliżony. Wprowadziliśmy porządek na przypisaniach i mówimy, że jeśli w planie A jest mniej kolizji niż w planie B, to plan A **jest lepszy** od planu B. Jeśli plany A i B mają tę samą liczbę kolizji, to lepszy jest plan, który spełnia więcej preferencji. Wartość preferencji pojedynczego studenta definiujemy w taki sposób, że spełnienie najgorszej preferencji jest warte 0,1, spełnienie najlepszej warte jest 1,0, a pośrednie preferencje są rozłożone liniowo.

Każdemu przypisaniu odpowiada **kara** w postaci pojedynczej liczby wymiernej, której część całkowita to liczba konfliktów, a część ułamkowa to jeden minus suma preferencji przeskalowana tak, aby wynosiła jeden w przypadku spełnienia wszystkich najlepszych. Spośród wszystkich przypisań poszukujemy takiego, które będzie miało najniższą karę.

Idealnie byłoby, gdyby rozwiązanie miało karę 0, bo wtedy nie byłoby konfliktów, a wszyscy dostaliby to, co chcieli. Jak jednak znaleźć przypisanie o najniższej karze?

Nie można po prostu przeglądać wszystkich możliwych przypisań, gdyż ich liczba jest wykładnicza, trzeba wymyślić coś sprytniejszego. Można udowodnić, że problem jest **NP-trudny**, więc najprawdopodobniej nie istnieje jego wielomianowe rozwiązanie. Można by spróbować poszukiwać dobrych rozwiązań „chaotycznie”, losując dużą ich liczbę i wybierając najlepsze z wylosowanych.



Takie rozwiązanie w przypadku niektórych problemów działa dobrze, w przypadku naszego, niestety, się nie sprawdza. Można spróbować innego algorytmu.

```
najlepsze_przypisanie = wylosuj_przypisanie_startowe();
while masz_jeszcze_czas() do
    potencjalne_przypisanie = zmodyfikuj_losowo(najlepsze_przypisanie);
    if kara(potencjalne_przypisanie) < kara(najlepsze_przypisanie) then
        najlepsze_przypisanie = potencjalne_przypisanie;
return najlepsze_przypisanie;
```

Program ten implementuje odmianę algorytmu **wspinaczki na szczyt** (ang. *hill climbing*), w którym poprzez niewielkie zmiany rozwiązania znajdujemy dobre rozwiązanie. Oczywiście, to rozwiązanie wcale nie musi być najlepsze. Tak napisany program może działać wolno, gdyż dla każdego z potencjalnych przypisań musi policzyć karę, a naturalna implementacja funkcji kara wymaga przejścia przez wszystkie zapisy wszystkich studentów. Można go usprawnić w następujący sposób:

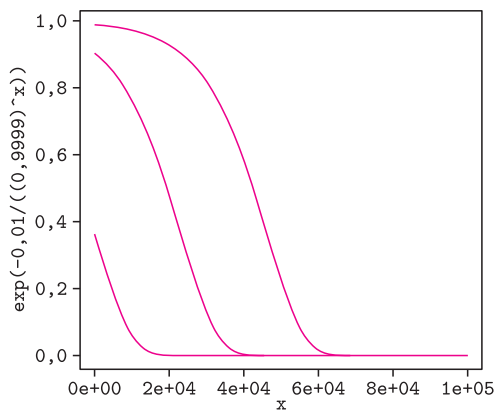
```
najlepsze_przypisanie = wylosuj_przypisanie_startowe();
while masz_jeszcze_czas() do
    mala_modyfikacja = wylosuj_mala_modyfikacje(najlepsze_przypisanie);
    if roznica_kar(najlepsze_przypisanie, mala_modyfikacja) < 0 then
        najlepsze_przypisanie.zaaplikuj_zmiane(mala_modyfikacja);
return najlepsze_przypisanie;
```

Teraz program nie musi liczyć kary w każdym przebiegu pętli, wystarczy, że potrafi policzyć, czy mała modyfikacja poprawia rozwiązanie. Ale jak mogłaby wyglądać mała modyfikacja przypisania? Naturalnym pomysłem byłoby uznanie, że polega ona na przepisaniu studenta z jednej grupy do drugiej, pod warunkiem wszakże, iż nie powoduje to przekroczenia limitu miejsc. W przypadku takiego rozwiązania funkcja `roznica_kar()` jest prosta i szybka (wymaga sprawdzenia jedynie przypisania pojedynczego studenta), ale w praktyce rozwiązanie to się nie sprawdzi. Dlaczego? Bardzo wiele

przedmiotów ma ściśle limity (np. 90 studentów i 6 grup po 15 osób) i żadne pojedyncze przepisanie bez przekroczenia limitu nie jest możliwe. Można rozbudować małe modyfikacje tak, aby dopuszczały wymiany dwóch osób, albo dopuścić możliwość chwilowego przekroczenia limitów. Zdecydowaliśmy się na to drugie rozwiązanie.

Zwiększyliśmy karę o składnik równy liczbie przekroczonych miejsc pomnożonej przez niedużą liczbę naturalną, aby przekroczenie miejsca było ważniejsze od konfliktu studenta, który ma wagę jeden. Zmodyfikowaliśmy też program, aby dopuszczał czasem gorsze rozwiązania.

```
najlepsze_przypisanie = wylosuj_przypisanie_startowe();
while masz_jeszcze_czas() do
    mala_modyfikacja = wylosuj_mala_modyfikacje(najlepsze_przypisanie);
    delta_kary = roznica_kar(najlepsze_przypisanie, mala_modyfikacja);
    if delta_kary < 0 or dopuszczamy_gorsze(delta_kary, czas_do_konca) then
        najlepsze_przypisanie.zaaplikuj_zmiane(mala_modyfikacja);
return najlepsze_przypisanie;
```



Decyzję o tym, czy dopuścić gorsze rozwiązanie, program podejmuje w oparciu o schemat **symulowanego wyżarzania** (ang. *simulated annealing*), którego sposób działania przypomina zjawisko wyżarzania w metalurgii. Załóżmy, że mamy temperaturę, która spada od temperatury początkowej T_0 do zera. W i -tym kroku temperatura T wynosi $(1 - \epsilon)^i \cdot T_0$. Prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszego rozwiązania jest zależne od temperatury i od tego o ile rozwiązanie jest gorsze od poprzedniego i wynosi $e^{(-\text{delta_kary}/T)}$. Widać zatem, że szansa na zaakceptowanie gorszego rozwiązania maleje wraz ze spadkiem temperatury, jak również wraz ze wzrostem delta_kary . Wykres pokazuje, jak wraz z czasem maleje prawdopodobieństwo zaakceptowania gorszych rozwiązań, dla różnych delt (1; 0,1; 0,01).

Mogłoby się wydawać, iż jeśli pozwole się programowi na przekraczanie limitów, to będzie on to robił nagminnie. Okazuje się, że praktycznie się to nie zdarza. Natomiast z naszego punktu widzenia w łatwy sposób pozwoliło to na rozszerzenie programu o dodatkowe warunki (np. wszyscy chodzący do grupy A1 jednych zajęć muszą również chodzić do grupy B1 innych zajęć). Program zyskał dodatkową swobodę, ponieważ może przeglądać większą przestrzeń rozwiązań, a to ma korzystny wpływ na ich jakość.

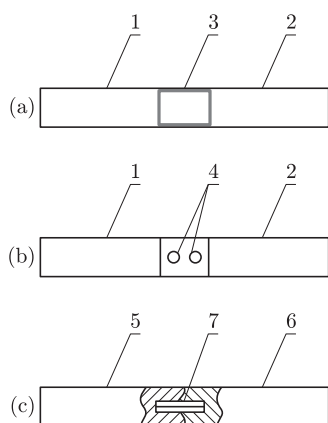
Pomijając dodatkowe szczegóły, tak właśnie działa w USOS **rejestracja do grup**. W praktyce, w stosunku do poprzedniego rozwiązania, liczba osób z konfliktami zmniejszyła się o połowę, a ręczne analizy osób z największą liczbą konfliktów wykazały, że nie istnieją dla nich rozwiązania lepsze, gdyż konflikty są wymuszone przez nakładające się zajęcia.

Warto także zwrócić uwagę na nieinformatyczne aspekty rozwiązania. Rejestracja do grup jest poprzedzona wyborem przedmiotów. Studenci wskazują pożądane przedmioty, a władze wydziału, widząc, jak rozkładają się preferencje, mogą jeszcze przed kolejnym etapem dostosować do nich liczbę grup. W drugim kroku studenci ponownie pytani są o preferencje, ale już tylko w odniesieniu do grup zajęć przedmiotów, na które zostali przyjęci. To zatem studenci decydują o kształcie swoich studiów. A dzięki zastosowaniu wyżarzania zamiast rejestracji „kto pierwszy ten lepszy” uczelniane serwery nie są narażone na gwałtowny wzrost obciążenia. Warto znać się na algorytmice.

A jeśli jakiś wydział mimo wszystko chce zastosować zasadę „kto pierwszy ten lepszy”? O tym, jak mimo wszystko zabezpieczyć serwery w sytuacji wzrostu obciążenia, będzie mowa w jednym z kolejnych odcinków serii.

Potrzebne materiały i przyrządy: miernik uniwersalny (cyfrowy albo analogowy) z zakresem miliwoltomierza i woltomierza oraz opcjonalnie mikroamperomierza, kawałek sklejki albo płyty pilśniowej o rozmiarach około 30 × 20 cm, kawałki blachy z różnych metali, np. miedzi oraz cynku albo miedzi i aluminium – dwa większe (około 15 × 10 cm) i kilkanaście mniejszych (około 10 × 2 cm) – liczby kawałków z obu metali powinny być takie same, klej butapren, przewody połączeniowe w izolacji, wtyczki bananowe, cyna i lutownica.

Warto się chwilę zastanowić nad najbardziej praktycznym wykonaniem zespołów elektrod do połączenia „łańcucha ludzkiego”. Trzy proste przykłady, które można wykonać z pasków blachy, prętów lub rurek, zostały pokazane na rysunku. Powinny one mieć rozmiary zapewniające ich wygodne trzymanie dłonią. Najtańsze są zespoły z pasków cienkiej blachy, które można połączyć przez zlutowanie lub znitowanie. Kawałki prętów można połączyć wkrętem, a rurki o odpowiednio dobranych średnicach – po prostu wcisnąć jedną w drugą. Elementy niezbędne do wykonania zespołów elektrod są do nabycia jako resztki materiałów w sklepach lub hurtowniach sprzedających kształtowniki z metali korowych – miedzi, aluminium, cynku czy mosiądzu.

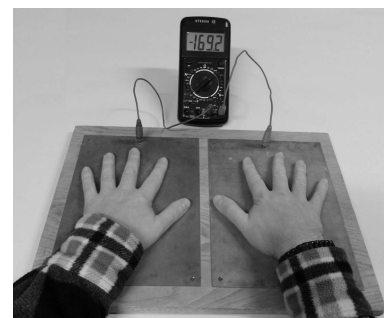


Przykładowe sposoby połączenia elektrod: a) zlutowane, b) znitowane, c) skręczone; 1, 2 – paski blachy z różnych metali, 3 – stop lutowniczy, 4 – nity, 5, 6 – kawałki pręta z różnych metali, 7 – wkręt.

Ludzka strona baterii *Stanisław BEDNAREK*

W wielu źródłach opisywane są doświadczenia, które można by określić mianem *baterii owocowej*. W tych eksperymentach dwie blaszki lub dwa druciki, stanowiące elektrody i połączone z czułym miernikiem elektrycznym, wbija się w owoc albo warzywo, np. jabłko, pomarańczę, kwaszony ogórek czy nawet ziemniak. Miernik pokazuje wówczas napięcie albo przepływ prądu, ponieważ na powierzchniach elektrod, zwilżonych owocowym lub warzywnym sokiem, zachodzą reakcje chemiczne. Ich skutkiem jest separacja ładunków elektrycznych i wytworzenie siły elektromotorycznej (SEM). Z układu połączonych takich baterii można nawet zasilać niewielkie urządzenia elektroniczne, np. zegarek lub diodę LED. Dziś zajmiemy się inną wersją tych doświadczeń, w której zamiast warzyw my sami będziemy źródłem SEM.

Pierwsze z proponowanych doświadczeń nazywane bywa „baterią ręczną” i zostało pokazane na fotografii. Do sklejki albo płyty mocujemy butaprenem dwa większe, prostokątne kawałki blachy wykonane z różnych metali, np. z miedzi i cynku. Blachy powinno oddzielać kilka centymetrów, a każda z nich powinna być połączona jednym przewodem z uniwersalnym miernikiem elektrycznym. Miernik należy przełączyć na zakres miliwoltomierza lub mikroamperomierza. Połączenia wykonujemy, przylutowując po jednym z końców obu przewodów do blach oraz zaopatrując pozostałe końce we wtyczki bananowe. Gdy nic nie dotyka żadnej z blach, miernik pokazuje 0. Jeżeli na każdej z płyt położyć dłoń, to miernik wskaże przepływ prądu. Typowa wartość wskazywanego napięcia w przypadku elektrod cynkowej i miedzianej wynosi około 0,15 V, a natężenie prądu – kilkadziesiąt miliamperów. Ponieważ prąd ten jest bardzo mały, a oporność ciała człowieka bardzo duża w porównaniu z oporem przewodów połączeniowych i miernika, więc wskazywane napięcie równa się praktycznie sile elektromotorycznej.

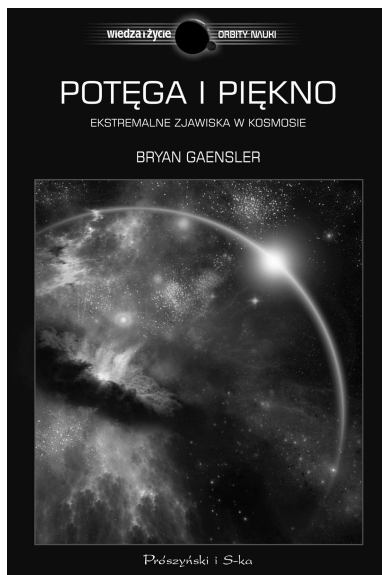


„Bateria ręczna” w działaniu.

Przyczyną przepływu prądu jest wytworzenie się ogniwa galwanicznego w układzie złożonym z blach (stanowiących elektrody) i skóry dłoni. Na skórze zawsze znajduje się pewna ilość potu zawierającego sole rozpuszczone w wodzie (głównie chlorek sodu), które stanowią elektrolit. Wskazania miernika zależą od wielu czynników, m.in. pola powierzchni dłoni, siły ich nacisku na elektrody, wilgotności skóry, materiałów, z których wykonano elektrody. Wilgotność skóry z kolei zależy np. od wieku (zwykle jest mniejsza u osób starszych), stanu zdrowia i stanu emocjonalnego osoby wykonującej doświadczenie. Ta ostatnia zależność wykorzystywana jest w tzw. wykrywaczach kłamstw (wariografach). Urządzenia te miałyby wykorzystywać fakt, że stres spowodowany koniecznością kłamstwa skutkuje zwykle wzrostem wilgotności skóry i zmniejszeniem jej oporności elektrycznej.

Poprzednią wersję doświadczenia możemy łatwo rozwinąć, tak żeby wzięło w nim udział wiele osób. Każda z „łańcucha” osób trzyma dłonie sąsiadów poprzez zespoły elektrod wykonane z dwóch różnych metali połączonych w dowolny sposób zapewniający dobry kontakt elektryczny. Ważne jest, żeby części każdego zespołu elektrod wykonane z tego samego metalu, np. miedzi, były zwrócone w jedną stronę. Skrajne osoby w łańcuchu trzymają odizolowane końce przewodów dołączonych do miernika. W tym przypadku siły elektromotoryczne wytwarzane przez poszczególne osoby w łańcuchu się sumują, co powoduje wzrost wskazań miernika napięcia w porównaniu z omawianą poprzednio sytuacją. Z kolei natężenie płynącego prądu zależy w znacznym stopniu od powierzchni metalu stykającej się z dłońmi w każdym zespole elektrod.

Opisane doświadczenia umożliwiają sprawdzenie niejako „na własnej skórze” prawa Ohma dla całego obwodu i praw Kirchhoffa. Doświadczenia te świetnie nadają się też do wykorzystania podczas różnego rodzaju festiwali lub pikników naukowych, ponieważ świetnie bawią i integrują uczestników. Mogą też służyć do ustanawiania oryginalnych rekordów, np. która grupa wytworzy wyższe napięcie albo natężenie prądu. W tym celu zamiast elementów z cynku i miedzi warto zastosować elementy z innych metali, np. glinu i miedzi (wskazówką do optymalnego doboru jest szereg elektrochemiczny metali, zamieszczony w tablicach fizycznych lub chemicznych). Na podobieństwo „łańcuchów czystych serc” my, zainteresowani fizyką, możemy nadać bateriom elektrycznym bardziej ludzki charakter i poeksperymentować z „łańcuchami elektrycznych dłoni”.



Bryan Gaensler, *Potęga i piękno. Ekstremalne zjawiska we Wszechświecie*, przełożył Sebastian Szymański, Prószyński Media Sp. z o.o., Warszawa 2013.

Astronomia ekstremalna

Widziałem niegdyś w telewizji, przy prasowaniu, kilka programów przyrodniczych pokazujących, na przykład, jak najdłuższy wąż dorzecza Zambezi konkuruje o żer z najdłuższym tegoż dorzecza krokodylem. Gdyby czytany przez lektorę tekst nie zawierał tych hiperbol, zerkając zza góry koszul na ekran przedstawiający lustro wody, zarośla i kilka kłapnięć gadzią paszczą, mógłbym się pewnie nie zorientować, że mam do czynienia z wartym jakiegokolwiek uwagi zjawiskiem.

Dlatego miałem nieco wątpliwości, czy warto zabierać się za lekturę książki Bryana Gaenslera *Potęga i piękno. Ekstremalne zjawiska we Wszechświecie*, której osią narracyjną jest przegląd obiektów astronomicznych dających się opisać przymiotnikami w stopniu najwyższym: najgorętszych i najzimniejszych, najjaśniejszych i najciemniejszych, najszybszych i najwolniejszych, największych i najmniejszych. Jednak lektura pierwszych rozdziałów szybko wątpliwości te rozproszyła, a potem było już coraz lepiej. Mówiąc krótko, trik Gaenslera polega na tym, że w opakowaniu sensacyjnych nowinek naukowych czytelnik otrzymuje solidną porcję współczesnej astrofizyki, smakowitą i zarazem zmuszającą do zastanowienia. Taka swada połączona z kompetencją nie powinny dziwić – autor jest wszak na co dzień zawodowym astronomem, a niektóre z opisywanych w książce odkryć są jego własnymi dokonaniem.

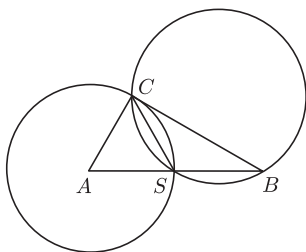
W jakimś lepszym Wszechświecie równoległym redaktor naukowy temu zwróciłby pewnie uwagę na to, że „seksyliion” to inna liczba po polsku i po angielsku, nie podobałyby mu się też pewnie „reakcje nuklearne”. W naszym – jest to mimo wszystko jedno z lepszych tłumaczeń książki popularnonaukowej, jakie ostatnio czytałem.

K. T.

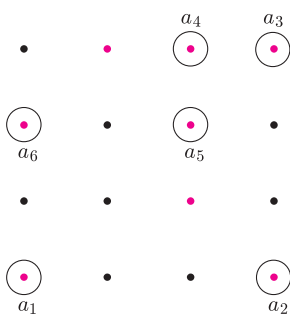


Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ



Rys. 1



Rys. 2

Zadanie M 1407 pochodzi z blogu T. Tao, <http://terrytao.wordpress.com/>.

M 1405. Dany jest trójkąt prostokątny ABC o kącie prostym przy wierzchołku C . Okrąg o środku w punkcie A i promieniu AC przecina bok AB w punkcie S . Udowodnić, że ten okrąg przystaje do okręgu opisanego na trójkącie BCS (rys. 1) wtedy i tylko wtedy, gdy S jest środkiem AB .

Rozwiązanie na str. 23

M 1406. Na planszy $n \times n$ zamalowano $2n$ punktów. Udowodnić, że dla pewnego $m > 1$ można wskazać $2m$ zamalowanych punktów a_1, \dots, a_{2m} , tak aby a_1 i a_2 były w tym samym wierszu, a_2 i a_3 – w tej samej kolumnie, a_3 i a_4 znów w tym samym wierszu itd., a_{2m-1} i a_{2m} w tym samym wierszu i wreszcie a_{2m} i a_1 w tej samej kolumnie (tak jak na rysunku 2).

Rozwiązanie na str. 3

M 1407. Jaś, będąc na lotnisku, chce jak najszybciej przejść od punktu A do punktu B (w linii prostej). Idzie z prędkością v . Na swojej trasie ma odcinek, który pokonuje na ruchomej taśmie poruszającej się z prędkością u (czyli Jaś, idąc po taśmie, porusza się z prędkością $v + u$ względem ziemi). Jaś ma jednak pewien zapas sił i może przez czas t biec z prędkością $v' > v$. Czy powinien biec na taśmie, czy poza nią? (Zakładamy dla uproszczenia, że taśma, jak i odcinek bez taśmy są na tyle długie, że Jaś nie jest w stanie pokonać biegiem żadnego z nich w całości.)

Rozwiązanie na str. 23

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 845. Dwaj obserwatorzy wykonują pomiary pola elektromagnetycznego. Pierwszy z nich stwierdził, że natężenie pola elektrycznego wynosi $\mathbf{E} \neq 0$, a indukcja magnetyczna pola równa jest zeru. Jakie natężenie pola elektrycznego zmierzy drugi obserwator, poruszający się względem pierwszego z prędkością \mathbf{v} ?

Wskazówka: Natężenie pola elektrycznego wytworzone przez jednorodnie naładowaną płaszczyznę jest proporcjonalne do powierzchniowej gęstości ładunku σ , a wektor natężenia pola jest prostopadły do płaszczyzny.

Rozwiązanie na str. 3

F 846. Strumień nieściśliwej cieczy o gęstości ρ obraca wirnik turbiny. Jaka maksymalna moc może być przekazana wirnikowi? Przed wirnikiem, z dala od niego, ciecz porusza się z prędkością \mathbf{v}_1 prostopadle do płaszczyzny wirnika. Każda z łopatek wirnika zakreśla podczas pełnego obrotu powierzchnię S . Przyjmij, że wirnik jest cienki, a jego masa jest bardzo mała.

Rozwiązanie na str. 8

Stożkowe

Przecięcie stożka płaszczyzną π nieprzechodzącą przez wierzchołek to **stożkowa**. Jeśli oś stożka tworzy z płaszczyzną π kąt (nazwijmy go β) większy niż z tworzącą (α), to stożkowa jest **elipsą**, gdy równy – **parabolą**, gdy mniejszy – **hiperbolą**. Wpisując w stożek sfery styczne do płaszczyzny π (dla paraboli jest tylko jedna taka sfera), otrzymujemy jako punkty styczności **ogniska** stożkowej, a jako przecięcia płaszczyzn zawierających okręgi, wzdłuż których sfery są styczne do stożka, z płaszczyzną π – **kierownice stożkowej**.

Ponieważ wszystkie odcinki stycznych do sfery z tego samego punktu są równe, więc $PF_1 = PA_1$ i (dla hiperboli i elipsy) $PF_2 = PA_2$ oraz $A_1A_2 = \text{const}$ (bo jest to odcinek tworzącej stożka między dwiema płaszczyznami prostopadłymi do jego osi). Zatem **dla hiperboli**

$$|PF_1 - PF_2| = |PA_1 - PA_2| = A_1A_2 = \text{const},$$

czyli **moduł różnicy odległości dowolnego punktu od ognisk jest stały**;

dla elipsy

$$PF_1 + PF_2 = PA_1 + PA_2 = A_1A_2 = \text{const},$$

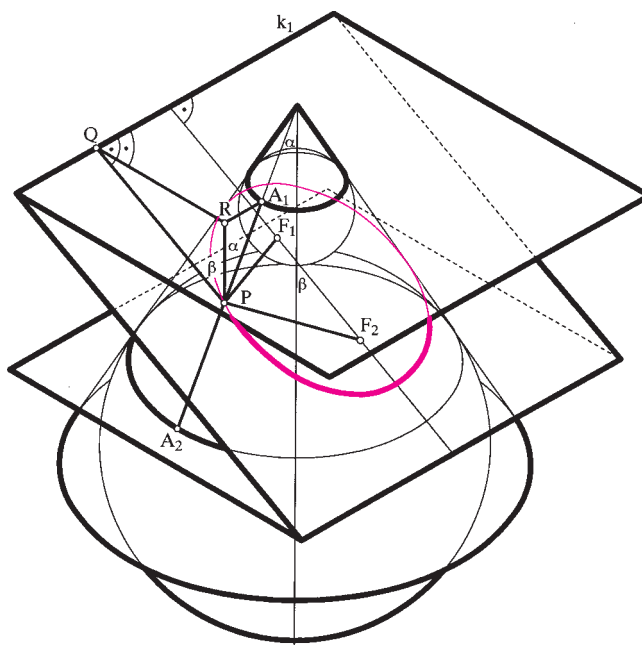
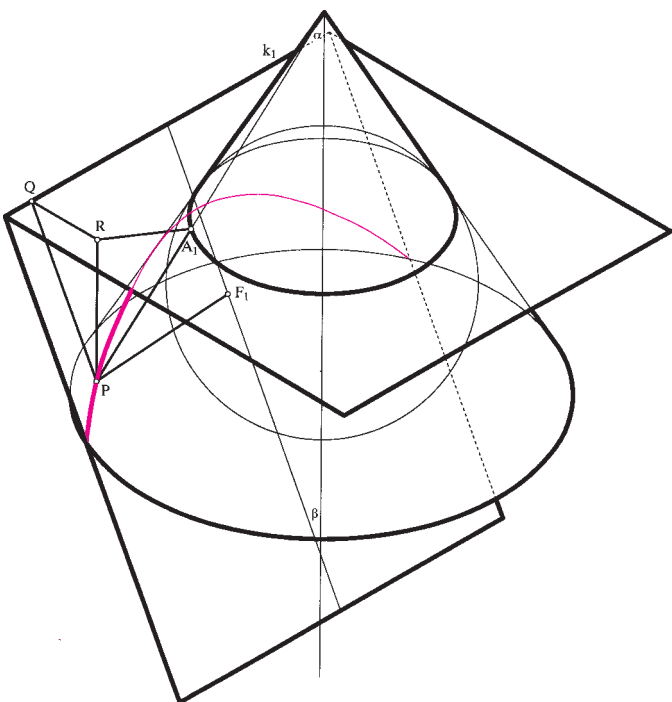
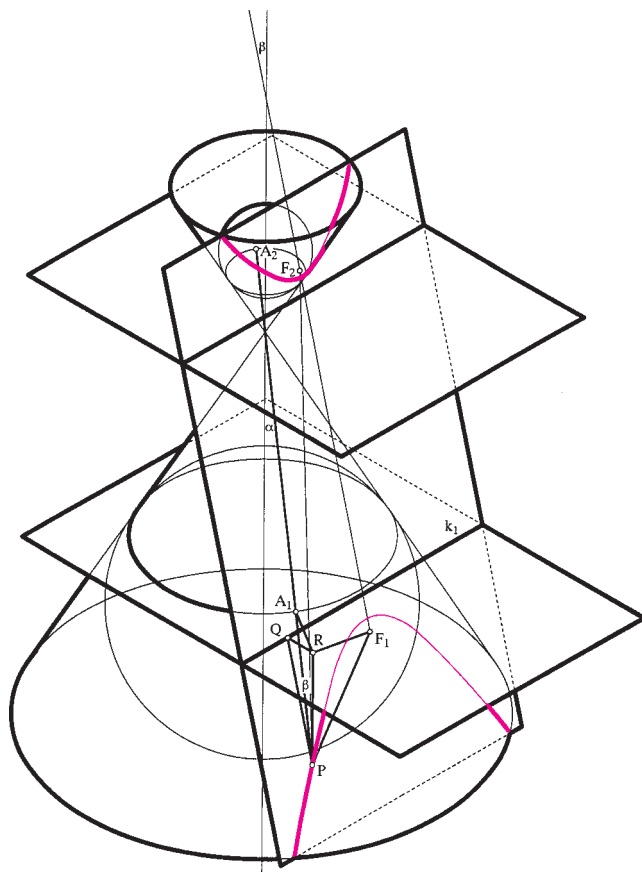
czyli **suma odległości dowolnego punktu od ognisk jest stała**.

Jeśli R jest rzutem P na płaszczyznę okręgu styczności i Q jest rzutem P na (bliższą) kierownicę k_1 , to

$$\frac{PF_1}{Pk_1} = \frac{PA_1}{PQ} = \frac{\frac{PR}{\sin \alpha}}{\frac{PQ}{\sin \beta}} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = \text{const} =: \varepsilon,$$

czyli **stosunek odległości dowolnego punktu stożkowej od ogniska i od kierownicy jest stały**.

Zatem mamy dla hiperboli $\varepsilon > 1$, dla elipsy $\varepsilon < 1$ i dla paraboli $\varepsilon = 1$.

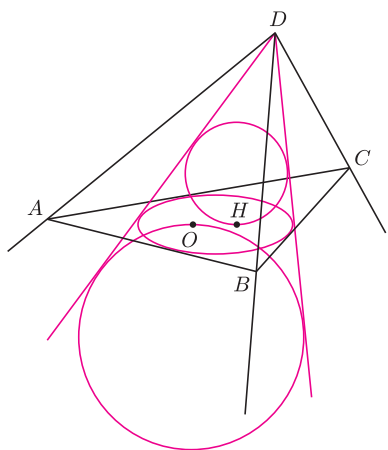


Kącik przestrzenny (20): Sfery Dandelina

Sfery, o których jest mowa na sąsiedniej stronie, nazywane są *sferami Dandelina* na cześć francuskiego matematyka Germinała Pierra Dandelina (1794–1847), który badając stożkowe, rozwinął pomysły Apoloniusza z Pergii (III w. p.n.e.).

Związane z nimi zależności pozwalają błyskawicznie rozwiązać wiele zadań dotyczących stożkowych. Tu zajmiemy się tylko elipsami. Zaczniemy od zadania, które rozwiązaliśmy w Kąciku 2 inną metodą.

1. (OM 54-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ściany ABC w punkcie H , a sfera dopisana do tego czworościanu jest styczna do ściany ABC w punkcie O . Dowieść, że jeżeli O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H jest punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.*



Rys. 1

Rozwiązanie. Oznaczmy przez s_1 i s_2 rozpatrywane sfery. Niech s będzie stożkiem o wierzchołku D , w który wpisane są sfery s_1 i s_2 (każda tworząca stożka s jest wspólną styczną sfer s_1 i s_2). Posługując się sferami Dandelina, wnioskujemy, że część wspólna płaszczyzny ABC i stożka s jest elipsą wpisaną w trójkąt ABC , a punkty O i H to jej ogniska. W takim razie spełnione są równości

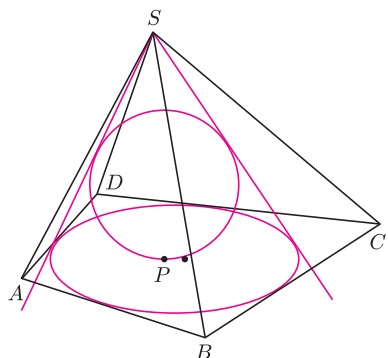
$$\sphericalangle ABH = \sphericalangle CBO \quad \text{oraz} \quad \sphericalangle BCH = \sphericalangle ACO.$$

Wiadomo, że jeśli punkt O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , a H punktem przecięcia jego wysokości, to powyższe równości są spełnione. Z drugiej strony dla danego punktu O punkt H jest jednoznacznie wyznaczony przez powyższe zależności. Skoro więc O jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie ABC , to H musi być punktem przecięcia wysokości tego trójkąta.

Zachęcam Czytelnika do porównania tego rozumowania z rozwiązaniem tego zadania przedstawionym w Kąciku 2. Okazuje się, że spora część tego rozwiązania jest właściwie ukryta w powyższym. Opisana tu metoda to spojrzenie z nieco innego punktu widzenia, co czasem pozwala na wymyślenie krótszego rozwiązania.

Spójrzmy na inne zadanie, które także można bardzo szybko rozwiązać, wykorzystując sfery Dandelina.

2. (OM 59-I-8) *Dany jest ostrosłup czworokątny $ABCD$ o podstawie czworokąt wypukły $ABCD$. Sfera wpisana w ten ostrosłup jest styczna do ściany $ABCD$ w punkcie P . Dowieść, że $\sphericalangle APB + \sphericalangle CPD = 180^\circ$.*



Rys. 2

Rozwiązanie. Niech s będzie stożkiem o wierzchołku S , w który wpisana jest sfera wpisana w ostrosłup $ABCD$. Część wspólna tego stożka z płaszczyzną podstawy jest elipsą wpisaną w czworokąt $ABCD$, a punkt P jest jej ogniskiem. Teza zadania jest po prostu jedną ze znanych własności elipsy wpisanej w czworokąt.

Jeśli Czytelnik nie zna tej własności, o której mowa, to łatwo ją udowodni, wykorzystując poniższy fakt (dowód można też znaleźć np. w broszurze 51. Olimpiady Matematycznej).

Fakt. *Dana jest elipsa o ogniskach A i B i punkt P leżący na zewnątrz elipsy. Proste PK i PL są styczne do tej elipsy. Wówczas $\sphericalangle PAK = \sphericalangle PAL$.*

Na zakończenie (także całej serii Kącików przestrzennych) jeszcze jedno zadanie, do którego przydadzą się sfery Dandelina.

3. (OM 60-III-5) *Sfera wpisana w czworościan $ABCD$ jest styczna do ścian BCD , CDA , DAB , ABC odpowiednio w punktach P , Q , R , S . Odcinek PT jest średnicą tej sfery, a punkty A' , Q' , R' , S' są punktami przecięcia prostych AT , QT , RT , ST z płaszczyzną BCD . Dowieść, że punkt A' jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie $Q'R'S'$.*

Wskazówka: Obrazy symetryczne ogniska pewnej elipsy względem stycznych do niej leżą na okręgu o środku w drugim ognisku tej elipsy.

Michał KIEZA

Amandzie Porcie,
Magdalenie Posiadale
i Monice Pieńkos

A może Betelgeza już wybuchła,
tylko wieść o tym nie dotarła jeszcze
do naszego zakątka Galaktyki?



Ciąg reakcji kończący się emisją fotonu
przez scyntylator nie został, jak dotąd,
dobrze zbadany.

Jeszcze jedna twarz greja

Czekanie. Czeką w ciemności, ciągle gotowy, wzbudzi go najbliższy sygnał. A ona, choć w krótkim spazmie mogłaby nadać sens jego czekaniu, wciąż je przedłuża.

Ten detektor nie budzi wielkich emocji w środowisku naukowym. Zespół doświadczalny liczy kilka dziesiątek ludzi, zresztą od lat tych samych. Strumyczek prac naukowych wzmiankowanych na rzadko aktualizowanej stronie urywa się na roku 2008. Urządzenie nazwę ma niepoetyczną, LVD, co jest skrótem od angielskiego określenia *Large Volume Detector*, czyli „detektor dużej objętości”. Siedzi sobie w podziemnym laboratorium badawczym w Gran Sasso we Włoszech i od dwudziestu lat nie robi nic. Czeką na wybuch supernowej.

Na niebie i pod ziemią. A kiedy już zaczną się dziać, najwięcej dzieć się będzie tam, gdzie nie sięga wzrok.

Detektor LVD składa się z 840 stalowych komórek, z których każda wypełniona jest ponad toną scyntylatora. Przychodzące z supernowej neutrino o energii kilku megaelektronowoltów najpierw wzbudzi cząsteczki węglowodorów aromatycznych wypełniających detektor; energia ta zostanie następnie przekazana cząsteczkom $C_{15}H_{11}NO$. Cząsteczki te wrócą do stanu podstawowego, emitując foton z zakresu widzialnego, o częstotliwości odpowiadającej światłu niebieskiemu. Światło to wzbudzi następnie cząsteczki $C_{24}H_{16}N_2O$, które deekscytują się, emitując światło o większej długości fali, łatwiej wzmacniane w „patrzających” na zbiornik przez małe, pleksiglasowe okienko fotopowielaczach produkcji radzieckiej; wzmocniony sygnał trafi w końcu na fotodiode zamieniającą sygnał optyczny na elektryczny, co już łatwo będzie rejestrować.

Mała część greja. Należy się cieszyć, że odległość do Betelgezy wynosi aż 600 lat świetlnych. Gdyby było to 25 lat świetlnych, wysokoenergetycznych cząstek docierających do Ziemi byłoby tak wiele, że stanowiłyby one zagrożenie dla życia podobne do promieniowania po wybuchu jądrowym. Z tej perspektywy nasz zakątek Wszechświata wydaje się stosunkowo komfortowy.

Betelgeza, czerwony olbrzym, odległy około 600 lat świetlnych od Słońca, może w każdej chwili w gigantycznej eksplozji przekształcić się w czarną dziurę. Powodem takiej eksplozji będzie utrata równowagi hydrodynamicznej we wnętrzu gwiazdy. Każda gwiazda produkuje energię w reakcjach termojądrowych zachodzących w jej jądrze: powstające zjonizowaną materię gwiazdowego wnętrza, co równoważy grawitacyjny napór zewnętrznych warstw gwiazdy. Kiedy równowagi zabraknie, jądro zapadnie się, a za jądrem runą na centrum zewnętrzne warstwy gwiazdy.

Materia we wnętrzu gwiazdy jest zjonizowana, a więc nieprzezroczysta dla światła. Nie da się więc „podejrzeć”, co dzieje się w jądrze gwiazdy, a w warunkach równowagi produkowanym tam fotonom podróż na powierzchnię zajmuje średnio setki lat. Podczas wybuchu, w gwałtownych reakcjach zachodzących podczas odbicia zewnętrznych warstw gwiazdy od jej jądra, produkowane będą rozmaite cząstki elementarne, w tym neutrino i fotony. Neutrino znacznie słabiej niż fotony oddziałują ze zjonizowaną materią gwiazdy i opuszczają ją jako pierwsze; fotonom taka podróż zajmuje co najmniej kilka godzin dłużej. Kiedy światło wybuchu Betelgezy dotrze do Ziemi, dorówna ona widzialną jasnością Księżycowi w pełni. Dziesiątki, jeśli nie setki lat później do Ziemi dotrą wytworzone w wybuchu cząstki masywne, przed którymi ochroni nas jednak ziemską atmosferą.

Krzysztof TURZYŃSKI

Najbardziej oczekiwana nagroda

Tegoroczną Nagrodę Nobla z fizyki otrzymali François Englert oraz Peter Higgs za „teoretyczne odkrycie mechanizmu, który przyczynia się do zrozumienia źródła mas cząstek subatomowych i który został ostatnio potwierdzony odkryciem przewidywanej fundamentalnej cząstki przez zespoły badawcze ATLAS i CMS, działające przy CERN-owskim Wielkim Zderzaczu Hadronów”.

Nagrodzeni byli zdecydowanymi faworytami. Jednak komitet przyznający nagrodę obradował godzinę dłużej niż zwykle (ostateczna decyzja jest podejmowana tuż przed ogłoszeniem werdyktu). Na czym polegały wątpliwości, można będzie się dowiedzieć dopiero za pół wieku, czyli sto lat po opublikowaniu (1964) nagrodzonych prac. Może rozważano wyróżnienie zupełnie innego osiągnięcia? Może zastanawiano się, kogo jeszcze docenić za wkład w odkrycie mechanizmu Brouta–Englerta–Higgsa (BEH, to nie jedyny zestaw nazwisk [1]; Robert Brout nie doczekał, zmarł dwa lata temu)? Raczej nie zastanawiano się nad precedensem nagrodzenia zespołów eksperymentalnych, ale niewykluczone, że dyskutowano nad sformułowaniem uzasadnienia. Chyba po raz pierwszy odpowiednia sentencja zawiera bezpośrednie odniesienie do osiągnięcia osób trzecich (których jest dobre kilka tysięcy, w tym kilkudziesięciu Polaków; patrz *Aktualności, Delta* 7/2013).

O historii sformułowania pomysłu można poczytać (np. [1]) lub posłuchać samego Petera Higgsa [2]. Mechanizm BEH jest omawiany w niezliczonych miejscach na różnych poziomach abstrakcji (np. [1,3]). Ciekawa jest prezentacja [4], w której symetria cechowania oraz jej naruszenie (mechanizm BEH) są wprowadzone za pomocą analogii ekonomicznej. Maldacena kilkakrotnie jednak uprzedza, że fizyka jest prostsza niż ekonomia. Ma rację. Choć liczba użytych w analogii pojęć jest mniejsza niż w ścisłym sformułowaniu, to bez jego (przynajmniej pobieżnej) znajomości, nie jest łatwo zrozumieć istotę oraz adekwatność wywodu.

Osobiście zachęcam do obejrzenia prelekcji [5]. Arkani-Hamed jest bardzo ekspresyjnym mówcą. Tym razem przekonuje, że z samego kwantowomechanicznego opisu zjawiska, rozgrywającego się w czasoprzestrzeni, wynika konieczność istnienia bozonu Higgsa. Nie jest gołosłowny. Był gotów założyć się o swoje roczne dochody, że bozon Higgsa zostanie odkryty (co prawda, gdy to ogłaszał, to jeszcze nie wiedział, że dostanie trzy miliony dolarów, jako jeden z laureatów *Fundamental Physics Prize*; Maldacena też został wtedy nagrodzony – patrz *Aktualności, Delta* 2/2013). W referacie, oprócz przedstawienia „o co tak naprawdę chodzi”, zdradza, że (aby to w pełni pojąć) należy przejść roczny kurs (kwantowej teorii pola) oraz że większość używanych analogii (do stosowania których sam się przyznaje) jest okropna, wprowadza w błąd lub jest po prostu błędna. W szczególności błędne jest przedstawianie pola BEH jako jakiegoś ośrodka spowalniającego cząstki – nadającego im masę.

Skoro istnienie bozonu Higgsa jest prostym wnioskiem z tego, co wiemy (o próżni), to spróbujmy tę wiedzę podsumować.

Z mariażu mechaniki kwantowej ze szczególną teorią względności urodziły się fermiony, czyli cząstki obdarzone spinem połówkowym, dla których istnieje antycząstki. To jest informacja o kolosalnym znaczeniu, bo fermiony nie mieszczą się w zwykłej czasoprzestrzeni. Spin im wystaje. Jeżeli jedynym oddziaływaniem (poza grawitacją, o której jest wspomniane w [5]) byłyby elektromagnetyzm, to nie byłoby problemu.

Po pierwsze, nas by nie było. Po drugie, sprawa fermionów byłaby rozwiązana za pomocą elektrodynamiki kwantowej, czyli teorii, którą można wyprowadzić, dopuszczając swobodny wybór fazy zespolonej w każdym punkcie czasoprzestrzeni (właśnie o tym jest analogia ekonomiczna w [4]).

Ponieważ jednak odkryliśmy oddziaływania słabe (odkryliśmy również silne, ale one nic nowego, z punktu widzenia mechanizmu BEH, nie wnoszą), więc możemy istnieć, ale teoretyczna konstrukcja się sypie (pozornie) i to z dwóch powodów. Po pierwsze, słabość oddziaływania jest związana z dużą masą nośników, które powinny być i są cząstkami o spinie jeden, czyli takimi jak foton. Mają one jednak dodatkowy stan polaryzacyjny (bo mają masę), który wywołuje nieograniczony wzrost prawdopodobieństwa oddziaływania z rosnącą energią zderzenia. Opis się załamuje. Po drugie, okazuje się, że oddziaływania słabe rozróżniają fermiony lewochiralne i prawochiralne (to dlatego parzystość nie jest obowiązuje symetrią; popularne wyjaśnienie różnicy między chiralnością i skrętnością można znaleźć w [3]). Pierwsze oddziałują słabo, a drugie nie. W elektrodynamice kwantowej masa jest wynikiem „superpozycji” obu stanów chiralnych fermionu (a przewidywania teorii zgadzają się z dokładnością do jednej bilionowej). Ze względu na oddziaływania słabe są to jednak zupełnie inne cząstki (choć większość erudyków nie ma o tym pojęcia)! Nie mogłyby „interferować”, gdyby symetria oddziaływań słabych była zachowana.

Mechanizm BEH to konsekwencja uznania, że próżnia ma wyróżniony kierunek fazy elektroslabej (to jest równoważne wyborowi punktu na jednostkowej sferze, znów wystającej poza czasoprzestrzeń, ale ze względu na dodatkową swobodę sprowadza się do wyboru jednej liczby rzeczywistej). Fakt ten narusza symetrię elektroslabą, dopuszczając mieszanie fermionów o przeciwnych chiralnościach (czyli pozwalając im na posiadanie masy), a jego najprostszą implementacją dostarcza cztery cząstki skalarne (niewyróżniające żadnego kierunku w przestrzeni). Trzy stają się brakującymi stanami polaryzacyjnymi (wcześniej bezmasowymi) bozonów pośredniczących, przez co problem z rosnącym prawdopodobieństwem oddziaływania znika (to tu, między innymi, potrzebny jest ten roczny kurs), a czwarty jest odkrytą w zeszłym roku skalarną cząstką Higgsa, której masa jest dodatkowym parametrem wyznaczanym doświadczalnie.

Pomysł był bardzo śmiały, bo postulował istnienie fundamentalnej cząstki skalarniej. Natura nigdzie indziej takiego obiektu nie wykorzystuje. Jeżeli masa tej cząstki jest taka, jak ją zmierzaliśmy, to (teoretyczne) problemy z nią związane mogą być tylko natury estetycznej. Inaczej mówiąc, mamy teorię, która może działać aż do skali energii, przy której efekty grawitacyjne zaczną być istotne, kłamrę spinającą fizykę XX wieku. Czas zająć się wyzwaniem trzeciego tysiąclecia.

Piotr ZALEWSKI

- [1] Tom W.B. Kibble, *Englert–Brout–Higgs–Guralnik–Hagen–Kibble mechanism*, Scholarpedia, 2009, 4(1):6441.
- [2] Peter Higgs, *Ancestry of a New Boson*, Referat na konferencji EPS w Sztokholmie w lipcu 2013, <http://video.physto.se/AULAN20130722A/video.wmv>.
- [3] Flip Tanedo, <http://www.quantumdiaries.org/2011/06/19/helicity-chirality-mass-and-the-higgs>.
- [4] Juan Maldacena, *The Symmetry and Simplicity of the Laws of Nature and the Higgs Boson*, <http://video.ias.edu/maldacena-lecture-10-12>, Institute for Advanced Study Video Lectures, 3/10/2012.
- [5] Nima Arkani-Hamed, *The Inevitability of Physical Laws: Why the Higgs Has to Exist*, <http://video.ias.edu/arkani-hamed-lecture-10-12>, Institute for Advanced Study Video Lectures, 26/10/2012.

Informatyczny kącik olimpijski (67): Karty

W tym kąciku zmierzmy się z zadaniem *Karty* z Potyczek Algorytmicznych 2013. Oryginalne sformułowanie zadania dotyczyło kart perforowanych, my jednak przedstawimy je nieco inaczej, przy okazji wprowadzając niejawnie kilka nieznaczących uproszczeń.

Dana jest kartka w kratkę rozmiaru $n \times n$, której część pól jest dozwolonych, a część zabronionych. Będziemy chcieli pokryć wszystkie pola dozwolone, używając do tego celu prostokątnej pieczątki o jak największym polu. Każde pole dozwolone możemy pokryć wielokrotnie, natomiast nie możemy nigdy położyć pieczątki na żadnym polu zabronionym. Pieczątki nie może w żadnym momencie wyjść poza obręb kartki – możemy założyć, że kartka jest otoczona kwadratową obwódką złożoną z pól zabronionych. Pieczątki nie można też obracać.

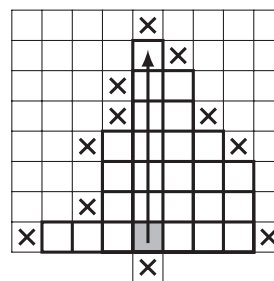
Zacznijmy od rozwiązania siłowego. Chcemy dla każdego prostokąta $a \times b$ sprawdzić, czy opisuje on poprawną pieczątkę. W tym celu na wszystkie możliwe sposoby spróbujemy przyłożyć ten prostokąt do kartki. Tak więc dla każdego pola (i, j) kartki sprawdzimy, czy prostokąt $a \times b$ o lewym górnym rogu w tym polu zawiera tylko pola dozwolone, a jeśli tak, zaznaczymy wszystkie te pola jako pokryte. Wszystkich prostokątów jest $O(n^2)$, możliwych przyłożeń prostokąta również $O(n^2)$, wreszcie sprawdzenie poprawności przyłożenia i pokrycie przypieczetowanych pól zajmuje czas $O(n^2)$. Łącznie rozwiązanie to działa w niezbyt ciekawej złożoności czasowej $O(n^6)$.

Za pomocą dosyć standardowych technik można takie rozwiązanie przyspieszyć nawet o kilka rzędów złożoności. Zacniemy od tzw. *dwuwymiarowych sum prefiksowych*, czyli metody znanej z zadania *Mapy gęstości* z VIII Olimpiady Informatycznej. W metodzie tej dla każdego prostokąta „prefiksowego”, czyli prostokąta zawierającego lewy górny róg kartki, zapamiętujemy liczbę pól zabronionych w tym prostokącie. Prostokątów prefiksowych jest, rzecz jasna, $O(n^2)$, a żądane wartości możemy wyznaczyć, traktując pola dozwolone jako 1, zabronione jako 0 i dwukrotnie obliczając sumy prefiksowe, najpierw w wierszach, a potem w kolumnach kartki. Teraz sumę pól w dowolnym prostokącie wyraża się jako sumę i różnicę co najwyżej czterech wartości dla prostokątów prefiksowych. W ten sposób sprawdzenie poprawności przyłożenia pieczątki można zrealizować w czasie stałym. Podobnie można poradzić sobie z pokryciem przypieczetowanych pól (jak?). To pozwala zredukować złożoność czasową rozwiązania do $O(n^4)$.

Pocznymy teraz jedno proste spostrzeżenie dotyczące monotoniczności pieczątek. Otóż jeżeli kartkę można pokryć pieczątką $a \times b$, to można ją też pokryć dowolną pieczątką $a' \times b'$, gdzie $a' \leq a$ oraz $b' \leq b$. Dla każdego a możemy więc za pomocą wyszukiwania binarnego wyznaczyć maksymalne b , takie że pieczątką $a \times b$ da się pokryć całą kartkę. W ten sposób otrzymujemy rozwiązanie o złożoności $O(n^3 \log n)$. Jeśli zamiast wyszukiwania binarnego wykonamy nieco bardziej finezyjne przeglądanie zbioru pieczątek, tzn. wraz z rosnącymi wartościami a będziemy rozważać coraz mniejsze wartości b , możemy obniżyć złożoność czasową rozwiązania do $O(n^3)$.

Istnieje jednak rozwiązanie działające w czasie liniowym względem rozmiaru planszy, czyli w czasie $O(n^2)$. Kluczem do otrzymania takiego rozwiązania jest przyjrzenie się polom „brzegowym”, czyli polom dozwolonym sąsiadującym z jakimś polem zabronionym. Oczywiście, każde takie pole musi zostać pokryte pieczątką. Chcielibyśmy w zwarty sposób opisać zbiór wszystkich rozmiarów pieczątek, którymi można to zrobić.

Spójrzmy na poniższy rysunek, na którym zamalowano jedno z pól brzegowych. Do pokrycia tego pola można użyć dowolnej pieczątki o wysokości 1 i szerokości co najwyżej 7, podobnie – dowolnej pieczątki o wysokości 2 i szerokości co najwyżej 5, dowolnej pieczątki o wysokości 3 i szerokości co najwyżej 5 itd.



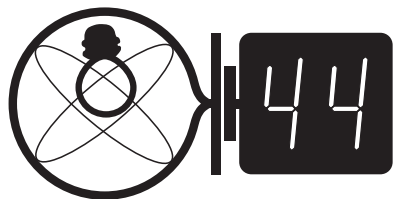
Inaczej można na to spojrzeć tak: mamy pewien zbiór *złych* pieczątek – w powyższym przykładzie są to 1×8 , 2×6 , 3×6 , 4×5 , 5×3 , 6×3 , 7×2 i 8×1 – i szukamy pieczątki, która nie zawiera żadnej złej pieczątki (jako podprostokąta). Podobnie możemy wyznaczyć złe pieczątki dla każdego innego pola brzegowego, pamiętając, że pole brzegowe może sąsiadować z odpowiadającym mu polem zabronionym w jednym z czterech kierunków. Pieczątki, której szukamy, będzie pieczątką o maksymalnym polu niezawierającą żadnej złej pieczątki.

Zajmijmy się teraz implementacją algorytmu. Przede wszystkim dla każdego dozwolonego pola planszy będziemy pamiętały odległość do najbliższego pola zabronionego w każdym z czterech kierunków. To pozwoli nam wyznaczać kolejne złe pieczątki o coraz większych wysokościach w czasie stałym. Dalej, na zbiorze rozmiarów złych pieczątek zbudujemy dwuwymiarowe sumy prefiksowe, co pozwoli nam łatwo określać, jakie pieczątki nie zawierają w sobie żadnej z nich. Wszystkie wymienione operacje można bez problemu wykonać w czasie $O(n^2)$. Złożoność rozwiązania zależy jeszcze od liczby wyznaczonych złych pieczątek. Liczba ta jest równa sumie długości odcinków przebytych przez nasz algorytm (strzałka na rysunku). Jednak każde pole dozwolone znajduje się na dokładnie czterech takich odcinkach, po jednym w każdym kierunku. Stąd suma długości odcinków to co najwyżej $4n^2$ i całe rozwiązanie ma złożoność $O(n^2)$.

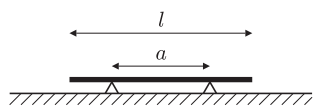
Wiemy, że wynikową pieczątką można pokryć wszystkie pola brzegowe. Należałoby jeszcze wykazać, że tak skonstruowaną pieczątką można pokryć także pozostałe pola dozwolone. Dowód tego faktu pozostawiamy do przemyślenia Czytelnikom. Można także obejrzeć film z omówieniem: <http://youtu.be/glryefmzxZw>.

Jakub RADOSZEWSKI

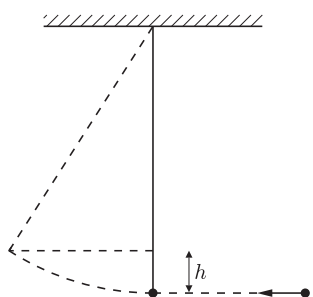
Klub 44



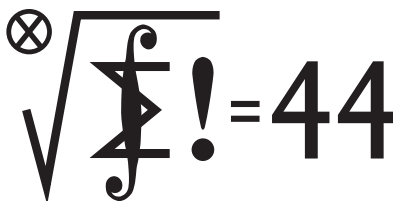
Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2014



Rys. 1



Rys. 2



Termin nadsyłania rozwiązań: 28 II 2014

Liga zadaniowa Wydziału Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego i Redakcji *Delty*

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl

Zadania z fizyki nr 568, 569

Redaguje **Elżbieta ZAWISTOWSKA**

568. Cienki, jednorodny pręt o masie m i długości l leży symetrycznie na dwóch podporach odległych o a (rys. 1). Jedną z podpór usunięto. Znaleźć siłę reakcji drugiej podpory natychmiast po usunięciu pierwszej.

569. Naładowana kulka o masie m wisi na elektrycznie izolowanej nici (rys. 2). Znaleźć pracę, jaką należy wykonać, przybliżając z daleka i bardzo wolno drugą naładowaną kulkę i umieszczając ją w miejscu, gdzie przedtem znajdowała się kulka wisząca na nici. Pierwsza kulka odchyliła się i podniosła na wysokość h . Przyspieszenie ziemskie g jest dane.

Zadania z matematyki nr 671, 672

Redaguje **Marcin E. KUCZMA**

671. Płaszczyznę podzielono prostymi poziomymi i pionowymi na kwadraty jednostkowe i niektóre z tych kwadratów (skończenie wiele) zaczerwniono. Każdy czarny kwadrat ma wspólne boki z dokładnie dwoma innymi czarnymi kwadratami. Ile może być czarnych kwadratów? Podać wszystkie możliwe wartości ich liczby.

672. Wykazać, że istnieje nieskończenie wiele par liczb wymiernych dodatnich u, v , dla których liczba

$$u + \frac{1}{u} + v + \frac{1}{v}$$

jest całkowita.

Zadanie 672 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

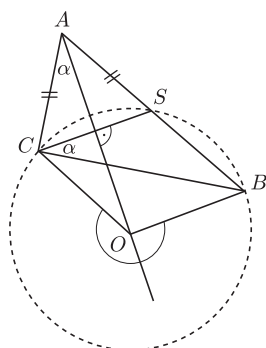
Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 558 ($WT = 2,2$), 559 ($WT = 2,12$), 560 ($WT = 1,6$) i 561 ($WT = 2,35$) z numerów 5-6/2013

Andrzej Nowogrodzki	Chocianów	43,72
Krzysztof Magiera	Łosiów	37,67
Michał Koźlik	Gliwice	36,14
Jacek Konieczny	Poznań	24,51

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 661 ($WT = 1,13$) i 662 ($WT = 2,84$) z numeru 5/2013

Krzysztof Kamiński	Pabianice	46,86
Paweł Najman	Kraków	46,33
Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Fiett	Warszawa	38,75
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72
Andrzej Idzik	Bolesławiec	36,63

Te nazwiska nie są nowe: Krzysztof Kamiński – już po raz drugi; a Paweł Najman – po raz szósty; to już druga norma weterańska.



Rozwiązanie zadania M 1405.

Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na trójkącie BCS . Ponieważ trójkąt ACS jest równoramienny, dwusieczna kąta BAC to symetralna odcinka CS , więc leży na niej punkt O . Oznaczmy $\alpha = \sphericalangle CAO$. Wówczas $\sphericalangle SCB = \alpha$, a skoro $\sphericalangle BSC = 180^\circ - \sphericalangle CSA = 90^\circ + \alpha$, to

$$\sphericalangle BOC = 2(180^\circ - \sphericalangle BSC),$$

skąd łatwo otrzymać $\sphericalangle OCB = \alpha$. Równość $OC = AC$ jest równoważna $\sphericalangle OCS = \sphericalangle SCA$, czyli $\alpha = 30^\circ$. A to jest równoważne temu, że ABC jest *połówką* trójkąta równobocznego lub że S jest środkiem AB .



Rozwiązanie zadania M 1407.

Załóżmy, że $|AB| = x + y$, gdzie y to długość odcinka z ruchomą taśmą. Jeśli Jaś będzie biegł poza taśmą, to pokona drogę od A do B w czasie

$$t_1 = t + \frac{x - tv'}{v} + \frac{y}{u + v},$$

a gdy będzie biegł po taśmie, to droga zajmie mu czas

$$t_2 = \frac{x}{v} + t + \frac{y - t(u + v')}{u + v}.$$

Zauważmy, że

$$t_1 - t_2 = t \frac{u + v'}{u + v} - t \frac{v'}{v} = tu \frac{v - v'}{(u + v)v} < 0,$$

więc Jaś powinien biec poza taśmą.

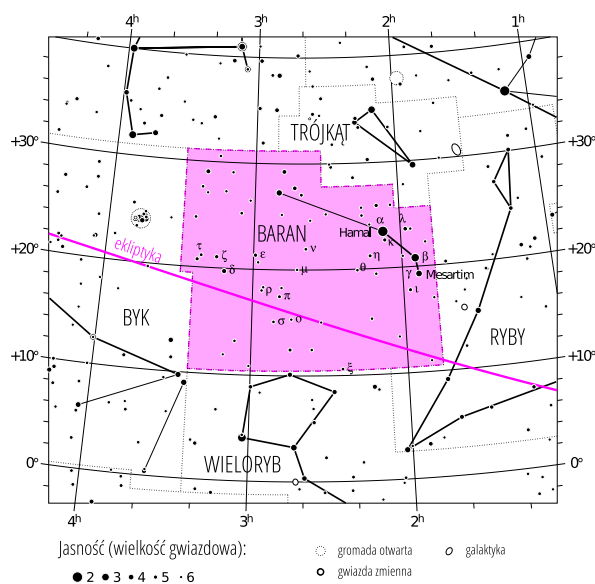
Prosto z nieba: Cmentarzysko bezimiennych planet

Słońce jest typowym przedstawicielem populacji dyskowej Ciągu Głównego, gwiazdą zawierającą w widmie linie pierwiastków cięższych od helu i „palącą” wodór w jądrze. Będąc w wieku około 4,5 mld lat, ma jeszcze przed sobą mniej więcej tyle samo czasu spokojnej ewolucji aż do momentu, gdy wyczerpie się zapas wodoru, a faza palenia helu w otoczce jądra (a później w samym jądrze) zamieni je w czerwonego olbrzyma. Słońce znacznie zwiększy wtedy swoje rozmiary, sięgając poza orbitę Ziemi. Wypalanie helu będzie ostatnim aktywnym procesem naszej macierzystej gwiazdy; synteza cięższych pierwiastków nie jest możliwa w gwiazdach o masie Słońca. Ostatnim stadium jest odrzucenie rozdętej otoczki, co spowoduje powstanie mgławicy planetarnej otaczającej jądro: samotnego, stygnącego białego karła. Los planet wewnętrznych w naszym Układzie będzie, niestety, niezbyt wesół – przypuszczalnie jednak ludzkość zdąży przenieść się w bardziej odpowiednie miejsce.

Bardzo aktywne ostatnio przeglądy nieba (m.in. Kepler, OGLE) zidentyfikowały dotychczas prawie 1000 planet, w większości masywnych gazowych obiektów wielkości Jowisza. Technika i dokładność pomiarowa idzie jednak naprzód, dlatego odkrywają się także coraz więcej planet

rozmiaru i masy porównywalnej z Ziemią. Metody używane w odkryciach są różne: mikroszczepkowanie grawitacyjne, obserwacje zaćmień lub analiza widm. Niedawno teleskop Hubble’a, używając ultrafioletowego spektrografu COS (ang. *Cosmic Origins Spectrograph*), zaobserwował zjawiska świadczące o istnieniu planet w niespotykanym miejscu. Skład widm dwóch białych karłów należących do gromady Hiady (gwiazdozbiór Byka) wykazał dużą zawartość krzemu, czyli głównego składnika skalistych globów, a także ślady węgla (trudnego do obserwacji z powierzchni Ziemi i dobrze widocznego w ultrafioletcie jedynie z orbity). Hipoteza postawiona przez badaczy brzmi następująco: planety uformowały się, podobnie do Układu Słonecznego, we wczesnym etapie ewolucji gwiazdy. Po powstaniu białego karła pozostałości planet i reszta skalistego materiału utworzyły skalisty dysk, w którym oddziaływanie pływowe rozbija przelatujące zbyt blisko gwiazdy asteroidy, a akreowane pozostałości wpadają do atmosfery. Zespół COS planuje analizę składu wielu innych białych karłów, ponieważ obserwacje spektroskopowe wydają się być obiecującą metodą na oszacowanie liczby i składu skalistych planet podobnych do Ziemi.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Barana. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych. [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Niebo jak własna kieszeń: Grudzień

Baran (łac. *Aries*) jest jednym ze słabiej rozpoznawalnych gwiazdozbiorów zodiakalnych. W grudniowe wieczory znajduje się ponad południowo-zachodnim horyzontem, na zachód od Byka i Oriona; dla orientacji, można kierować się położonym ponad Baranem, a bliżej bieguna gwiazdozbiorem Kasjopei. Trzy najjaśniejsze gwiazdy Barana, α (Hamal, Głowa Barana, $2,0^m$), wraz z β (Sheratan, $2,65^m$) i γ (Mesartim, $3,86^m$) wyznaczającymi jeden z rogów tworzą charakterystyczny asteryzm. γ Arietis jest w rzeczywistości układem podwójnym zbadanym po raz pierwszy przez Roberta Hooke’a, który interesował się także obserwacjami teleskopowymi; niektóre źródła przypisują mu pierwsze obserwacje Wielkiej Czerwonej Plamy na Jowiszu, ubiegł go jednak Giovanni Domenico Cassini (1665).

Historycznie w gwiazdozbiorze Barana przecinały się ekliptyka (droga Słońca na niebie) z równikiem niebieskim (rzutem równika ziemskiego na nieboskłon). W punkcie przecięcia, zwanym punktem Barana Υ , znajduje się Słońce w momencie równonocy wiosennej. Z powodu precesji osi Ziemi punkt Barana przesunął się do gwiazdozbioru Ryb; okres precesji, rok platoński, wynosi około 25800 lat.

Deszcz Geminid (maks. 13–14 XII, 120 zjawisk/h, radiant w gwiazdozbiorze Bliźniąt) wypada w tym roku blisko pełni Księżyca (17 XII; now 3 XII). Przy okazji obserwacji meteorów można także podziwiać znajdującego się w Bliźniątach Jowisza ($-2,21^m$). O wiele słabsze Ursydy (radiant w Małej Niedźwiedzicy), o maksimum zaraz po przesileniu zimowym (21 XII), będą, niestety, także słabiej widoczne z powodu jasnego Księżyca. Długa noc pozwala na poranne obserwacje Saturna ($0,79^m$) znajdującego się w gwiazdozbiorze Wagi. 1 XII rano nastąpi spotkanie Saturna, Merkurego ($-0,56^m$) i Księżyca. Mars ($1,21^m$) jest również widoczny rano w gwiazdozbiorze Panny, natomiast Wenus znajduje się po wschodniej stronie Słońca (Strzelec, jasność 15 XII około $-4,34^m$).

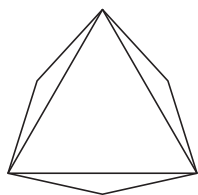
M. B.



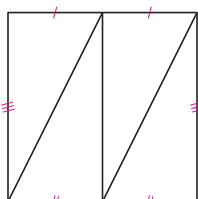
Kąty trójścienne

Joanna JASZUŃSKA

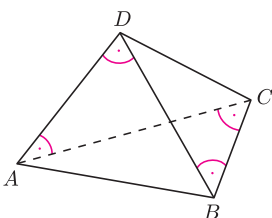
Jakie warunki spełniać muszą trzy kąty płaskie, aby można było z nich zbudować wypukły kąt trójścienny, czyli przestrzenne naroże o trzech krawędziach? Otóż suma każdych dwóch kątów musi być większa od trzeciego (podobnie jak odcinki, z których chcemy zbudować trójkąt, spełniać muszą nierówność trójkąta). Przykładowo, figura z rysunku 1 nie jest siatką czworościanu – wystarczy wyobrazić sobie próbę złożenia tej niby-siatki, by dostrzec, które pary kątów są w sumie zbyt małe.



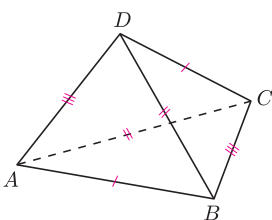
Rys. 1



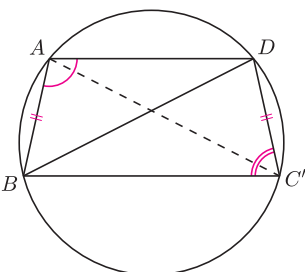
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4



Rys. 5

Zadania 3, 4 i 5 pochodzą odpowiednio z XXVIII, XXIV i LXIV Olimpiady Matematycznej.

1. Czy rysunek 2 przedstawia siatkę czworościanu?
2. Czy istnieje czworościan $ABCD$, w którym $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ADB = \sphericalangle CAD = \sphericalangle CBD = 90^\circ$ (rys. 3)?
3. Udowodnij, że w każdym czworościanie istnieje wierzchołek, przy którym trzy kąty płaskie są ostre.
4. Wykaż, że jeżeli w czworościanie $ABCD$ mamy $AB = CD$, $AC = BD$, $AD = BC$ (rys. 4), to wszystkie ściany czworościanu są trójkątami ostrokątnymi.
5. Dany jest czworokąt $ABCD$, w którym $AB = CD$ oraz $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$. Udowodnij, że $\sphericalangle BAD > \sphericalangle ADC$.

Rozwiązania

- R1.** Nie. Wystarczy spojrzeć na dowolny wierzchołek: suma dwóch mniejszych kątów przy nim równa jest 90° , czyli trzeciemu kątowi. \square
- R2.** Nie. Kąty płaskie przy wierzchołku A spełniają warunek $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD > \sphericalangle CAD = 90^\circ$. Z kolei rozważając kąt trójścienny przy B oraz trójkąty prostokątne ABC i ABD , wnioskujemy, że $90^\circ = \sphericalangle CBD < \sphericalangle ABC + \sphericalangle ABD = (90^\circ - \sphericalangle BAC) + (90^\circ - \sphericalangle BAD)$, czyli $\sphericalangle BAC + \sphericalangle BAD < 90^\circ$ – sprzeczność. \square
- R3.** Suma wszystkich kątów płaskich czworościanu równa jest $4 \cdot 180^\circ$, jako suma kątów czterech trójkątów. Wobec tego istnieje taki wierzchołek czworościanu, przy którym suma trzech kątów płaskich nie przekracza 180° , w przeciwnym razie suma wszystkich kątów płaskich czworościanu przekraczałaby $4 \cdot 180^\circ$.
- Oznaczmy kąty płaskie przy tym wierzchołku przez α, β, γ . Wówczas $\alpha < \beta + \gamma$, więc $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma \leq 180^\circ$, czyli $\alpha < 90^\circ$. Analogicznie $\beta < 90^\circ$ oraz $\gamma < 90^\circ$. \square
- R4.** Z danych równości wynika, iż wszystkie ściany rozważanego czworościanu są trójkątami przystającymi. Oznaczmy kąty ściany ABC przez α, β, γ ; ich suma to 180° . W każdym wierzchołku czworościanu schodzą się takie właśnie trzy kąty płaskie. Stąd $\alpha < \beta + \gamma$, więc $2\alpha < \alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$, czyli $\alpha < 90^\circ$. Analogicznie $\beta < 90^\circ$ oraz $\gamma < 90^\circ$. \square
- R5.** Obróćmy ścianę BCD danego czworościanu wokół krawędzi BD tak, aby znalazła się w płaszczyźnie ściany ABD , ale po przeciwnej stronie prostej BD (rys. 5). Na uzyskanym w ten sposób czworokącie $ABC'D$ można opisać okrąg, gdyż $\sphericalangle BAD + \sphericalangle BC'D = \sphericalangle BAD + \sphericalangle BCD = 180^\circ$.
- Analizując kąty wpisane w ten okrąg, oparte na równych łukach, dostajemy $\sphericalangle BAD = \sphericalangle BAC' + \sphericalangle DAC' = \sphericalangle BDC' + \sphericalangle BDA = \sphericalangle BDC + \sphericalangle BDA > \sphericalangle ADC$, przy czym ostatnią nierówność otrzymujemy, rozważając kąt trójścienny przy wierzchołku D czworościanu. To kończy dowód. \square

Zadania domowe

6. Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny $ABCDS$ o podstawie $ABCD$, w którym $\sphericalangle ASB = 2\sphericalangle BSC$, $\sphericalangle BSC = 2\sphericalangle CSD$ oraz $\sphericalangle CSD = 2\sphericalangle DSA$?
7. Na rysunku 1 zmodyfikujmy kształty trójkątów tak, aby odpowiednie pary odcinków, które mają się skleić, nadal były równe oraz by przy każdym wierzchołku docelowego czworościanu dowolne dwa kąty płaskie były w sumie większe od trzeciego. Czy te warunki wystarczają, by otrzymać siatkę pewnego czworościanu?
8. (a) Wykaż, że istnieje czworościan o kwadratowej siatce.
(b) Wykaż, że istnieje czworościan o wszystkich ścianach prostokątnych.