




ISSN 1644-1808
P-ISSN 1644-1808
E-ISSN 1644-1808

12 listopada 2013 roku zmarł
Profesor Konrad Rudnicki
astronom
Autor *Delty*

SPIS TREŚCI NUMERU 1 (476)

Lampy Catalana <i>Roman Staszczuk</i>	str. 1
Konfiguracje Ziemia–Wenus w „boskiej proporcji” <i>Lech Falandysz</i>	str. 2
Jak odkryć nową cząstkę? <i>Maciej Misiura</i>	str. 4
Na granicy możliwości <i>Wojciech Czerwiński</i>	str. 6
 Zadania	str. 8
Ze świata USOS. Część 3 – Ratunku! Moje dane! <i>Krzysztof Stencel</i>	str. 9
Zegar <i>Przemysław Kiciak</i>	str.11
Projekt Astro Izery. Wędrowka planetarną ścieżką <i>Sylwester Kolomański, Tomasz Mrozek, Grzegorz Żakowicz</i>	str.12
O pewnych kratach testowych <i>Małgorzata Jastrzębska</i>	str.14
Kryptartytmy, czyli arytmetyka słów <i>Renata Juraszewska</i>	str.16
XXX Ogólnopolski Sejmik Matematyków	str.17
XXXV Konkurs Uczniowskich Prac z Matematyki	str.17
Wszystko w płynie, czyli poznajemy podstawy reologii <i>Stanisław Bednarek</i>	str.18
 Z babciąmi w internecie <i>Magdalena Fikus</i>	str.19
Informatyczny kącik olimpijski (68): Drogi stanowe <i>Jakub Radoszewski</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: Włókna i pustki <i>Michał Bejger</i>	str.24
Niebo jak własna kieszeń: Styczeń	str.24
 Drogi w kratach i kino <i>Joanna Jaszewska</i>	str.25

Miesięcznik *Delta* – matematyka, fizyka, astronomia, informatyka jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Maria Donten-Bury, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Urszula Pastwa, Jakub Radoszewski, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski. Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

Pol-Perfect: www.polperfect.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2014 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania

prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–18⁰⁰.

Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numerzy archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł

W następnym numerze polecamy



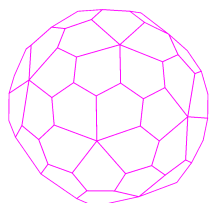
walkę ze spambotami

Lampy Catalana

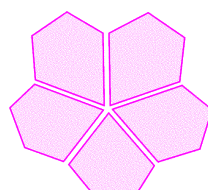
Roman STASZCZYK*



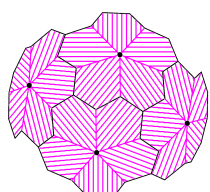
Rys. 1



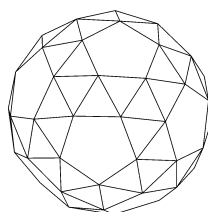
Rys. 2



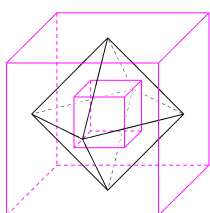
Rys. 3



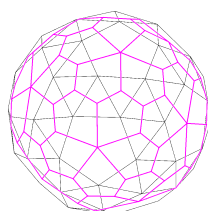
Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6



Rys. 7



Rys. 8

Wielu projektantów często w swych koncepcjach odwołuje się do geometrycznych form, inspirując się harmonią, regularnościami i symetrią brył przestrzennych. Do takich twórców należy Tom Dixon, autor wielu innowacyjnych pomysłów. Podczas międzynarodowych targów sztuki użytkowej we Frankfurcie przedstawił projekt oświetlenia oparty na formach geometrycznych rzadko spotykanych w wystroju wnętrza. Zaprezentował lampy, których obudowy są powierzchniami brył Catalana (rys. 1, 8). Przyjrzyjmy się bliżej strukturze geometrycznej lampy z rysunku 1.

Powierzchnia lampy składa się z przystających (ale nieforemnych!) pięciokątów i ma dwa typy naroży: takie, w których spotykają się trzy, i takie, w których styka się pięć ścian (rys. 2). W narożach drugiego rodzaju, z których wychodzi po pięć krawędzi, pięciokąty stykają się kątami ostrymi. W pozostałych, z których wychodzą po trzy krawędzie, spotykają się kąty rozwarte.

Do opisu struktury żyrandola przyjmijmy następujące oznaczenia:

W – liczba wierzchołków,

n – liczba wierzchołków, w których spotyka się pięć ścian,

m – liczba wierzchołków, w których spotykają się trzy ściany,

K – liczba krawędzi,

S – liczba ścian.

Stwierdziliśmy już, że są tylko dwa rodzaje wierzchołków, co oznacza, że $W = n + m$. Ponadto, ponieważ każda ściana jest pięciokątem, więc wszystkie ściany mają w sumie $5S$ krawędzi. Musimy jednak pamiętać, że każdą krawędź wielościanu liczymy podwójnie, ponieważ należy do dwóch ścian (rys. 3). Stąd $5S = 2K$.

Podobnie, z wierzchołków wychodzi w sumie $5n + 3m$ krawędzi, ale znów policzyliśmy każdą krawędź dwukrotnie, raz dla każdego końca. Wobec tego $5n + 3m = 2K$. Możemy także zaobserwować, że każdy wierzchołek z pięcioma wychodzącymi krawędziami jest środkiem grupy pięciu pięciokątów (rys. 4), i że takie grupy nie przecinają się i pokrywają całą powierzchnię. Otrzymujemy więc $S = 5n$, a stąd $K = \frac{5}{2}S = \frac{25}{2}n$.

Przypomnijmy wzór Eulera na związek między liczbą wierzchołków, krawędzi i ścian dowolnego wypukłego wielościanu: $W + S = K + 2$. W naszym przypadku, skoro $W = n + m$, $S = 5n$ i $K = \frac{25}{2}n$, to otrzymujemy $m = \frac{13}{2}n + 2$. Z tej zależności, korzystając z $5n + 3m = 2K$ i jeszcze raz z $K = \frac{25}{2}n$, uzyskujemy: $5n + 3(\frac{13}{2}n + 2) = 25n$, a zatem $n = 12$. Stąd już łatwo obliczyć $m = 80$, $W = 92$, $S = 60$ i $K = 150$. Podsumowując, nasza lampa zbudowana jest z 60 ścian pięciokątnych i liczy 92 wierzchołki oraz 150 krawędzi.

Ten wielościan to tak zwany *sześcistościan pięciokątny*. Jest reprezentantem grupy wielościanów opisanej prawie 150 lat temu przez belgijskiego matematyka Eugène'a Catalana. Badając grupę trzynastu brył archimedesowych (półforemnych – ściany foremne, niekoniecznie jednakowe, naroża jednakowe), Catalan skonstruował ich dualne odpowiedniki. Otrzymana w ten sposób rodzina brył ma wiele intrygujących własności. Wszystkie ściany takich brył są identyczne, choć nie są foremne. W każdą z nich można wpisać kulę styczną do wszystkich ścian. Są wśród nich egzemplarze, na podstawie których projektuje się piłki, ale również takie, którymi można całkowicie wypełnić przestrzeń, nie pozostawiając żadnych szczelin.

Badana przez nas lampa jest dualna do bryły nazywanej *dwudziesto-dwunastościanem przyciętym* (rys. 5). Wielościany dualne to pary brył, w których jedną otrzymuje się z drugiej (a drugą z pierwszej) przez połączenie krawędziami środków sąsiednich ścian wielościanu. Najprostszy przykład to sześciian i ośmiościan foremny (rys. 6): łącząc środki ścian sześciianu dostajemy ośmiościan, a po połączeniu środków ścian ośmiościanu z powrotem mamy sześciian. W przypadku omawianej lampy łącząc odpowiednio środki ścian dwudziesto-dwunastościanu przyciętego, otrzymamy sześcistościan pięciokątny (rys. 7).

Istnieją jeszcze inne eleganckie modele geometryczne, które „świecą przykładem”: w kolekcji Toma Dixona można znaleźć lampę w formie *dwudziestoczterościanu deltoidowego* (rys. 8). Czytelnika Wnikliwego zachęcam do rozszyfrowania szczegółów jej konstrukcji.

* Zespół Szkół Geodezyjno-Drogowych i Gospodarki Wodnej w Krakowie

Konfiguracje Ziemia–Wenus w „boskiej proporcji”

Lech FALANDYSZ

Tak zwana boska proporcja, inaczej złoty podział, to znany od starożytności specjalny sposób podziału odcinka. Dla odcinka o długości równej 1 stosunek większej części o długości x do $1 - x$ jest równy stosunkowi $1/x$,

$$\frac{x}{1-x} = \frac{1}{x} \Rightarrow x^2 + x - 1 = 0.$$

Dodatni pierwiastek tego równania to $(\sqrt{5} - 1)/2 = 0,618033989\dots$, stąd $\varphi = (\sqrt{5} + 1)/2 = 1,618033989\dots$. Oznacza to, że część o długości x stanowi około 0,618 z długości całego odcinka (jak również, część o długości $1 - x$ to około 0,618 długości x). Walory złotego podziału docenia się od dawna w sztuce: rzeźbie, malarstwie i architekturze, ponieważ tworzy on miłe dla oka wrażenie harmonii pomiędzy elementami całości budynku, rzeźby lub obrazu. Złoty podział jest wszechobecny w przyrodzie: w rozmieszczeniu gałązek i liści wielu roślin, kształcie muszli itd. Postać wyprostowanego człowieka również dzieli się na części według złotej proporcji. W matematyce φ pojawia się w figurach foremnych: pięciokącie, dziesięciokącie, dwunastościanie i dwudziestościanie, a także spirali logarytmicznej, w ciągu Fibonacciego i innych obiektach matematycznych.

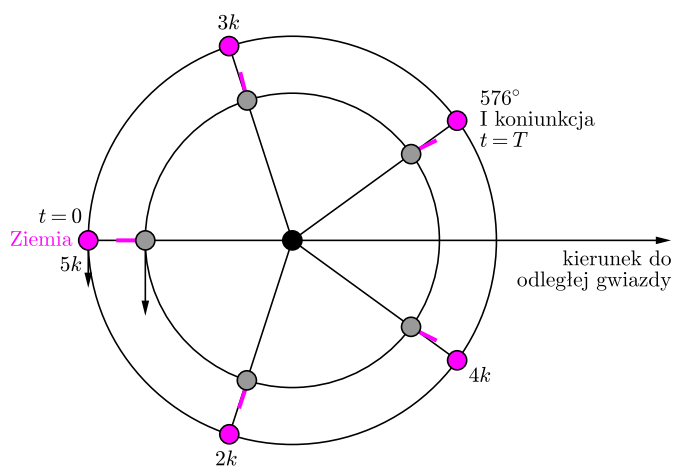
Zajmiemy się teraz analizą ruchów Ziemi i Wenus w heliocentrycznym układzie odniesienia. Wyniki będą przybliżone, ponieważ zakładamy, że orbity planet są okręgami i leżą w jednej płaszczyźnie. Przyjmijmy, że średnia odległość Wenus–Słońce wynosi $R_w = 0,723$ AU (jednostki astronomicznej, czyli średniej odległości Ziemia–Słońce, $R_z = 1$ AU). Z trzeciego prawa Keplera w postaci uogólnionej, $R^3/T^2 = G(M_\odot + m)/(4\pi^2)$ dostajemy, przy założeniu równości mas planet oraz $m \ll M_\odot$, stosunek ich okresów orbitalnych $T_w/T_z = (R_w/R_z)^{3/2} \simeq 0,615$, czyli wartość bliską $\varphi - 1$. Konfiguracje pojawiające się w tym układzie odzwierciedlają więc przybliżony złoty podział – w tym przypadku związaną z częstością ruchu planet „muzyczną harmonię”. Jeśli zaś chodzi o odległości geometryczne, rysunek 1 przedstawia Wenus w koniunkcji dolnej. Na powierzchni Wenus zaznaczona jest fikcyjna wieżyczka skierowana w tym momencie ku Ziemi. Następną koniunkcję Wenus nastąpi po czasie T zwanym okresem synodycznym Wenus. Do obliczenia tego okresu przyjmijmy wyliczone powyżej wartości:

$$T = \frac{T_z T_w}{T_z - T_w} = 1,60 \text{ roku ziemskiego} = 584 \text{ dób ziemskich.}$$

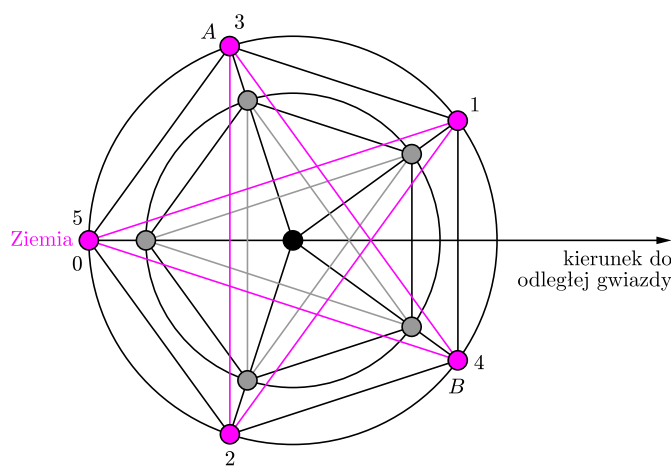
W tym okresie promienie wodzące planet zakreślą kąty: dla Ziemi 576° , a dla Wenus 936° . Wenus znajdzie się w koniunkcji dolnej oznaczonej I. Kolejne koniunkcje dolne zaznaczone są na rysunku 1 w regularnych odstępach. Piąta koniunkcja jest powtórzeniem konfiguracji początkowej. Czas $5T$ jest



Sytuację, w której Wenus, Ziemia i Słońce są w jednej linii, nazywamy koniunkcją. Gdy Wenus i Ziemia są po tej samej stronie Słońca, jest to koniunkcja dolna.



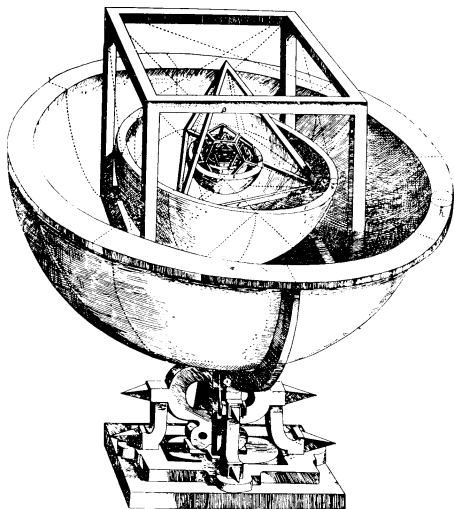
Rys. 1. Cykl pięciu koniunkcji



Rys. 2

Kepler dwukrotnie odnalazł prawidłowości w układzie planet. Za pierwszym razem jego pomysł opierał się na spostrzeżeniu, że jest pięć planet, czyli ruchomych gwiazd, widocznych gołym okiem, a więc tyle samo, ile wielościanów foremnych.

Sprawdził zatem, że te dwie piątki można skojarzyć, rysując sfery o środku w Słońcu: gdy na sferze, na której leży orbita Merkurego, opiszemy ośmiościan foremny, to będzie on wpisany w sferę, na której leży orbita Wenus. Opisany na niej z kolei dwudziestościan będzie wpisany w sferę z orbitą Ziemi. Dwunastościan opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą Marsa, a czworościan opisany na tej sferze będzie wpisany w sferę z orbitą Jowisza. I sześcián opisany na niej będzie wpisany w sferę z orbitą Saturna.

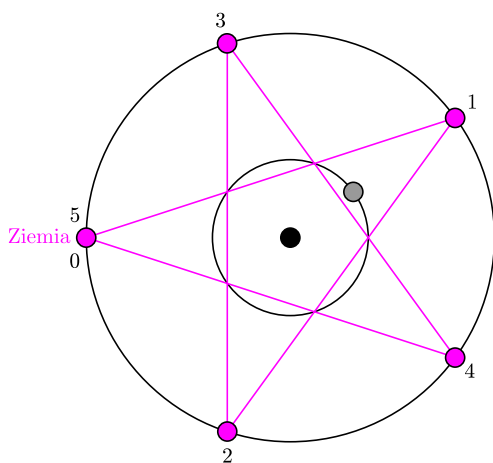


To nawet ładnie wygląda. Zachwycony jego obliczeniami Tycho Brahe uczynił go nawet z tego powodu swoim następcą na dworze cesarza Rudolfa II. Ale sam Kepler widział, że – choć opisana wyżej konstrukcja jest z drobnymi uproszczeniami poprawna – nie można z tego wyciągnąć żadnego wniosku przydatnego przy przewidywaniu zjawisk na niebie.

Dlatego też poszukiwał innych prawidłowości. I tak powstały prawa Keplera, które głoszą, iż planety poruszają się po orbitach eliptycznych, w których ognisku jest Słońce, a promień wodzący każdej z nich zamiata w równych odstępach czasu równe pola. Co więcej, między ruchem różnych planet jest zachowany związek mówiący, że stosunek sześciannu ich średniej odległości od Słońca do kwadratu czasu pełnego obiegu jest dla każdej z nich taki sam.

Newton wykazał, że z tych praw na gruncie jego praw dynamiki wynika powszechne ciążenie, a z powszechnego ciążenia – prawa Keplera. Dlatego uznajemy te prawa za prawa nauki, a nie przypadkową koincydencję faktów.

Redakcja



Rys. 3

okresem powtarzalności konfiguracji tych trzech ciał w przestrzeni. W czasie $5T$ Ziemia wykonuje wokół Słońca 8 pełnych obiegów, a Wenus 13. Rotacja Wenus wokół własnej osi odbywa się w kierunku wstecznym niż rotacja większości planet i wynosi około 243 dób ziemskich. Oznacza to, że w ciągu jednego dnia ziemskiego Wenus obraca się o kąt $1,481^\circ$. Po pierwszym okresie T kąt, o jaki obróciła się Wenus, wynosi więc $584 \cdot 1,481^\circ \equiv 865^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 145^\circ$.

Przy każdej koniunkcji dolnej Wenus zwrócona jest do Ziemi tym samym miejscem na jej powierzchni (wieżyczką ku Ziemi). Z powodu bardzo powolnej rotacji doba na Wenus, tzn. odstęp czasu pomiędzy kolejnymi wschodami Słońca, wynosi 116,8 dób ziemskich. Wynika stąd, że pomiędzy koniunkcjami upływa $584/116,8 = 5,00$ dób wenusjańskich. Miejsca koniunkcji Wenus na jej orbicie znajdują się w wierzchołkach pięciokąta foremnego (rys. 2). Łącząc odcinkami kolejne pozycje planety podczas koniunkcji, otrzymujemy dla czasu $5T$ pentagram: jeden dotyczący ruchu Ziemi, a drugi Wenus. Punkty przecięcia przekątnych pięciokąta wyznacza ich złoty podział: $CD/CA = CA/AD = 0,618$ oraz $AB/BD = BD/AD = 0,618$. Odkryliśmy więc kolejną harmonię w ruchach Ziemi i Wenus wokół Słońca. „Boska proporcja” przejawia się w okresach obiegu tych planet (0,615) oraz w geometrii dotyczącej koniunkcji Wenus (0,618). Na rysunku 3 przedstawiony jest dodatkowo ziemski pentagram z rysunku 2. Jego przecinające się ramiona tworzą w środkowej części pięciokąt foremny. Okrąg opisany na nim ma promień niemalże równy średniej odległości Merkurego od Słońca. W rzeczywistości półosie eliptycznej orbity Merkurego wyraźnie odbiegają od średniej odległości, podobnie jest w przypadku Plutona (mimośrodowość ich orbit mają wartości ponad 0,2).

Wiara w istnienie porządku w rozmieszczeniu i ruchach planet jest dla wielu uczonych inspiracją do ich poszukiwań. W XVII w. Johannes Kepler sformułował prawa dotyczące ruchu planet, a XVIII-wieczny astronom Johann Titius z Wittenbergi podał matematyczną regułę, według której rozmieszczone miały być planety. Wkrótce później regułę tę rozpowszechnił Johann Bode. Reguła Titiusa–Bodego umożliwia w prosty sposób obliczenie przybliżonych średnich odległości planet od Słońca. Odległość ta to $0,4 + 0,3 \cdot 2^n$ AU, gdzie n , począwszy od Merkurego, wynosi $n = -\infty, 0, 1, 2, 3, \dots$. Mimo zaskakująco dobrej zgodności dla większości planet reguła ta nie wynika wprost z równań mechaniki nieba, może za to być traktowana jako wygodne „pierwsze przybliżenie”.

Przedstawione wyżej obliczenia traktuję jako ciekawostkę, która daje mi poczucie, że ruchami ciał niebieskich rządzą prawa o walorach estetycznych (muzyka sfer?). Przyczyną tych prawidłowości są, jak obecnie wiemy, wzajemne oddziaływania w układzie Słońce–najbliższe planety, w szczególności występowania rezonansów pomiędzy składnikami układu. Dlaczego pojawił się tu złoty podział? Tego nie wiem, zachęcam jednak do własnych badań w poszukiwaniu nowych prawidłowości.

Jak odkryć nową cząstkę?

Maciej MISIURA*

O odkryciu bozonu Higgsa informowaliśmy w *Delcie* 10/2012 i 7/2013.



Fot. 1. Analiza danych eksperymentu CMS w ramach warsztatów.



Fot. 2. Telekonferencja z udziałem innych grup biorących udział w warsztatach.

Po raz kolejny naukowcy z Wydziału Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego oraz Narodowego Centrum Badań Jądrowych gościli zainteresowanych fizyką licealistów z całej Polski. Warsztaty miały przybliżyć uczniom niektóre z metod, które stosuje się w poszukiwaniach nowych cząstek elementarnych, takich jak bozon Higgsa.

W lipcu 2012 roku w międzynarodowym ośrodku CERN, zlokalizowanym pod Genewą, eksperymenty ATLAS i CMS ogłosiły długo oczekiwane odkrycie bozonu Higgsa. Bozon Higgsa był ostatnią cząstką przewidzianą przez Model Standardowy, której istnienie nie zostało wcześniej potwierdzone eksperymentalnie. Ten niewątpliwie przełomowy wynik jest efektem pracy wielu osób. Obecnie zespoły ATLAS i CMS liczą po około 3000 członków. A ta liczba nie uwzględnia wszystkich techników, inżynierów i fizyków, którzy od lat 80. XX wieku pracowali przy tych eksperymentach, najpierw przy planowaniu, a później budowie i działaniu.

Procesy produkcji i pomiaru własności dowolnej cząstki są skomplikowane. Za produkcję zderzeń protonów dla eksperymentów ATLAS i CMS odpowiada Wielki Zderzacz Hadronów, czyli w skrócie LHC. Przyspiesza on dwie wiązki cząstek (protonów lub jonów ołowiu) do energii zderzenia pozwalającej na wytworzenie interesującego nas obiektu. Wiązki przecinają się wewnątrz detektora, gdzie dochodzi do oddziaływania (zderzenia) cząstek. Produkują się kolejne cząstki, z których większość rozpada się. W wielu punktach detektora dokonywany jest pomiar ich pozycji, a następnie rekonstruowane są ich tory. W detektorach wytwarzane jest silne pole magnetyczne, które powoduje odchylenie toru lotu naładowanych elektrycznie cząstek. Korzystając z tego faktu, można określić znak ich ładunku elektrycznego oraz wartość pędu. Po procesie rekonstrukcji, mając zarejestrowane miliony zderzeń, przystępuje się do analizy danych.

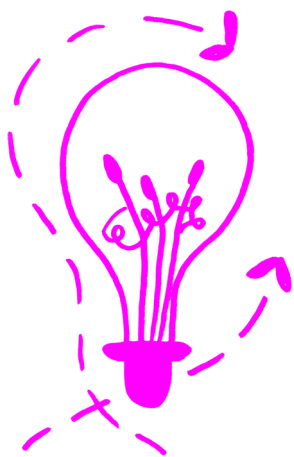
W trakcie warsztatów powtórzone zostały wybrane elementy procesu rekonstrukcji oraz analizy danych. Zadaniem uczestników było zidentyfikowanie nietrwałych cząstek na podstawie produktów ich rozpadów. Możliwych było kilka scenariuszy. Pierwszy z nich to rozpad bozonu W^+ lub W^- . Bozon W rozpada się na naładowany lepton oraz neutrino, więc przypadki z jednym elektronem lub mionem zostały zidentyfikowane jako rozpady bozonu W . Na podstawie kierunku, w którym został zagięty tor leptonu, można było określić ładunek elektryczny tej cząstki (dodatni lub ujemny), a tym samym ładunek bozonu W . Emitowane w takim rozpadzie neutrino nie jest bezpośrednio rejestrowane przez detektor. Obserwujemy natomiast „deficyt pędu” w płaszczyźnie poprzecznej – choć z uwagi na zasadę zachowania pędu suma wektorowa pędów wszystkich cząstek w tej płaszczyźnie powinna być równa zeru. Drugim scenariuszem był rozpad bozonu Z^0 : wówczas w stanie końcowym można obserwować dwa miony lub dwa elektrony. Szczególnie interesujące były przypadki, w których produkty rozpadu mogły pochodzić od pary bozonów Z^0 , jest to bowiem jeden z możliwych stanów końcowych w rozpadzie bozonu Higgsa. Dla każdej pary bozonów Z^0 obliczona została masa niezmiennicza. Przyjrzymy się nieco bliżej temu ważnemu pojęciu, gdyż właśnie dzięki badaniu rozkładu masy niezmienniczej możliwe jest odkrycie nowej cząstki.

Jeżeli nawet w zderzeniu w LHC zostanie wyprodukowany bozon Higgsa, to nie wiadomo, w którym kierunku i z jaką prędkością będzie się poruszał (oprócz tego, że prędkość ta będzie najprawdopodobniej bardzo duża). Szczególna teoria względności orzeka, że czas i położenie oraz energia i pęd wyznaczone w układach odniesienia poruszających się względem siebie z prędkością porównywalną do prędkości światła w próżni związane są transformacją Lorentza. Ma to ciekawe konsekwencje, w szczególności czas w układzie poruszającym się względem obserwatora biegnie inaczej niż w jego układzie odniesienia. Na szczęście, istnieją wielkości, których wartości nie zmieniają się przy transformacjach między układami, nazywamy je niezmiennikami. Przykład niezmiennika łatwo podać dla jednej cząstki: skoro jej energia E i pęd p związane są relacją $E = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4}$, gdzie m jest masą tej cząstki, to, przepisawszy tę zależność w postaci:

$$m^2 c^4 = E^2 - p^2 c^2,$$

otrzymujemy równość, w której wielkości występujące po prawej stronie zależą od wyboru układu odniesienia, a z lewej strony nie! Wyobraźmy teraz sobie, że mamy n cząstek, z których każda ma energię E_i oraz pęd p_i . Przyjmijmy, dla uproszczenia wzorów, że prędkość światła c jest równa 1. (W takim układzie współrzędnych energia, masa i pęd mają te same jednostki – elektronowolty (eV), zamiast odpowiednio: eV, eV/c^2 oraz eV/c ; 1 eV to energia elektronu przyspieszonego różnicą potencjałów 1 V.)

* doktorant, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski



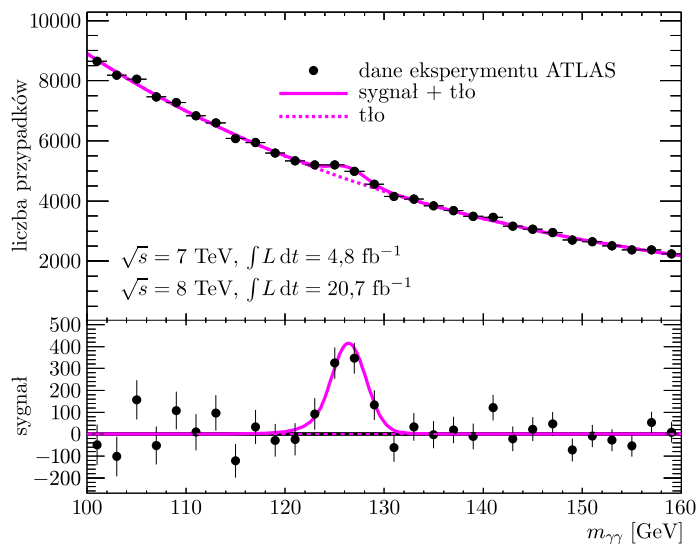
Wówczas wielkość

$$\left(\sum E_i\right)^2 - \left(\sum \vec{p}_i\right)^2$$

nie zależy od układu odniesienia, w którym wyznaczamy energie i pędy – nazywamy ją *masą niezmienniczą*.

Tak zdefiniowana masa niezmiennicza jest zachowana przy rozpadach cząstek, co wynika natychmiast z zasad zachowania pędu i energii. Jeśli zatem układ cząstek jest produktem rozpadu cząstki o masie m , to wyznaczona dla niego masa niezmiennicza będzie miała wartość m . Popatrzmy na rysunek, na którym został umieszczony rozkład masy niezmienniczej par kwantów γ zmierzony przez eksperyment ATLAS. Chociaż Model Standardowy przewiduje, że bozon Higgsa może się rozpaść na dwa kwanty γ , to istnieje wiele powodów, dla których detektor może zaobserwować niezwiązane pary takich kwantów, zwane *tłem*. Jak odróżnić sygnał bozonu Higgsa od tła? Otóż masa niezmiennicza pary kwantów γ , pochodzących z rozpadu bozonu Higgsa, będzie zawsze taka sama, więc przy masie niezmienniczej, odpowiadającej masie Higgsa, powinna wystąpić „nadwyżka” liczby przypadków. Dokładnie to widać na rysunku: charakterystyczną „górkę” przy masie niezmienniczej około 125 GeV/c². Odkryliśmy nową cząstkę!

Efekty kwantowe powodują, że masa niezmiennicza cząstek produkowanych w rozpadzie nie jest dokładnie taka sama jak masa rozpadającej się cząstki, ale rozkład masy niezmienniczej jest rozkładem Gaussa z maksimum w tym miejscu.



Rozkład masy niezmienniczej pary kwantów γ zmierzony przez eksperyment ATLAS. Tłem są pary przypadkowych kwantów γ , a sygnałem – pary pochodzące z rozpadu $H \rightarrow \gamma\gamma$.



Rozwiązanie zadania M 1408.

Zauważmy, że funkcja $f(x) = |x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + 2014|$ jest kawałkami liniowa i ograniczona z dołu przez 0. W takim razie przyjmuje minimum w jednym z węzłów $x = -1, \dots, x = -2014$. Nietrudno sprawdzić, że jest to

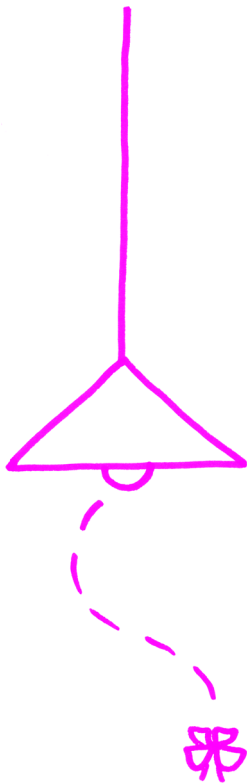
$$\begin{aligned} f(-1007) &= \\ &= 1006 + \dots + 1 + 0 + 1 + \dots + 1007 = \\ &= 1007^2 = f(-1008). \end{aligned}$$

W marcu 2014 odbędzie się kolejna edycja warsztatów. Więcej informacji można znaleźć na stronie cms.fuw.edu.pl w zakładce *Dydaktyka i popularyzacja*.

We wszystkich pomiarach, w których mierzone wielkości mają losowy charakter (a taki charakter mają efekty kwantowe, rządzące mikroświatem), kluczowa jest duża liczba przypadków, zwłaszcza jeśli interesujący nas proces jest rzadki. Nasuwa się prosta analogia: jeśli chcemy zmierzyć, jak często w rzucie sześcienną kostką otrzymamy trzy oczka, możemy nią rzucić pięć razy. Ale nie zdziwimy się, jeśli nie uda się nam wyrzucić trzech oczek ani razu. Czy to oznacza, że ta kostka nie ma trzech oczek? Nie, nasz pomiar jest obarczony dużą niepewnością, jak to określają fizycy – niepewnością statystyczną.

O roli niepewności statystycznej mieli okazję przekonać się uczestnicy warsztatów. Rozkład masy niezmienniczej par bozonów Z^0Z^0 , który otrzymaliśmy, był trudny do interpretacji ze względu na małą liczbę przypadków. Ale nasz zespół nie był jedyny na świecie, który wykonywał w tym czasie takie samo zadanie. W trakcie połączenia telekonferencyjnego wyniki rozkładów masy niezmienniczej, uzyskane przez zespoły z Niemiec, Serbii i Brazylii, zostały zsumowane. Zobaczyliśmy wyraźną nadwyżkę przypadków w okolicy masy 125 GeV/c². Jak się domyślacie, zinterpretowaliśmy ją jako przejaw bozonu Higgsa! Pokazuje to jeszcze jeden aspekt odkrycia w przypadku fizyki wysokich energii – jego zespołowość.

Odkrycie bozonu Higgsa oczywiście nie kończy działania eksperymentów przy LHC. Kolejnym krokiem jest zbadanie własności odkrytej cząstki: jej spinu oraz tzw. sprzężeń, czyli wielkości określających, jak chętnie bozon Higgsa oddziałuje z innymi cząstkami. Fizycy liczą na znalezienie różnic między pomiarami a przewidywaniami Modelu Standardowego. Najciekawsze nadal przed nami!



Algorytm to sposób rozwiązania pewnego problemu. Informatyka i matematyka od dawna badają różnego rodzaju problemy, szukając dla nich algorytmów, najczęściej możliwie szybkich. My jednak tym razem postąpimy wręcz przeciwnie: zajmiemy się algorytmami wyjątkowo wolnymi.

Najpierw wypada powiedzieć, że istnieją problemy, dla których w ogóle nie istnieje algorytm, który je rozwiązuje. Nie tylko nie znamy ani jednego, ale nawet potrafimy udowodnić, że żadnego nie ma. Takie problemy nazywa się nierozstrzygalnymi; najślawniejszy to *problem stopu*. Formuluje się go tak: dany jest pewien algorytm i należy stwierdzić, czy program, który będzie go realizował, kiedyś się zatrzyma. Nierozstrzygalność tego problemu oznacza więc, że nie istnieje żaden ogólny sposób, żeby stwierdzić, czy program, któremu właśnie się przyglądamy, zatrzyma się w pewnym momencie czy też będzie pracował w nieskończoność.

Tym razem zajmiemy się jednak metodą konstruowania algorytmów dla problemów, które co prawda można rozwiązać, ale nie istnieje dla nich żaden algorytm działający w jakimkolwiek rozsądnym czasie. O takich problemach mówimy, że nie są pierwotnie rekurencyjne. Można śmiało stwierdzić, że są one prawie nierozstrzygalne – na granicy możliwości rozwiązania. Żeby lepiej wyobrazić sobie, jak dziwne muszą być takie zagadnienia, sprecyzujmy, co rozumiemy przez problem, który nie jest pierwotnie rekurencyjny. Powiedzmy, że dane wejściowe są wielkości n , jeśli mają n bitów – w tym sensie, na przykład, liczba

$$2014 = 2^{10} + 2^9 + 2^8 + 2^7 + 2^6 + 2^4 + 2^3 + 2^2 + 2^1 = \langle 11111011110 \rangle_2$$

da się zapisać na 11 bitach, czyli ma wielkość 11.

Zdefiniujmy teraz funkcje $f_k : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, gdzie k przebiega zbiór liczb naturalnych. Przyjmujemy $f_1(n) = n + 2$ oraz

$$f_k(n) = \underbrace{f_{k-1}(f_{k-1}(f_{k-1}(\dots(2))))}_{n-1}$$

dla $k \geq 2$. Czyli

$$f_2(n) = 2n, \quad f_3(n) = 2^n, \quad f_4(n) = \underbrace{2^{2^{\dots^{2^2}}}}_n \quad \text{itd.}$$

Można sobie tylko próbować wyobrazić, co dzieje się dalej. Funkcje, dla których istnieje oszacowanie z góry przez pewną funkcję $C \cdot f_k$ (dla $C, k \in \mathbb{N}$), nazywamy funkcjami pierwotnie rekurencyjnymi. Zatem funkcje, które nie są pierwotnie rekurencyjne, to takie, które rosną jeszcze szybciej niż funkcje f_k . Przykład funkcji, która nie jest pierwotnie rekurencyjna, to funkcja $F(n) = f_n(n)$. Czytelnik Wnikliwy może się przekonać, że istotnie dla każdej funkcji $C \cdot f_k$ istnieje takie n , że $F(n) > C \cdot f_k(n)$. Podobnie definiuje się inny znany przykład: funkcję Ackermanna.

Powiemy też, że problem nie jest pierwotnie rekurencyjny, jeśli nie istnieje żaden algorytm dla tego problemu, który dla każdego danych wielkości n wykonuje co najwyżej $C \cdot f_k(n)$ operacji dla pewnych $C, k \in \mathbb{N}$. O dziwo, znamy jednak techniki, które pozwalają nam projektować algorytmy działające w czasie nieograniczonym przez funkcję pierwotnie rekurencyjną. Najpierw przedstawmy jednak głównego bohatera, czyli badany problem.

Będziemy rozważać wektory składające się z n liczb naturalnych, czyli elementy zbioru \mathbb{N}^n . Dany jest wektor początkowy $v_p \in \mathbb{N}^n$, wektor końcowy $v_k \in \mathbb{N}^n$ oraz skończony zbiór wektorów krokowych $K \subseteq \mathbb{Z}^n$. Zwróćmy uwagę na to, że w wektorach krokowych dopuszczamy ujemne współrzędne! Pytanie brzmi: czy możemy w skończonej liczbie ruchów dojść z punktu v_p do punktu v_k , o ile mamy do dyspozycji następujące ruchy:

1. dodanie wektora krokowego, o ile to nie spowoduje, że wyjdziemy poza \mathbb{N}^n : $v \mapsto v + v'$, gdzie $v' \in K$, $v + v' \in \mathbb{N}^n$;
2. zmniejszenie którejś współrzędnej, o ile to nie spowoduje, że wyjdziemy poza \mathbb{N}^n : $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - c, x_{i+1}, \dots, x_n)$, gdzie $x_i \geq c$, $c \in \mathbb{N}$.

Jeśli istnieje takie przejście, to nazwiemy je *ścieżką* z v_p do v_k .



Rozwiązanie zadania M 1410.

Mamy $a_2 = 1^{\pm 1} = 1$,
 $a_3 = 1^{\pm 1} + 1^{\pm 1} = 2$. Oczywiście, dla każdego n zachodzi $a_n \geq 1$, a więc również $a_{n-1} \leq a_n$. W takim razie dla $n \geq 4$ mamy

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{a_4} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} \leq a_n \leq 1 + 1 + 2 + a_4 + \dots + a_{n-1}.$$

Z drugiej nierówności możemy przez łatwy dowód indukcyjny wyprowadzić własność $a_n \leq 2^{n-2}$ dla $n \geq 2$. Wówczas jednak pierwsza nierówność daje oszacowanie

$$a_{2014} \geq 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{2014-3}} = 3 - \frac{1}{2^{2011}}.$$

Wartość $3 - 2^{-2011}$ jest osiągnięta przez a_{2014} dla ciągu określonego przez warunek $a_k = 2^{k-2}$ dla $k \leq 2013$. Faktycznie wówczas

$$a_n = a_1 + \dots + a_{n-1}$$

dla $n \leq 2013$, oraz

$$a_{2014} = a_1^{-1} + \dots + a_{2013}^{-1},$$

więc ciąg ten spełnia warunki zadania.

*Uniwersytet w Bayreuth;
 Instytut Informatyki,
 Uniwersytet Warszawski

Dla powyższego problemu można podać algorytm działający w czasie rzędu 2^{2^n} (czyli ten problem jest pierwotnie rekurencyjny). Ale właśnie ten przykład świetnie ilustruje techniki, za pomocą których rozwiązuje się nawet dużo trudniejsze problemy, w tym takie, które nie są pierwotnie rekurencyjne.

Na początek przedstawimy nasze główne narzędzie: lemat Dicksona. Powiemy, że wektor $v = (x_1, \dots, x_n)$ jest *mniejszy lub równy* niż wektor $v' = (x'_1, \dots, x'_n)$, jeśli $x_i \leq x'_i$ dla każdej współrzędnej $i \in \{1, \dots, n\}$; piszemy wtedy $v \preceq v'$.

Lemat 1 (Dicksona). Niech v^1, v^2, \dots będzie nieskończonym ciągiem wektorów z \mathbb{N}^n . Wówczas istnieją pewne dwa indeksy $i < j$, takie, że $v^i \preceq v^j$.

Algorytm sprawdzający, czy istnieje ścieżka z v_p do v_k , składa się z dwóch procedur działających równocześnie (lub – jak kto woli – wykonujących kroki na zmianę). Pierwsza – nazwijmy ją pozytywną – usiłuje znaleźć ścieżkę z v_p do v_k (czyli konstruktywny dowód na to, że taka istnieje), druga natomiast – nazwijmy ją negatywną – próbuje znaleźć dowód, że nie ma żadnej ścieżki z v_p do v_k . Istotne jest, żebyśmy dobrze zaprojektowali obie procedury: jeśli szukana ścieżka istnieje, to procedura pozytywna musi w pewnym momencie ją znaleźć, a jeśli ścieżka nie istnieje, to procedura negatywna ma w pewnym momencie otrzymać dowód tego faktu. Wówczas w każdym przypadku jedna z procedur się zatrzyma i nasz algorytm zakończy się, zwracając właściwą odpowiedź. Zauważmy, że *a priori* nie mamy żadnego oszacowania na to, kiedy program zakończy działanie, i dla niektórych problemów rzeczywiście oczekiwanie na ten moment będzie trwać bardzo długo.

Zaprojektowanie procedury pozytywnej jest łatwe. Po prostu sprawdzane są wszystkie możliwe ciągi ruchów, zaczynając od najkrótszych, a potem przegląda się coraz dłuższe. Dla każdego z nich testujemy, czy może przypadkiem prowadzi on z v_p do v_k i nie powoduje nigdzie po drodze zejścia poniżej zera.

Problem leży w konstrukcji procedury negatywnej. Jak w ogóle może wyglądać dowód nieistnienia ścieżki między danymi punktami? Rozważmy zbiór V wszystkich takich wektorów v , że istnieje z nich ścieżka do wektora końcowego v_k . Zauważmy, że zbiór V jest *zamknięty w górę*: jeśli $v \in V$ oraz $v \preceq v'$ dla pewnego wektora v' , to również $v' \in V$. Istotnie, możemy bowiem z v' łatwo dojść do v (zmniejszając niektóre współrzędne), a stąd do v_k . Jeżeli z v_p nie da się dojść do v_k , to zbiór V spełnia następujące warunki:

- $v_p \notin V, v_k \in V$;
- V jest zamknięty w górę;
- nie da się wejść spoza V do V .

Taki zbiór nazwiemy *separator*. Dodatkowo, zauważmy, że jeśli istnieje jakikolwiek separator, to nie da się dojść z v_p do v_k . Tu właściwie wystarczą tylko pierwszy i trzeci warunek, drugi przyda się jedynie do szukania separatora. Podsumowując, separator istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma ścieżki z v_p do v_k . Procedura negatywna będzie zatem szukała separatora.

Jak to zrealizować? Nie można przecież przeszukiwać wszystkich zbiorów wektorów. Po pierwsze, taki zbiór może być nieskończony (czyli nie damy rady zapamiętać wszystkich elementów). Poza tym nie da się wszystkich zbiorów ustawić w ciąg i posprawdzać po kolei (jest ich nieprzeliczalnie wiele) i właściwie nie wiadomo, jak testować warunek drugi i trzeci. Musimy koniecznie znaleźć przynajmniej jakiś sposób zapamiętania takiego zbioru w skończonej pamięci. Teraz właśnie przychodzi nam z pomocą lemat Dicksona.

Rozważmy zbiór minimalnych wektorów danego separatora – wektor minimalny to taki, że separator nie zawiera elementów mniejszych od niego w porządku \preceq . Dzięki lematowi Dicksona wiemy, że jest ich skończenie wiele. Przypuśćmy bowiem, że mamy nieskończenie wiele wektorów minimalnych. Ustawiamy je w ciąg v^1, v^2, \dots i z lematu Dicksona dostajemy, że $v^i \preceq v^j$ dla pewnych indeksów $i < j$. Mamy sprzeczność z minimalnością v^j ! Zatem każdy separator składa się ze skończenia wielu elementów minimalnych v^1, v^2, \dots, v^j oraz wszystkich wektorów większych od któregoś z nich. Możemy go zatem reprezentować poprzez zbiór $\{v^1, \dots, v^j\}$.



Rozwiązanie zadania F 848.

Nachylenie drogi powoduje zmniejszenie siły nacisku N opon na podłożu do wartości $N = mg \cos \alpha$, gdzie m to masa samochodu, a g przyspieszenie ziemskie. Maksymalna wartość siły tarcia T wynosi więc $T = fg \cos \alpha$. Jednocześnie pojawia się siła zsuwająca $F = mg \sin \alpha$ przeciwdziałająca sile tarcia. Hamowanie (zmniejszenie prędkości) możliwe jest tylko, gdy $f \cos \alpha > \sin \alpha$. Podczas hamowania od prędkości v do zatrzymania samochód porusza się z opóźnieniem

$$a = fg \cos \alpha - g \sin \alpha \text{ i przebywa drogę}$$

$$s(\alpha) = \frac{v_2^2}{2g(f \cos \alpha - \sin \alpha)},$$

a więc $s(\alpha) > 2s(0)$, gdy

$$f(2 \cos \alpha - 1) < 2 \sin \alpha.$$

Po skorzystaniu ze znanych tożsamości trygonometrycznych nierówność tę można sprowadzić do postaci

$$3 \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{4}{f} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} - 1 > 0.$$

Dla suchej nawierzchni $f \approx 1$ i $f \approx 0,3$ na nawierzchni mokrej (guma po betonie). Prowadzi to do warunków: $\alpha > 24,3^\circ$ na suchej nawierzchni i $\alpha > 8,4^\circ$ na nawierzchni mokrej.

Procedura negatywna przeszukuje więc wszystkie skończone zbiory wektorów $\{v^1, \dots, v^j\}$ i sprawdza, czy zbiór wszystkich wektorów większych od któregoś z nich nie jest separatorem. Z podanych powyżej trzech warunków drugi jest spełniony zawsze. Pierwszy sprawdza się łatwo, wystarczy porównać współrzędne wektorów v_p, v_k i wektorów reprezentujących separator. Trzeci również można rozstrzygać w miarę nietrudno – Czytelnik Ambitny może śmiało spróbować to udowodnić.

Tym samym zakończyliśmy opis obu procedur, a więc i algorytmu. Najistotniejszym spostrzeżeniem było, że elementów minimalnych w separatorze jest skończenie wiele. To typowa sytuacja: kluczem do zaprojektowania algorytmu, który zawsze się zatrzymuje, ale, być może, działa bardzo wolno, jest obserwacja, że pewien obiekt pojawiający się w analizie problemu jest skończony. Do otrzymywania takich wyników nadaje się znakomicie lemat Dicksona lub następujący lemat Higmana, stosowany w przypadku słów, a nie wektorów.

Lemat 2 (Higmana). Niech w^1, w^2, \dots będzie nieskończonym ciągiem słów nad skończonym alfabetem. Wówczas istnieją takie indeksy $i < j$, że słowo w^i zawiera się w słowie w^j (czyli ciąg liter słowa w^i jest podciągiem ciągu liter słowa w^j).

Na pierwszy rzut oka widać podobieństwo do lematu Dicksona. Tak naprawdę oba te lematy są szczególnymi przypadkami pewnych bardziej ogólnych twierdzeń. To już jednak temat na zupełnie inną opowieść.



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1408. Udowodnić, że dowolna liczba rzeczywista x spełnia nierówność

$$|x + 1| + |x + 2| + \dots + |x + 2014| \geq 1007^2.$$

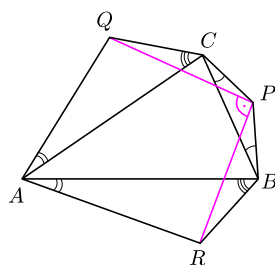
Rozwiązanie na str. 5

M 1409. Na zewnątrz trójkąta ABC dane są punkty P, Q, R (rys. 1) wyznaczone przez warunki

$$\sphericalangle BCP = \sphericalangle CBP = 15^\circ, \quad \sphericalangle BAR = \sphericalangle CAQ = 30^\circ, \quad \sphericalangle ABR = \sphericalangle ACQ = 45^\circ.$$

Udowodnić, że odcinki PQ i PR są równe i prostopadłe.

Rozwiązanie na str. 10



Rys. 1

M 1410. Rozpatrujemy takie ciągi $(a_n)_{n=1}^\infty$, że $a_1 = 1$ oraz, dla każdego $n \geq 2$,

$$a_n = a_1^{\pm 1} + \dots + a_{n-1}^{\pm 1}$$

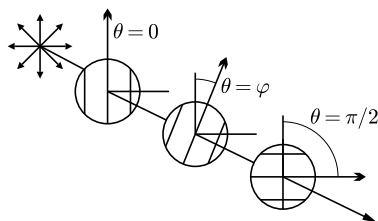
dla pewnego wyboru znaków $+, -$ w wykładnikach. Znaleźć najmniejszą możliwą wartość a_{2014} .

Rozwiązanie na str. 6

Przygotowali Michał NAWROCKI i Andrzej MAJHOFER

F 847. Jak wiadomo, niespolaryzowane światło nie przechodzi przez układ dwóch skrzyżowanych pod kątem prostym polaryzatorów liniowych. Jeżeli jednak pomiędzy te polaryzatory wstawimy pod odpowiednim kątem trzeci polaryzator liniowy (rys. 2), to światło nie będzie wygaszane. Przyjmijmy, że oś polaryzacji wstawionego polaryzatora tworzy kąt φ z osią pierwszego polaryzatora. Jak zależy natężenie światła przechodzącego przez taki układ polaryzatorów od kąta φ ? Dla jakiego kąta φ będzie ono największe, a dla jakiego najmniejsze?

Rozwiązanie na str. 11



Rys. 2

F 848. Przy jakiej wartości α kąta nachylenia drogi do poziomu długość drogi hamowania zjeżdżającego samochodu rośnie ponad dwukrotnie w porównaniu z hamowaniem na odcinku poziomym? Przyjmujemy, że współczynnik tarcia opon o asfalt wynosi f .

Rozwiązanie na str. 7

Ze świata USOS. Część 4 – Ratunku! Moje dane!

Krzysztof STENCEL*

Jak każdy system informatyczny, USOS wymaga implementacji rozmaitych algorytmów, których zadaniem jest realizacja procesów gospodarczych (w ramach uczelni). Projektowanie algorytmów to pasjonująca dziedzina aktywności ludzkiej. Wszyscy lubią programować. Reszta informatyki praktycznej wydaje się nudna. Na tę resztę składają się interfejs użytkownika i magazyn danych. Każdy człowiek, który miał styczność z komputerem, wie, jak irytujący bywa marny interfejs użytkownika. Mimo iż zaprojektowanie dobrego interfejsu użytkownika jest nie lada sztuką, sama czynność uchodzi za mało kreatywną (kto lubi wyrównywać pola na formatkach, niech odeśle do Redakcji ten numer *Delty* z dowodami w postaci zeznań co najmniej dwóch świadków; autor tej notki zwróci mu cenę zeszytu). Dziś chcę się zająć czymś pozornie jeszcze nudniejszym – bazą danych. To właśnie tam są gromadzone wszelkie dane o studentach, pracownikach, ocenach, przedmiotach, protokołach itd. Zapytasz, Czytelniku, co może być ciekawego w worku na dane? Wszystko!



Czy chciałbyś, by z tego worka mogło coś zniknąć? Albo nawet, by cały worek lichu wzięło? Choć taka pokusa może dotyczyć twoich negatywnych ocen, to jednak możliwość przypadkowej lub celowej utraty albo zniekształcenia danych oznaczałaby bezzasadność użytkowania systemu komputerowego przy takiej skali instytucji, jaką jest wyższa uczelnia. Dane należy więc tak zabezpieczyć, by klęski żywiołowe, ludzka głupota, nieuwaga, a także występność nie mogły doprowadzić do utraty danych. Mechanizmy stosowane, by ten cel osiągnąć, są stosunkowo proste. Wielu z Czytelników straciło kiedyś dane i dopiero po tym zdarzeniu zaczęło stosować kopie zapasowe (kto był odpowiednio rozsądny bez wcześniejszej utraty danych, może wysłać pod adresem redakcji kamień, którym autor tej notki pierwszy rzuci w siebie *per procura*). W przypadku bazy danych kopia zapasowa to jednak nie wszystko. Dane przechowane w bazie podlegają ciągłym modyfikacjom. Sytuacja, w której dane wpisane do systemu są traczone, jest wielce niepożądana. Aby tego uniknąć, baza danych prowadzi **dziennik**, tj. zapis wszystkich wykonywanych modyfikacji danych. Zanim użytkownik otrzyma potwierdzenie utrwalenia danych, informacja o tej operacji **musi** być zapisana na trwałe w dzienniku. Zaraz! Przecież zapis na dysku jest kosztowny! Jakże więc zapisywać każdą czynność użytkownika? Racja. Dlatego modyfikacje danych są grupowane w większe jednostki zwane **transakcjami**. Użytkownik dokonuje zmian w danych i gdy zdecyduje się je zapisać, kończy transakcję, żądając zapisu jej efektów do bazy danych.

Tak zwane **zatwierdzenie transakcji** oznacza utrwalenie odpowiednich wpisów dziennika, więc także ostateczne utrwalenie zmienianych danych. Warto pamiętać, że dziennik także może ulec awarii. Podobnie jak kopie zapasowe, należy utrzymywać go w kilku oddalonych od siebie miejscach. Można też skorzystać z usług składowania danych w chmurach obliczeniowych. Gdy dojdzie do awarii, roztropny administrator ma kopie zapasowe i dziennik. Odtwarza więc bazę danych z kopii zapasowej. Potem zleca wykonanie na niej wszystkich późniejszych operacji z dziennika. Dzięki temu efekty żadnej zatwierdzonej transakcji nie będą utracone. A nieroztropni administratorzy mogą usłyszeć jedynie *Zaprawdę, powiadam wam, nie znam was. Czuwajcie więc, bo nie znacie dnia ani godziny* (Mt 25, 12–13).

Bardzo wiele osób jest zainteresowanych zawartością naszego worka z danymi. Dla przykładu policzmy, jak to jest na Uniwersytecie Warszawskim. Jest tu około 50 000 studentów i 7000 pracowników. Niemal wszyscy są użytkownikami USOS. Czy worek z otworem na kilkadziesiąt tysięcy rąk lub z kilkadziesiątoma tysiącami otworów wydaje się rzeczą banalną? Warto jeszcze wspomnieć, że ten worek musi być na tyle zmyślny, żeby nie pozwolić na zniszczenie elementu swojej zawartości uchwyconego przez więcej niż jedną rękę. W naszej analogii rozrywanie takiego elementu obrazuje sytuację, gdy dwóch użytkowników USOS jednocześnie chce zmodyfikować jeden rekord z danymi. Gdyby nie było odpowiednich zabezpieczeń, dane równocześnie modyfikowane przez dwie osoby mogłyby łatwo ulec uszkodzeniu. Zajmijmy się najpierw problemem bezpieczeństwa modyfikacji. I tym razem przyda się nam pojęcie transakcji. Przyjmujemy silne założenie, że jeśli zapewnimy bezpieczne przetwarzanie transakcji jako całości, to modyfikacje danych będą bezpieczne.

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski



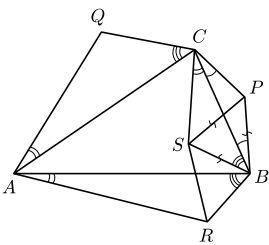
W ramach każdej transakcji poszczególne odczytywane i modyfikowane elementy danych są zabezpieczane **zamkami**. Gdy transakcja odczyta jakąś daną, zakłada na nią zamek, który do jej zakończenia nie pozwala nikomu innemu modyfikować tej danej. Gdy transakcja zmodyfikuje jakąś daną, nie wolno nikomu innemu nawet odczytywać tej danej. Dziecinne proste? Nie do końca. Może się zdarzyć, że jedna transakcja zablokuje jedną daną, a druga transakcja drugą daną, a następnie pierwsza zapragnie drugiej danej, a druga pierwszej. W tym stanie mogą na siebie czekać w nieskończoność. Taką sytuację nazywamy **zakleszczeniem** i, oczywiście, baza danych nie powinna do niej dopuścić. Należy zatem sprawdzić, czy w grafie oczekiwania (krawędź takiego grafu biegnie od transakcji oczekującej do mającej zamek) nie ma cyklu. Gdy jest, wystarczy przerwać jedną z uczestniczących w nim transakcji. Jak często poszukiwać cyklu w tym grafie, gdy może być on naprawdę duży? Czy są inne metody radzenia sobie z zakleszczeniami w bazach danych? To pytania, które sprawiają, że nasz pozornie banalny worek z danymi staje się skomplikowanym i ciekawym oprogramowaniem.

Innym problemem związanym z równoległym dostępem do danych wielu użytkowników jest wydajność. Gdy rozpoczyna się rejestracja na zajęcia, USOS jest równocześnie atakowany przez kilkadziesiąt tysięcy studentów. Jak zapewnić im godziwy czas reakcji systemu? Odpowiedzią jest **replikacja**, czyli powielenie systemu łącznie z jego bazą danych. Baza danych jest zwykle *wąskim gardłem* systemu informatycznego. Powielenie serwera WWW czy serwera aplikacyjnego niewiele może pomóc, jeśli dane też nie będą powielone. Pojawia się więc kopie worka z tymi samymi danymi, a wraz z nimi problem ich **synchronizacji**. Jeśli dane są w wielu kopiach potencjalnie różnych, to która jest ważna? Rozwiązania problemu replikacji i synchronizacji danych są zwykle oparte na podziale uczestniczących baz danych na główne (*master*) i podrzędne (*slave*). Przy czym często zbiór tych pierwszych jest jednoelementowy. W USOS zastosowano hybrydowe podejście replikacji z jedną bazą główną i wieloma podrzędnymi. Teoretycznie baza główna zawsze zawiera dane aktualne, a bazy podrzędne muszą się do niej dostosować. Takie rozwiązanie nie pozwoliłoby jednak na sprawne przeprowadzenie rejestracji na zajęcia, które wymaga bardzo licznych modyfikacji (zapisy studentów) danych w bazach podrzędnych. Główna baza okresowo przekazuje podrzędnej uprawnienia do modyfikacji pewnego podzbioru danych na zasadzie wyłączności. Tak dzieje się w USOS np. przy rejestracji. Na czas rejestracji na zajęcia replika bazy danych dla Wydziału Fizyki otrzymuje prawa do modyfikacji zapisów studentów fizyki. Na czas wystawiania ocen baza danych dla Wydziału Chemii otrzymuje prawa do modyfikacji ocen studentów chemii itd. Szczęśliwie w USOS możliwe jest rozsądne rozwiązanie problemu replikacji danych, które w ogólności może nie istnieć. Zgodnie z tzw. *twierdzeniem CAP*, sformułowanym przez Erica Brewera, nie może istnieć system baz danych spełniający jednocześnie trzy warunki: spójność danych (*Consistency*), dostępność danych (*Availability*) i poprawne obsługiwane replikacji (*Partition tolerance*). Dowolny system może realizować co najwyżej dwa z tych postulatów. W USOS, oczywiście, zrezygnowaliśmy z *C* – okresowo każda z replik może mieć inne dane. Widać, że zarówno oprogramowanie, jak i wdrożenie wielu worków z danymi, które pozwalają na wygodne i szybkie przetwarzanie danych przez tysiące użytkowników, nie jest zadaniem banalnym.



Rozwiązanie zadania M 1409.

Niech S będzie obrazem punktu C przy obrocie \mathcal{R} wokół P o 90° , jak na rysunku. Wówczas $\sphericalangle SCB = 45^\circ - \sphericalangle BCP = 30^\circ$. Ponadto, skoro $PS = PC = PB$ i $\sphericalangle SPB = 150^\circ - 90^\circ = 60^\circ$, to trójkąt SBP jest równoboczny. Zatem $\sphericalangle SBC = 60^\circ - \sphericalangle PBC = 45^\circ$.



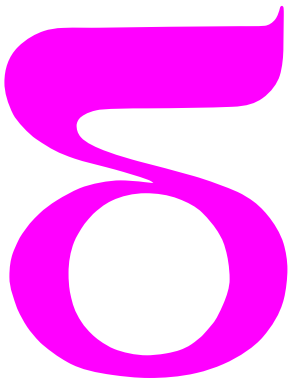
W takim razie trójkąty ABR, CBS są podobne (*kkk*). Stąd

$$\frac{BA}{BR} = \frac{BC}{BS}$$

W połączeniu z równością $\sphericalangle ABC = \sphericalangle RBS$ oznacza to, że trójkąty RBS i ABC są podobne (*kkb*). Zatem $\sphericalangle RSB = \sphericalangle ACB$, więc również $\sphericalangle RSP = \sphericalangle QCP$. Ponadto $PS = PC$ oraz

$$\frac{SR}{CA} = \frac{BR}{BA} = \frac{QC}{CA}$$

czyli $SR = QC$. Tym samym trójkąty PCQ i PSR są przystające (*kkb*). Z definicji punktu S trójkąt PSR jest obrazem trójkąta PCQ przy obrocie \mathcal{R} , co kończy dowód.



mała delta

Projekt Astro Izery

Wędrowka planetarną ścieżką

Żyjemy w czasach, w których poznawanie Wszechświata przez obserwacje, czyli zwykle oglądanie nieba, staje się coraz trudniejsze. To dość zaskakujące, bo przecież amatorski sprzęt astronomiczny jest względnie łatwo dostępny. Problemem jest jednak „zanieczyszczenie światłem”, które szczególnie w miastach rozjaśnia nocne niebo, uniemożliwiając nawet proste amatorskie obserwacje. Zatem, jeśli mieszkasz w mieście i chcesz zobaczyć prawdziwą czerń kosmicznych przestworzy, wybierz się do... lasu.

Obszary leśne, szczególnie te z dala od wielkich miast, to astronomiczna oaza – nocnego oświetlenia nie ma tam wcale lub jest go bardzo niewiele, więc niebo pozostaje odpowiednio ciemne. Las jest dobrym miejscem na przygodę z astronomią i popularyzację wiedzy o Wszechświecie.



Izerski układ słoneczny

Sprzyjające warunki i potrzeba popularyzacji astronomii doprowadziły do powstania wyjątkowego projektu o nazwie Astro Izery, który realizowany jest od 2007 r. w Górach Izerskich. W artykule chcemy przybliżyć Czytelnikowi jeden z elementów tego projektu, polegającego na zagłębieniu się w świat astronomii za pomocą obserwacji oraz ćwiczeń, które można wykonać, używając nieskomplikowanych narzędzi.

W listopadzie 2007 roku w Stacji Turystycznej Orle odbyły się pierwsze Szkolne Warsztaty Astronomiczne. Pogoda nie sprzyjała obserwacjom (dużo chmur), mieliśmy dzięki temu czas na prowadzenie długich rozmów. Podczas odpoczynku po spacerze do schroniska Chatka Górzystów, który był pomyślany jako wycieczka po Układzie Słonecznym pomniejszonym miliard razy, padła propozycja, aby taką ścieżkę uwiecznić na stałe w krajobrazie Gór Izerskich. „Burzę mózgów” zwięździła wstępna wersja projektu noszącego obecnie nazwę Astro Izery.

Astro Izery złożone są z przedsięwzięć, które można podzielić na dwie grupy: elementy stałe oraz imprezy astronomiczne. Elementy stałe to zegar słoneczny wiszący na ścianach Stacji Turystycznej Orle, stojący nieopodal gnomon, który jest jednocześnie początkiem ścieżki dydaktycznej „Model Układu Słonecznego” (tzw. ścieżka planetarna). Organizujemy także astronomiczne wydarzenia, które są kierowane do różnych odbiorców. Ogólnopolskie Spotkania Astronomiczne (OSA) to impreza dla astronomów-amatorów, na Szkolne Warsztaty Astronomiczne (SWA) zabieramy uczniów szkół średnich i gimnazjów, a Astronomiczny Dzień w Izerskim Parku Ciemnego Nieba jest imprezą otwartą dla wszystkich chętnych. Izerski Park Ciemnego Nieba spina całość projektu swoimi granicami, które obejmują polską i czeską część doliny Izery.

Zacznijmy jednak od ścieżki planetarnej. Ścieżka przedstawia Słońce i 8 krążących wokół niego planet w skali 1 do miliarda. W tej skali pokazane są zarówno rozmiary tych 9 obiektów, jak i odległości między nimi. Skala okazała się idealnie pasować do Gór Izerskich, bo odległość między schroniskami Orle i Chatka Górzystów jest prawie taka sama jak odległość Słońce-Neptun w tej właśnie skali. Ścieżka pozwala wyobrazić sobie rozmiary Wszechświata. Nawet odległości występujące w Układzie Słonecznym wyrażają się wieloma milionami i miliardami kilometrów i są nieporównanie większe od tych, z którymi mamy do czynienia na co dzień. Nasze skale odległości to centymetry, metry czy, co najwyżej, tysiące kilometrów. Rozumiemy, że miliard to więcej niż tysiąc, ale czy możemy sobie wyobrazić różnicę? Nie jest to łatwe nawet dla astronoma. Wyobraźni pomagamy, pomniejszając Układ Słoneczny do „ludzkich” rozmiarów.

Spróbujmy przemierzyć izerski Układ Słoneczny w wyobraźni. Ścieżka zaczyna się w „centrum” osady Orle, gdzie model Słońca przedstawiony jest za pomocą okręgu ułożonego z kostki granitowej o kolorze piaskowym. W skali 1 : 10⁹ Słońce ma średnicę około 140 cm. Ruszamy dalej drogą do Chatki Górzystów. Modele ośmiu planet, które napotkamy na naszej drodze, to nieduże gązdy ze stalowymi płytkami o rozmiarze 20 × 30 cm. Każda płytka zawiera nazwę planety, jej symbol oraz otwór o rozmiarze odpowiadającym przeskalowanemu rozmiarowi planety. Każdy punkt ścieżki wykonany jest z innego typu skały. Wszystkie pochodzą z obszaru Sudetów i dzięki temu ścieżka pokazuje przy okazji bogactwo geologiczne tego regionu.

Zaledwie po 58 metrach trafiamy na pierwszą planetę, **Merkurego**. To najmniejsza planeta w Układzie Słonecznym. Otwór w tabliczce, który ją reprezentuje, ma niecałe 5 mm średnicy. Tabliczka została umieszczona na kawałku kalcytu.

Po kolejnych 50 m docieramy do **Wenus**, która została osadzona na sporym kawałku kwarcu izerskiego. W naszej skali Wenus znajduje się 108 metrów od Słońca, a jej rozmiar to 12 mm.

Bardzo podobny rozmiar ma **Ziemia** – kolejna planeta w Układzie Słonecznym. Z Ziemi wciąż widzimy nasze modelowe Słońce odległe o 150 metrów. Łatwo zauważyć, że to trochę ponad 100 razy dalej niż średnica Słońca. Tabliczka Ziemi została umieszczona na kawałku serpentynitu. Ziemia przedstawiona jest razem ze swoim Księżycem, którego odległość od niej i rozmiar zostały, oczywiście, przedstawione w skali 1 : 10⁹.

Następna planeta, **Mars**, znajduje się prawie 230 metrów od Słońca, już w lesie otaczającym Orle. Mars został umieszczony na kawałku piaskowca, a otwór, który przedstawia przeskalowany rozmiar planety, ma niecałe 7 mm. Na Marsie kończy się obszar planet skalistych. Chociaż ich odległości od Słońca nie są duże, maksymalnie 230 m w naszym modelu, to i tak są dziesiątki tysięcy razy większe od rozmiarów tych planet. Pomiędzy nimi rozciąga się olbrzymia, prawie pusta przestrzeń, która staje się jeszcze rozleglejsza w zewnętrznej części Układu Słonecznego, co zauważymy w dalszej wędrówce, gdy odległości między planetami znacząco wzrosną.

Po pokonaniu 550 metrów od Marsa, w odległości prawie 780 m od Słońca, spotykamy **Jowisza**, pierwszą z czterech planet-olbrzymów. Nazwa jest w pełni uzasadniona. Otwór symbolizujący Jowisza ma 143 mm, to prawie 12 razy więcej niż modelowa Ziemia. Płytką jowiszowa osadzona jest na kawałku migdałowca.

Droga do następnej planety, **Saturna**, wynosi prawie drugie tyle co od Słońca do Jowisza. Prawie 1430 metrów od naszej gwiazdy, na skale bazaltowej, umieszczona jest tabliczka z otworem o średnicy 120 mm otoczonym zarysem wspaniałych pierścieni, bez których żaden model Saturna nie jest kompletny.

Po następnych 800 m wędrówki docieramy do granicy lasu, na łąkę pokrytą kosodrzewiną i niewielkimi skrawkami lasów. Znajdujemy się na skraju rozległego, bezludnego obszaru zajmującego górną część doliny Izery. Jeszcze 700 m i po przebyciu prawie 2900 metrów od Słońca docieramy do **Urana**. Tabliczka Urana jest zamocowana na kawałku gnejsu pochodzącego z byłej kopalni... uranu w Kowarach. Otwór reprezentujący planetę jest mniejszy od Jowisza i Saturna ponaddwukrotnie: ma 51 mm średnicy. Planety olbrzymy dzielą się na dwie grupy. Większe gazowe olbrzymy (Jowisz, Saturn) zbudowane są głównie z wodoru i helu. Mniejsze lodowe olbrzymy (Uran, Neptun) składają się w znacznej części z wody, amoniaku i metanu – związków chemicznych, które nazywane są w planetologii lodami astrofizycznymi, nawet jeśli nie są w stanie stałym, tak jak we wnętrzu obu tych planet.

Przed nami ostatnia planeta, ale droga do niej jest długa – ponad 1,5 km. **Neptuna**, bo o nim mowa, przedstawia otwór o podobnej do Urana średnicy, 50 mm, w tabliczce umieszczonej na kawałku łupka serycytowego. Nasz Neptun znajduje się w odpowiednim dla siebie miejscu, czyli pośrodku Łąki Izerskiej (zwanej powszechnie Halą Izerską). Dlaczego odpowiednim? Łąka Izerska to najzimniejsze miejsce w Górach Izerskich i jedno z najzimniejszych miejsc w Polsce. Choć położona jest na wysokości zaledwie 800 m n.p.m., jej klimat i przyroda przypomina obszary północnej Skandynawii. Zimą notowano temperatury wynoszące –36°C. Również w lecie bywa wyjątkowo zimno. W lipcu i sierpniu nocą zdarzają się temperatury kilka stopni poniżej 0°C. Neptun, znajdujący się 4,5 mld km od Słońca, też do ciepłych miejsc nie należy. Na jednym z jego księżyców, Trytonie, zmierzono rekordowo niską temperaturę około –238°C (zaledwie 35 stopni powyżej zera absolutnego).

Na koniec wędrówki izerską ścieżką planetarną zastanówmy się nad prędkością naszej wyprawy. Izerską ścieżkę od Słońca do Neptuna pokonujemy w ciągu około 1 godziny. Gdybyśmy chcieli pokonać w tym samym czasie prawdziwą odległość Słońce-Neptun, z jaką prędkością musielibyśmy się wtedy poruszać? Czy byłoby to fizycznie możliwe?

Małą Deltę przygotowali Sylwester KOŁOMAŃSKI, Tomasz MROZEK i Grzegorz ŻAKOWICZ

Czytelnikowi zainteresowanemu teorią krat oraz jej zastosowaniami w logice i algebrze polecamy szczególnie książki *Podstawy algebry ogólnej i teorii krat* Andrzeja Walendziaka (PWN, 2009), *The Mathematics of Metamathematics* Heleny Rasiowej i Romana Sikorskiego (PWN, 1963) oraz *Lattice Theory* Garretta Birkhoffa (AMS, 1967).

Teoria krat pojawiła się pod koniec XIX wieku, wyrastając z logiki i algebry. W logice kraty pojawiły się za sprawą George’a Boole’a, a w algebrze kraty pierwszy rozpatrywał Richard Dedekind. Kraty są przedmiotem badań algebraików, stanowią jednocześnie wygodny środek opisu znanych struktur matematycznych, których przykłady przedstawię w dalszej części artykułu. Można je opisać na dwa sposoby: algebraicznie lub przy użyciu częściowych porządków.

Definicja 1. *Krata w sensie algebraicznym* to struktura algebraiczna (L, \wedge, \vee) spełniająca dla dowolnych elementów $a, b, c \in L$ następujące równości:

$$\begin{aligned} a \wedge b &= b \wedge a, & a \vee b &= b \vee a, \\ a \wedge a &= a, & a \vee a &= a, \\ a \wedge (b \wedge c) &= (a \wedge b) \wedge c, & a \vee (b \vee c) &= (a \vee b) \vee c, \\ a \wedge (a \vee b) &= a, & a \vee (a \wedge b) &= a. \end{aligned}$$

Krata w sensie częściowych porządków to niepusty częściowo uporządkowany zbiór (L, \leq) , w którym każdy dwuelementowy podzbiór ma oba kresy: górny i dolny.

Pojęcia krat w sensie algebraicznym i częściowych porządków są równoważne. Jeśli zdefiniujemy kratę jako zbiór algebraiczny z wymienionymi aksjomatami, to zadając porządek przez $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$, otrzymamy kratę w sensie porządku. Odwrotnie, jeśli w kracie w sensie porządku zdefiniujemy $a \vee b = \sup\{a, b\}$ oraz $a \wedge b = \inf\{a, b\}$, to dostaniemy kratę w sensie algebraicznym.

Zanim omówię wybrane przykłady krat, podam kilka użytecznych definicji. Kratę (L, \leq) będziemy zwykle oznaczali literą L , identyfikując ją ze zbiorem jej elementów. Jeśli w kracie L istnieje element największy, to nazywamy go *jednością kraty* i oznaczamy przez 1 . Podobnie, najmniejszy element w kracie (jeśli istnieje) oznaczamy symbolem 0 i nazywamy *zerem kraty*. Kratę z zerem i jednością nazywamy *kratą ograniczoną*. Podzbiór K kraty L nazwiemy jej *podkratą*, jeśli dla dowolnych $a, b \in K$ mamy $a \wedge b \in K$ oraz $a \vee b \in K$. Powiemy, że kraty L_1 i L_2 są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja $\varphi : L_1 \rightarrow L_2$, taka że φ i φ^{-1} zachowują porządek, tj. $a \leq b \Leftrightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b)$.

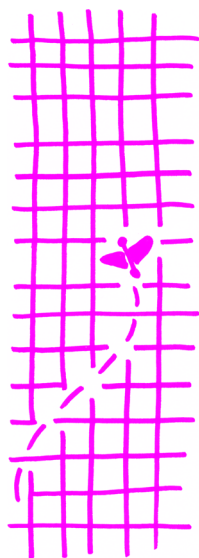
Zauważmy, że jeśli (L, \leq) jest kratą, to para (L, \geq) , gdzie relacja \geq zdefiniowana jest wzorem $a \geq b \Leftrightarrow b \leq a$ również jest kratą. Kratę (L, \geq) będziemy nazywać *kratą dualną* do kraty L i oznaczać symbolem L^∂ . Łatwo sprawdzić, że jeśli $a \wedge b = c$ w kracie L , to $a \vee b = c$ w kracie L^∂ , oraz analogicznie jeśli $a \vee b = d$ w kracie L , to $a \wedge b = d$ w kracie L^∂ .

Przykład 1. Niech X będzie dowolnym zbiorem. Rodzina $\mathcal{P}(X)$ wszystkich podzbiorów zbioru X wraz z porządkiem zadany przez inkluzję \subseteq jest kratą. Mianowicie, jeśli $A, B \in \mathcal{P}(X)$, to $A \wedge B = A \cap B$ oraz $A \vee B = A \cup B$. Jest to krata ograniczona. Zerem tej kraty jest zbiór pusty, a jednością zbiór X .

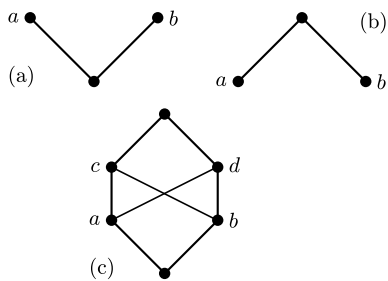
Przykład 2. Niech $|$ oznacza relację podzielności w zbiorze \mathbb{N} dodatnich liczb całkowitych. Niech $\text{NWD}(a, b)$ tradycyjnie oznacza największy wspólny dzielnik liczb a i b oraz $\text{NWW}(a, b)$ ich najmniejszą wspólną wielokrotność. Zbiór uporządkowany $(\mathbb{N}, |)$ jest kratą z działaniami $a \wedge b = \text{NWD}(a, b)$ oraz $a \vee b = \text{NWW}(a, b)$. Krata ta ma element najmniejszy równy 1 i nie ma elementu największego.

Przykład 3. Niech V będzie przestrzenią liniową nad ciałem K i niech $\text{Sub}(V)$ oznacza rodzinę wszystkich jej podprzestrzeni. Zbiór $(\text{Sub}(V), \subseteq)$ jest kratą. Jeśli $A, B \in \text{Sub}(V)$, to $A \wedge B = A \cap B$ oraz $A \vee B = A + B$, gdzie $A + B = \{a + b : a \in A \text{ i } b \in B\}$. Zerem w tej kracie jest wektor zerowy, a jedyneką cała przestrzeń V . Podobnie, kratami są również: rodzina podgrup zadanej grupy, rodzina jej dzielników normalnych oraz rodzina podpierzści danego pierścienia, wszystko z relacją inkluzji.

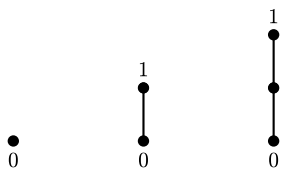
Przykład 4. Niech S będzie rodziną podzbiorów przestrzeni \mathbb{R}^2 złożoną ze zbioru pustego, całej przestrzeni \mathbb{R}^2 oraz wszystkich punktów i wszystkich prostych w \mathbb{R}^2 . Zbiór ten z relacją zawierania stanowi kratę ograniczoną. Zerem tej kraty jest zbiór pusty, a jednością \mathbb{R}^2 .



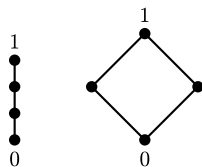
*Instytut Matematyki i Fizyki,
Wydział Nauk Ścisłych,
Uniwersytet Przyrodniczo-Humanistyczny
w Siedlcach



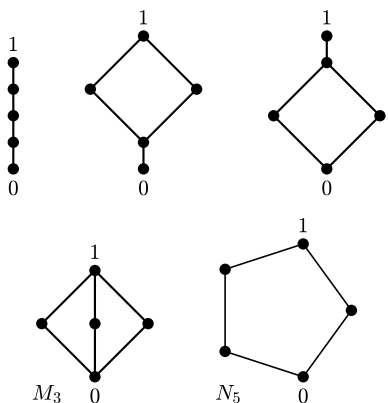
Rys. 1. Diagramy nieprzedstawiające krat.



Rys. 2. Kraty o co najwyżej trzech elementach.



Rys. 3. Kraty czteroelementowe.



Rys. 4. Kraty pięcioelementowe.

Czytelnik Oczytany dostrzeże podobieństwo przytoczonych twierdzeń do twierdzenia Kuratowskiego, które orzeka, że graf skończony jest planarny wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podgrafu homeomorficznego z K_5 lub $K_{3,3}$.

Kraty, tak jak wszystkie porządki, możemy ilustrować za pomocą diagramów, które tworzymy w następujący sposób: elementy kraty L zaznaczamy na płaszczyźnie jako punkty. Jeśli a, b są elementami kraty L oraz $a \leq b$, to punkt odpowiadający elementowi a rysujemy poniżej punktu odpowiadającego elementowi b . Jeśli b jest następnikiem a , czyli $a < b$ oraz nie istnieje $z \in L$, taki że $a < z < b$, to punkty a i b łączymy odcinkiem.

Przyjrzyjmy się diagramom z rysunku 1. Widzimy, że na diagramie (a) elementy a i b nie mają kresu górnego, a w przypadku diagramu (b) elementy a i b nie mają kresu dolnego. Na diagramie (c) elementy a i b mają dwa ograniczenia górne c i d , ale nie mają kresu górnego. Zatem diagramy te nie przedstawiają krat.

Wskazemy teraz diagramy porządków będących kratami. Oczywiście, każdy liniowo uporządkowany zbiór (często nazywany łańcuchem) jest kratą. Łatwo można sprawdzić, że kraty o co najwyżej trzech elementach muszą być łańcuchami.

Kraty o czterech elementach są tylko dwie (z dokładnością do izomorfizmu), a krat pięcioelementowych jest dokładnie pięć (rys. 3 i 4).

W matematyce ważną rolę spełniają kraty rozdzielne i modułarne.

Definicja 2. Kratę L nazywamy *modułarną*, gdy dla dowolnych jej elementów $a, b, c \in L$, takich że $c \leq a$, zachodzi $(a \wedge b) \vee c = a \wedge (b \vee c)$.

Definicja 3. Kratę L nazywamy *rozdzielną (dystrybutywną)*, gdy dla dowolnych jej elementów $a, b, c \in L$ spełniona jest równość $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Wprost z definicji wynika, iż każda kratka rozdzielna jest modułarna. Zwróćmy uwagę, że wszystkie łańcuchy są kratami rozdzielnymi. Rozważmy kratę z przykładu 1 – równość z definicji kraty rozdzielnej w przypadku kraty $\mathcal{P}(X)$ ma postać dobrze znanego prawa rozdzielności przecięcia zbiorów względem dodawania $(A \cap (B \cup C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, zatem kratka $\mathcal{P}(X)$ jest rozdzielna. W tym przypadku nie napotkaliśmy problemów z wykazaniem tej własności, często jednak sprawdzenie wprost z definicji, czy dana kratka jest dystrybutywna bądź modułarna, jest dość kłopotliwe. Na szczęście istnieją niezwykle obrazowe i przydatne twierdzenia sprowadzające problem do pytania, czy wśród jej podkrat znajdują się pewne wymienione wcześniej kraty.

Twierdzenie 1. Krata L jest modułarna wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podkrat izomorficznej z N_5 (rys. 4).

Szkic dowodu: Łatwo zauważyć, że jeśli L ma podkratę izomorficzną z N_5 , to nie jest modułarna. Załóżmy teraz, że L nie jest modułarna, tzn. istnieją $a, b, c \in L$, $c \leq a$, takie że $d \neq e$, gdzie $d = (a \wedge b) \vee c$ i $e = a \wedge (b \vee c)$. Z założenia $c \leq a$ oraz oczywistych relacji $c \leq b \vee c$, $a \wedge b \leq a$ i $a \wedge b \leq b \vee c$ w prosty sposób wynika $d \leq e$, więc $d < e$. Wykażemy, że b, d, e wraz z $a \wedge b$ i $b \vee c$ tworzą kratę izomorficzną z N_5 . Najpierw upewnimy się, że $a \wedge b$ i $b \vee c$ są różne od reszty wyszczególnionych elementów – istotnie, gdyby było $b = a \wedge b$, to mielibyśmy $b \vee c = d < e = a \wedge (b \vee c)$, co jest niemożliwe; podobnie dowodzimy, że $b \neq b \vee c$. Ponadto $e = b \vee c$ byłoby równoznaczne z $b \vee c \leq a$, skąd $b \leq a$, czyli $b = a \wedge b$, co jak już wiemy, jest niemożliwe; analogicznie $d \neq a \wedge b$. Korzystając z własności działań kratowych, otrzymujemy

$$b \vee d = b \vee ((a \wedge b) \vee c) = (b \vee (a \wedge b)) \vee c = b \vee c$$

i analogicznie $b \wedge e = a \wedge b$. Ponadto, skoro zachodzi $a \wedge b \leq d \leq e$, to

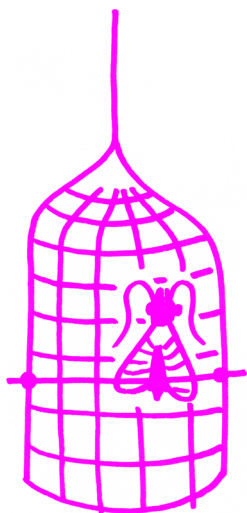
$$a \wedge b = a \wedge b \wedge b \leq d \wedge b \leq e \wedge b = a \wedge b,$$

tak więc $d \wedge b = a \wedge b$. Podobnie dowodzimy $e \vee b = b \vee c$, co w połączeniu z wykazanymi wcześniej zależnościami prowadzi nas już do wniosku, że wskazane elementy faktycznie tworzą podkratę izomorficzną z N_5 .

W analogiczny, choć nieco bardziej skomplikowany sposób, otrzymujemy podobny wynik dla krat rozdzielnych.

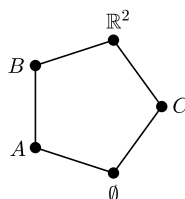
Twierdzenie 2. Krata L jest rozdzielna wtedy i tylko wtedy, gdy nie ma podkrat izomorficznej z M_3 lub N_5 (patrz rys. 4).

Z podanych twierdzeń w prosty sposób wynika, że jeśli kratka L jest modułarna (rozdzielna), to kratka L^∂ również jest modułarna (rozdzielna).



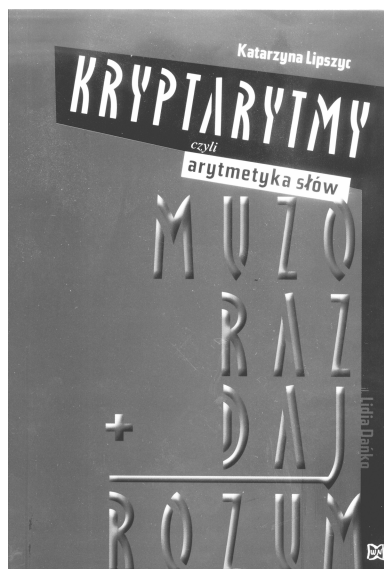
Weźmy teraz kratę z przykładu 3. Gdyby $\text{Sub}(V)$ nie była modularna, to w kracie tej istniałaby podkrata izomorficzna z N_5 . Istniałyby zatem parami różne podprzestrzenie $A, B, C, E, F \subseteq V$, takie że $A \subset B$, $A \cap C = B \cap C = E$, oraz $A + C = B + C = F$. Nie jest to jednak możliwe, co pozostawiam Czytelnikowi Podejrzliwemu jako nietrudne zadanie z algebry liniowej. Krata $\text{Sub}(V)$ jest zatem kratą modularną, jednocześnie łatwo wykazać, że nie jest to krata rozdzielna. Weźmy przestrzeń $W \subseteq V$ wymiaru dwa i trzy jej różne jednowymiarowe podprzestrzenie A, B, C . Podprzestrzenie A, B, C przecinają się w wektorze zerowym i każde dwie z nich generują W . Dostajemy zatem podkratę izomorficzną z M_3 .

Wykażemy teraz, że krata z przykładu 4 nie jest nawet modularna. Zauważmy, że jeżeli A oznacza punkt leżący na prostej B , a przez C oznaczmy prostą nieprzecinającą prostą B , to otrzymujemy podkratę:



Kraty modularne i rozdzielne są dokładnie opisane w literaturze i znamy wiele ich własności. Poza nimi rozważa się, oczywiście, wiele innych rodzajów tych struktur. Niektóre z nich dają się scharakteryzować poprzez zawieranie pewnej podkraty lub podkrat. Te charakterystyczne obiekty (np. M_3 oraz N_5) to właśnie tytułowe *kraty testowe*.

Kryptarytmy, czyli arytmetyka słów



Wydawnictwo Nowik Sp.j., Opole 2013

Kryptarytm (gr. *kryptós* = ukryty; *arithmos* = liczba) to zadanie szaradziarskie w postaci działania arytmetycznego, w którym cyfry zastąpiono literami. Zadaniem rozwiązującego jest odtworzenie owego działania. Takim samym literom powinny odpowiadać takie same cyfry, a różnym literom – różne cyfry. Żadna z liczb wielocyfrowych nie może zaczynać się zerem. Po zastąpieniu liter cyframi powinno otrzymać się poprawne działanie. Z kolei alfametyk to kryptarytm, w którym cyfry zaszyfrowane są literami tworzącymi wyrazy powiązane znaczeniowo bądź też słowa składające się w sensowne frazy lub zdania.

W książeczce (zdrobienie podyktowane jest wygodnym, małym formatem) znajdziemy wiele alfametyków podzielonych przez autorkę, Katarzynę Lipszyc, na kilka działów: „Łatwe”, jak np.

$$\text{BOK} + \text{BOK} + \text{BOK} + \text{BOK} = \text{ROMB},$$

„Trochę trudniejsze”, „Kryptarytmy – zdania” i „Układy równań” (a raczej układy kryptarytmów, gwarantujące jedynosc rozwiązania). Niektóre z nich zostały zainspirowane konkretnymi wydarzeniami, jak np.

$$\text{MYŚL} + \text{LECA} + \text{ŚMIGA} = \text{CELNIE},$$

ułożony przez autorkę z okazji stulecia urodzin Stanisława Jerzego Leca w 2009 roku, czy

$$\text{TSUNAMI} - \text{ZMIATA} = \text{MIASTA},$$

powstały w 2011 roku po trzęsieniu ziemi w Japonii.

Niewątpliwym walorem książeczki jest jej szata graficzna. Świetne i zabawne rysunki autorstwa Lidii Dańko, ozdabiające kryptarytmy, zachęcają do zmierzania się z nimi. Książeczka ucieszy miłośników matematyki rekreacyjnej (kryptarytmy od czasu do czasu pojawiają się w polskiej prasie szaradziarskiej, ale nie ma ich zbyt wiele), przyda się też nauczycielom, którzy chcą przekonać swoich uczniów, że matematyką można się wspaniale bawić, ćwicząc przy okazji logiczne myślenie i wytrwałość.

Renata JURASIŃSKA

PS. Czytelniku, zanim zajrzysz do tej książki, rozwiąż alfametyk z jej okładki!

Redakcja

Wyniki XXX Ogólnopolskiego Sejmiku Matematyków, Szczyrk, 6–9 VI 2013

Konkurs polega na przedstawieniu opracowania jednego z tematów zaproponowanych przez Jury (wraz z bibliografią) lub tematu własnego oraz – w przypadku zakwalifikowania się do finału – krótkim, publicznym zreferowaniu tego opracowania.

W roku 2013/2014 zaproponowane przez Jury tematy to:

- Z matematyką na wakacje.
- Różne dowody jednej tożsamości.
- Bałagan kontra porządek.
- Zasada szufladkowa Dirichleta.
- Grupy krystalograficzne.
- Hipoteza Poincarégo.
- Matematyka łamania szyfrów.
- Średnie i ich własności.
- Inwersja.
- Wpływ różnych czynników na zmiany zachodzące na naszej planecie.
- Matematyczne modele zmian klimatu.
- Modele matematyczne w epidemiologii.
- Starożytne manuskrypty matematyczne.

Sejmiki organizuje Pracownia Matematyki i Informatyki Pałacu Młodzieży w Katowicach we współpracy z Uniwersytetem Śląskim; www.spinor.edu.pl

Jury w składzie:

prof. dr hab. Maciej Sablik – przewodniczący, dr Marian Podhorodyński – zastępca przewodniczącego, dr Tomasz Bielaczyc, dr Adrian Brückner, dr Włodzimierz Fechner, dr Paweł Gładki, dr Maria Kania-Błaszczak, mgr Renata Kawa, dr Tomasz Kochanek, dr Rafał Kucharski, dr Barbara Przebieracz, dr Jolanta Sobera, dr Anna Szczerba-Zubek, dr Anna Wojciechowska, mgr Artur Zieliński, **postanowiło:**

I miejsce otrzymuje: **Małgorzata Dutka** z I LO w Bydgoszczy za pracę *Lista przebojów okręgu;*

II miejsce otrzymuje: **Samuel Kozłowski** z III LO w Gdańsku za pracę *Punkt Miquela i powiązane zagadnienia w zadaniach geometrycznych;*

III miejsce otrzymuje: **Marcin Muszalski** z IV LO w Sosnowcu za pracę *Nierówności;*

wyróżnienia otrzymują:

Michał Balogh z Zespołu Szkół nr 6 w Jastrzębiu Zdroju za pracę *Matematyka w Układzie Słonecznym,*

Mariusz Nowak z VIII LO w Katowicach za pracę *Matematyczne modele w epidemiologii,*

oraz

Mateusz Suś z II LO w Zduńskiej Woli za pracę *Iloczynny nieskończone rzeczywiste.*

W głosowaniu publiczności na najlepszą prezentację **nauczyciele nagrodzili Małgorzatę Dutkę, a uczniowie Michała Balogha.**

Protokół posiedzenia Jury XXXV Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki

Jury Konkursu Uczniowskich Prac z Matematyki w składzie:

Antoni Leon Dawidowicz – Przewodniczący Jury, Wiktor Bartol,

Andrzej Dąbrowski, Zdzisław Pogoda, Anna Szpila,

na posiedzeniu 19 września 2013 roku w Rzeszowie, po wysłuchaniu prezentacji prac dopuszczonych do finału, biorąc pod uwagę dobór tematu, treść prac i sposób ich przedstawienia, postanowiło, co następuje:

• **złoty medal** i nagrodę w wysokości 1400 zł otrzymuje

Kamil Rychlewicz z I LO im. Mikołaja Kopernika w Łodzi za pracę *Bramki unarne w logice wielowartościowej,*

• **srebrny medal** i nagrodę w wysokości 1000 zł otrzymuje

Samuel Kozłowski z III LO im. Bohaterów Westerplatte w Gdańsku za pracę *Punkt Miquela i powiązane zagadnienia w zadaniach geometrycznych,*

• **brązowe medale** i nagrody w wysokości po 700 zł otrzymują *ex aequo*

Bartłomiej Grochal z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *Tajemnice funkcji σ oraz τ . Dzielniki liczb naturalnych*

oraz

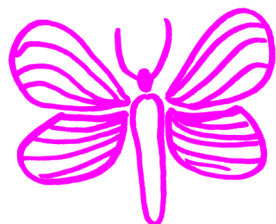
Rafał Żelazko z V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie za pracę *Charakterystyka rozbicia zbioru co najwyżej przeliczalnego.*

Opiekunowie prac: Andrzej Daszke (Centrum Nauczania Matematyki i Kształcenia na Odległość Politechniki Gdańskiej), Jacek Dymel (V LO im. Augusta Witkowskiego w Krakowie) i Andrzej Komisarski (Wydział Matematyki i Informatyki Uniwersytetu Łódzkiego) otrzymują dyplomy honorowe.

Finałiści i opiekunowie prac otrzymują również nagrody książkowe ufundowane przez Wydawnictwo Szkolne Omega, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, Wydawnictwo Demart, Wydawnictwo Nowik oraz Urząd Marszałkowski województwa podkarpackiego.

(—) podpisy Członków Jury

Prace nadsyłane na Konkurs powinny być samodzielnie przygotowanym przez ucznia opracowaniem, zawierającym nowe wyniki lub nowe twórcze ujęcie tematu. Szczegółowy regulamin Konkursu znajduje się na stronie deltami.edu.pl. Termin nadsyłania prac w kolejnej edycji Konkursu to **1 kwietnia 2014 roku**.

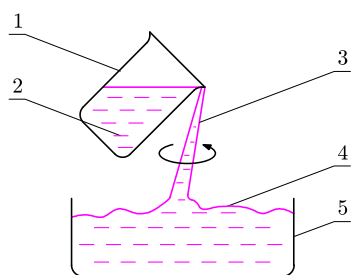


Wszystko w płynie, czyli poznajemy podstawy reologii

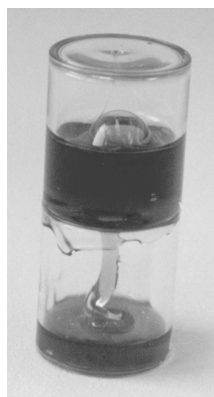


Stanisław BEDNAREK

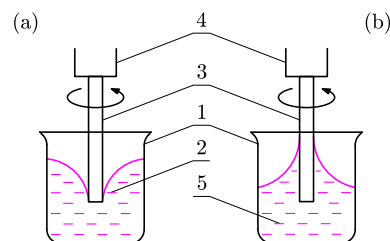
Potrzebne materiały i przyrządy: woda, mąka ziemniaczana, dwie zlewki lub szklanki, talerz, łyżeczka, sztuczny miód, klepsydra żelowa, drewniany lub metalowy pręt o średnicy około 1 cm i długości kilkunastu cm oraz dostęp do wiertarki elektrycznej lub miksera.



Rys. 1. Najprostszy sposób zaobserwowania efektu Fano;
1 – naczynie, 2 – ciecz reologiczna,
3 – wirująca kolumna cieczy reologicznej,
4 – naczynie dolne, 5 – ciecz reologiczna w dolnym naczyniu.



Fot. 1. Klepsydra żelowa.



Rys. 2. Skutki mieszania cieczy:
(a) newtonowskiej, (b) reologicznej;
1 – naczynie, 2 – ciecz newtonowska,
3 – pręt, 4 – uchwyt wiertarki lub miksera, 5 – ciecz reologiczna.

Nie każdy zdaje sobie sprawę, że ciała stałe w pewnych sytuacjach mogą płynąć jak ciecze, a niektóre ciecze stają się sztywne, podobnie jak ciała stałe. Opisem takich materiałów zajmuje się nauka nazywana reologią, której intensywny rozwój rozpoczął się w latach trzydziestych ubiegłego wieku. Jej nazwa nawiązuje do greckiego aforyzmu *panta rhei*, czyli „wszystko płynie”. Kilka zaproponowanych w niniejszym kąciku doświadczeń powinno nam dać pewne wyobrażenie o podstawach tej nauki.

Przygotowanie pierwszego doświadczenia jest niezwykle proste. Do płytkiego naczynia wysypujemy 100 g mąki ziemniaczanej i wlewamy 0,1 litra wody. Oba składniki powoli mieszamy łyżeczką. Proces mieszania powinien przebiegać łatwo i powolne poruszanie łyżeczki nie napotyka dużego oporu. Sytuacja zmienia się radykalnie, kiedy próbujemy poruszać łyżeczką szybko – opory wówczas gwałtownie rosną. Zaobserwowany fakt, tj. zależność współczynnika lepkości od prędkości, obrazuje podstawową cechę cieczy reologicznych, odróżniającą je od „zwykłych” cieczy zwanych newtonowskimi.

Przygotowaną mieszaninę możemy także nabrać do ręki. Kiedy będziemy zamykać powoli dłoń, wówczas badana ciecz wypłynie łatwo jak woda. Gdy zechcemy zamknąć dłoń szybko, wtedy pojawi się opór, jak podczas ściskania ciała stałego. Jeszcze bardziej efektowną wersję tego doświadczenia możemy przygotować, napełniając zawieszoną mąki naczynie, do którego można wejść. Jeśli wkładać tam stopy powoli, tonie się, ale jeżeli stąpać szybko – można utrzymać się na powierzchni. Nie wnikając zbyt głęboko w rozważania teoretyczne, można powiedzieć, że przyczyną obserwowanych efektów jest zmienna adsorpcja cząsteczek wody na powierzchni cząstek mąki ziemniaczanej. Każda z tych cząstek jest otoczona swego rodzaju powłoką cząsteczek wody, której grubość zależy od wywieranych sił zewnętrznych i przez to decyduje o swobodzie ruchu.

Inne zadziwiające zjawisko można zaobserwować, nalawszy do niewielkiego naczynia sztucznego miodu (naturalnego szkoda ze względu na smak i cenę) albo niespolimeryzowanej żywicy epoksydowej używanej m.in. do sporządzania klejów i szpachlówek. Naczynie z tą cieczą umieszczamy nad innym, szerokim naczyniem i przechylamy, tak żeby spowodować jej wylewanie się (rys. 1). Zauważymy wówczas utworzenie się odchylonej od pionu kolumny cieczy, wykonującej powolny ruch wirowy w płaszczyźnie poziomej. Szerokość tej kolumny zwiększa się w dolnej części, a na powierzchni cieczy w szerokim naczyniu rozplývają się koncentryczne zafalowania, jak na powierzchni wody, gdy wrzucimy do niej kamień. Zaobserwowane przez nas zachowanie się cieczy reologicznej nazywane jest *efektem Fano* albo bezrurowym syfonem i w istotny sposób różni się od obserwowanego na co dzień wypływu cieczy newtonowskiej. Efekt Fano można wygodnie obserwować – raz po raz i bez brudzenia rąk – w zabawce nazywanej klepsydrą żelową (fot. 1), którą spotyka się w sklepach z gadżetami lub pamiątkami. Zabawka ta składa się z przezroczystego, zamkniętego cylindra, podzielonego w połowie wysokością przegrodą z otworem i zawierającego zabarwioną ciecz reologiczną. Gdy ustawimy klepsydrę pionowo i ciecz znajduje się w jej górnej połowie, to wówczas przepływa przez otwór do części dolnej, dając efekt Fano.

Jeszcze inny zaskakujący efekt zachodzi podczas mieszania cieczy reologicznej. Do jego obserwacji przygotowujemy dwa jednakowe naczynia i jedno z nich napełniamy częściowo wodą, a drugie sztucznym miodem albo żywicą epoksydową (rys. 2). W uchwycie wiertarki elektrycznej lub miksera mocujemy prosty pręt, włączamy urządzenie i ustawiamy obroty w granicach kilkadziesiątu na minutę. Zanurzamy wirujący pręt w naczyniu z wodą i obserwujemy wytworzenie się charakterystycznego leja wokół pręta. Jego kształt łatwo wyjaśnić analizą warunku równowagi siły odśrodkowej i siły ciężkości. Następnie zanurzamy pręt w drugim naczyniu. Tym razem ciecz reologiczna „wspina się” po pręcie, jakby chciała się na niego nawinąć. Zjawisko to nazywane jest *efektem Weissenberga*; jego szczegółowe wyjaśnienie wykracza niestety poza ramy tego artykułu.

Efekty reologiczne występują dosyć powszechnie. Ich zrozumienie pomaga nie tylko usprawnić procesy technologiczne czy zdiagnozować stan układu krążenia pacjenta, ale bardzo ułatwia codzienne życie, np. podczas odrywania metki z przeznaczonego na prezent przedmiotu, mieszania ciasta lub przelewania miodu.

Z babciami w internecie

Z przyjemnością obserwuję narastanie zainteresowania społecznego sprawami i tematami naukowymi. Z tego wynikają bardzo szybko decyzje „medialne” (uważam za „sensacyjną” decyzję TVP Kultura o nadawaniu w dobrym czasie i z powtórkami krótkich felietonów naukowców „Co ty wiesz o nauce?”), coraz ciekawsze „działy naukowe” w gazetach, a przede wszystkim prawdziwy zalew takich informacji, filmików i filmów w internecie, zdobywających dużo „laików”. Uczestniczyłam niedawno w nagraniu internetowym skierowanym do „prowincjonalnych” bibliotek i czytelników – seniorów (projekt edukacyjny Fundacji Orange). Odbywa się to tak, że w studio siedzi wybrana seniorka (senior), która ma zainteresowania (!), a w kilkuset bibliotekach nie-warszawskich inni seniorzy słuchają i zadają pytania, tyle tych pytań, że odpowiedzieć na wszystkie nie sposób. Senior ze studia może być DJ-em (słynna Viki), żeglarzem, kuchmistrem, genetykiem. Pytania są fajne i wkraczające w sedno spraw. Rozmawia się też, jak zachować na tym etapie życia zaciekawienie światem, który nas otacza, jak znaleźć sobie zajęcie, hobby. Przede wszystkim, jak wyjść do ludzi.

Zdaję sobie sprawę z tego, że Czytelnicy *Delty* to raczej inne pokolenie niż ci seniorzy, ale może warto wiedzieć, jak się żyje babciom i dziadkom, bo oni też ludzie i można poszukać z nimi wspólnych zainteresowań. Oni od tego nie zrobią się młodszy, ale może, może, trochę wnukom bliżsi.

Pytania, na które nie zdążyłam odpowiedzieć, są, na przykład, takie:

MBP F2 Czechowice-Dziedzice: *Jako naukowiec widzi Pani zmiany, jakie się dokonują, czy jest Pani zaniepokojona tym, co nam przyniesie przyszłość, czy patrzy optymistycznie?*

Odpowiadam typowo dla naukowo kształconego człowieka: i tak, i nie. Optymizm wynika z tego, że wierzę, iż nauka dobrze kontroluje swoje dokonania, nie dopuszczając do zastosowań szkodliwych. Pesymizm wiąże się z tym, że do wyników naukowych „dobierają” się często politycy, a ich cele (często ukryte) nie zawsze są bezpośrednio korzystne dla życia i biosfery.

MBP w Lipnie: *Czy geny wpływają na nas, czy my wpływamy na geny?*

I tak, i tak. Wiele cech wyrażanych w życiu zależy wprost od genów. Ale „gen to nie wyrok” i możemy, regulując swoje postępowanie, osłabić lub wzmocnić działanie genów. Najprostszy przykład to zależność wielu chorób od palenia papierosów.

MBP Chrzanów: *Czy koniecznością jest hodowla, uprawa roślin modyfikowanych genetycznie? Czy ma to swoje uzasadnienie naukowe? Czy faktycznie rośliny te mają ogromny wpływ na nasze zdrowie?*

Na zdrowie nie. Na wydajność i cenę tak. Konieczność pojawia się równolegle do jej uznania lub wykluczenia przez przeważający w społeczeństwie pogląd. Ludziom sytym takie rośliny nie są potrzebne, dla ludzi głodnych stanowią alternatywę.

MBP w Dąbrowie Górniczej: *Dąbrowscy seniorzy zastanawiają się, jak można zachęcać dzieci do nauki?*

To trudne pytanie. Dziecko chce się czegoś dowiedzieć, gdy widzi w tym jakąś tajemnicę, zagadkę, coś poza standardem. Wtedy nawet nie trzeba go zmuszać do uczenia się na pamięć. No, ale te zagadki, których pełno jest w nauce, powinni przede wszystkim pokazać nauczyciele. Jest źle, kiedy naucza się wiedzy jako czegoś skończonego, raz na zawsze ustalonego. To nie jest cecha nauki!

Biblioteka w Gorzowie: *Mając tak dużą wiedzę i osiągnięcia naukowe w zakresie genetyki, jakie wartości w życiu uważa Pani za fundamentalne?*

Tu mnie mają!!! Czy te pytania muszą być aż tak trudne? Fundamentalne jest szukanie prawdy. A nikt mi nie obiecał, że ją znajdę, więc tym bardziej jest to poszukiwanie ciekawe. Nie musimy złapać króliczka, ważne jest, by go gonić.

Magdalena FIKUS



Informatyczny kącik olimpijski (68): Drogi stanowe

Tym razem omówimy zadanie o drogach stanowych (*State Roads*) z pierwszej rundy zawodów Yandex.Algorithm 2013. Zadanie to można sformułować w języku teorii grafów, a do tego w ujęciu dynamicznym. Mamy więc graf nieskierowany o zbiorze wierzchołków V , początkowo pusty, w którym w kolejnych momentach pojawiają się i znikają krawędzie. Pomiędzy takimi zdarzeniami otrzymujemy zapytania, z których każde dotyczy pewnego podzbioru wierzchołków grafu $V_i \subseteq V$. W odpowiedzi na takie zapytanie mamy stwierdzić, czy z jakiegokolwiek wierzchołka zbioru V_i wychodzi jakaś krawędź poza ten zbiór; innymi słowy, czy wierzchołki zbioru V_i w rozważanym momencie stanowią sumę pewnej liczby spójnych składowych grafu. W zadaniu występuje też techniczny (ale przyjemny) warunek, że wstawiane krawędzie otrzymują numery będące kolejnymi liczbami naturalnymi i za pomocą tych numerów oznaczane są krawędzie przeznaczone do usunięcia.

Zastanówmy się najpierw nad rozwiązaniem siłowym. Tym razem, celowo, omówimy dość dokładnie nietrywialne szczegóły implementacyjne rozwiązania. Cały graf możemy przechowywać po prostu jako tablicę list sąsiedztwa. Przy wstawianiu krawędzi uv o numerze j dodajemy po jednym nowym elemencie do list sąsiedztwa wierzchołków u i v i w osobnej tablicy indeksowanej numerem krawędzi zapamiętujemy wskaźniki na elementy list, które dodaliśmy dla tej krawędzi. Takie wstawienie działa oczywiście w czasie stałym:

```
function wstaw( $u, v, j$ )
  push_back(lista[u],  $v$ )
  push_back(lista[v],  $u$ )
  krawedz_u[j] := last(lista[u])
  krawedz_v[j] := last(lista[v])
```

Dzięki wspomnianemu przyjemnemu warunkowi technicznemu uprzednio wstawioną krawędź możemy usunąć z grafu również w czasie stałym, po prostu usuwając odpowiednie elementy list sąsiedztwa:

```
function usun( $u, v, j$ )
  delete(lista[u], krawedz_u[j])
  delete(lista[v], krawedz_v[j])
```

Bardziej czasochłonną operacją jest, oczywiście, odpowiedź na zapytanie. Wczytując wierzchołki występujące w zapytaniu, możemy równocześnie zaznaczać wszystkie te wierzchołki w pomocniczej tablicy indeksowanej numerami wierzchołków. Żeby nie musieć za każdym razem zerować tej tablicy, wierzchołki z każdego nowego zapytania możemy oznaczać numerem porządkowym tego zapytania. Teraz obsługa zapytania jest już bardzo prosta – przeglądamy kolejne wierzchołki z zapytania, dla każdego z nich przeglądamy wszystkie incydentne krawędzie i sprawdzamy, czy drugie końce tych krawędzi są zaznaczone w tablicy pomocniczej:

```
function zapytanie( $V_i$ )
  foreach  $v \in V_i$  do pom[ $v$ ] :=  $i$ 
  foreach  $v \in V_i$  do
    foreach  $u \in lista[v]$  do
      if pom[ $u$ ]  $\neq i$  then return false
  return true
```

Na pierwszy rzut oka widać, że obsługa zapytania jest tutaj *bardzo wolna*. Warto jednak przyjrzeć się temu dokładniej. Przede wszystkim należy ustalić, co jest dla nas rozmiarem

danych wejściowych. Oznaczmy przez n liczbę wierzchołków grafu, a przez m – łączną liczbę krawędzi wstawionych kiedykolwiek do grafu. Niech n_i (dla $i = 1, 2, \dots, z$) oznacza liczbę wierzchołków występujących w i -tym zapytaniu, $n_i = |V_i|$. Całkiem naturalnie jako rozmiar danych wejściowych przyjmiemy $R = n + m + \sum_{i=1}^z n_i$.

Jak teraz wyrazić względem R koszt obsługi wszystkich zapytań? Zauważmy, że w i -tym zapytaniu będziemy musieli przejrzeć co najwyżej $n_i(n_i - 1)$ krawędzi. Faktycznie, tyle krawędzi (liczonych w obie strony) ma klika o n_i wierzchołkach, więc jeśli w listach sąsiedztwa wierzchołków z zapytania znajdzie się więcej niż tyle krawędzi, to na pewno odpowiedź na to zapytanie będzie negatywna. Asymptotycznie daje to koszt $O(n_i^2)$. Z drugiej strony, w każdym zapytaniu przejrzymy łącznie co najwyżej $2m$ krawędzi. Ostatecznie koszt zapytania to $O(\min(n_i^2, m))$. Skorzystajmy teraz z nierówności między minimum a średnią geometryczną:

$$\min(n_i^2, m) \leq \sqrt{n_i^2 m} = n_i \sqrt{m}.$$

Całkowity koszt obsługi wszystkich zapytań możemy oszacować przez:

$$O\left(\sum_{i=1}^z n_i \sqrt{m}\right) = O(R\sqrt{m}) = O(R\sqrt{R}).$$

Czyli jednak to rozwiązanie nie było znowu aż takie wolne!

Jednak da się lepiej. I to dużo lepiej, bowiem liniowo względem rozmiaru danych wejściowych. Rozwiązanie opiera się na następującym pomysłe: obliczymy sumę stopni wierzchołków ze zbioru V_i . Jeśli suma ta jest nieparzysta, to na pewno z V_i wychodzi jakaś krawędź na zewnątrz, bowiem w każdym grafie suma stopni wierzchołków jest parzysta. Pomysł ten w ogólności nie działa – może się okazać, że suma stopni wierzchołków w V_i będzie parzysta, a mimo tego odpowiedź na zapytanie będzie negatywna.

Uogólnijmy zatem nasz pomysł i wprowadźmy element randomizacji. Każdej krawędzi wstawianej do grafu przypiszmy losową wagę będącą liczbą całkowitą. Dla każdego wierzchołka $v \in V$ będziemy przechowywać (jako $xor[v]$) bitową alternatywę wykluczającą wag krawędzi incydentnych z tym wierzchołkiem. Przy wstawianiu i usuwaniu krawędzi tablicę xor możemy aktualizować w czasie stałym – w obu przypadkach wystarczy do-xor-ować wagę krawędzi do xor -ów jej końców. W przypadku wstawiania będzie to:

$$\begin{aligned} xor[u] &:= xor[u] \oplus waga[j] \\ xor[v] &:= xor[v] \oplus waga[j] \end{aligned}$$

Kluczowa obserwacja jest teraz taka: odpowiedź na zapytanie $V_i = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ jest pozytywna wtedy i tylko wtedy, gdy każda krawędź w grafie jest incydentna z dwoma wierzchołkami ze zbioru V_i lub z żadnym z nich. Ponieważ $w \oplus w = 0$, zatem aby odpowiedzieć na zapytanie, obliczamy wartość:

$$xor[u_1] \oplus xor[u_2] \oplus \dots \oplus xor[u_k].$$

Jeśli powyższa wartość jest różna od zera, na pewno odpowiedź na zapytanie jest negatywna. W przeciwnym razie z *dużym prawdopodobieństwem* odpowiedź jest pozytywna. Prawdopodobieństwo udzielenia błędnej odpowiedzi, czyli trafienia przypadkiem na 0, wynosi $\frac{1}{M}$, gdzie M jest ograniczeniem górnym na wagę krawędzi. Przyjmując, naturalnie, $M = 2^{32}$ lub $M = 2^{64}$, otrzymujemy rzeczywiście bardzo małe prawdopodobieństwo błędu.

Jakub RADOSZEWSKI

Dziesięć kilo splątanych kubitów

Kwantowy komputer ma (potencjalnie) umożliwić (przybliżone) przeprowadzanie rachunków, na które ani piasku (krzemu), ani czasu nie wystarczy w całym kosmosie. Nie jest wykluczone, że (nie tylko ludzki) mózg jest takim komputerem, ale nawet jeżeli tak, to nie mamy do niego odpowiedniego międzymordzia.

Podstawowym wyzwaniem w realizacji kwantowego komputera jest liczba kubitów, które udaje się kwantowo splątać. Możliwości obliczeniowe skalują się wykładniczo z tą liczbą. Na razie udało się doliczyć do kilkunastu. Jest, co prawda, firma D-Wave, która nazywa sama siebie „The Quantum Computing Company” i która twierdzi, że ma 512-kubitowy procesor. Jednak, choć jej pracownicy publikują w najbardziej poważanych recenzowanych periodykach (np. [1]), to społeczność naukowa nie jest do końca przekonana, że jest to prawdziwy komputer kwantowy. Należy sobie jednak zdawać sprawę, że celem D-Wave jest doprowadzenie do praktycznego wykorzystywania obliczeń kwantowych. Strategia firmy polega bardziej na patentowaniu kolejnych rozwiązań technologicznych niż na publikowaniu osiągnięć. Informacje na temat działalności D-Wave można znaleźć na ich portalu [2].

Najnowsza inkarnacja komputera kwantowego *D-Wave Two* jest czarnym sześcianiem o boku kilku metrów, w którym ukrywa się procesor o powierzchni milimetra kwadratowego, schłodzony do temperatury 20 mK. Kubity i ich splątanie jest realizowane za pomocą nadprzewodzących obwodów. Temperatura tak bliska bezwzględnemu zeru nie jest niczym zaskakującym. Jeżeli jednak jest ona warunkiem koniecznym kwantowych rachunków, to mózg nie może być komputerem kwantowym. Nie jest to jednak jedyna droga do kwantowych obliczeń.

Kubitem może być każdy system kwantowy o dwóch stanach, dla których możliwa jest superpozycja. Mogą to być impulsy świetlne. O tym, jak bardzo doceniane jest tego typu podejście do problemu, może świadczyć chociażby Nagroda Nobla z fizyki za rok 2012 (*Aktualności 12/2012*).

Kolejnym przełomem w tej dziedzinie może okazać się praca [3], w której zaprezentowano wyniki splątania dziesięciu tysięcy kubitów, rozróżnianych za pomocą separacji czasowej.

Pomysł jest bardzo prosty. Najpierw tworzone są dwie wiązki tzw. stanów ściśniętych światła. Są to stany, dla których iloczyn nieoznaczoności położenia i pędu jest minimalny. Kolejne paczki w każdej z wiązek występują w stałym odstępnie czasowym T . Każda taka paczka jest niezależnym kubitem. Następnie kolejne pary są sukcesywnie splątane za pomocą kierowania ich na płytkę półprzewodzącą. Kolejnym etapem jest opóźnienie jednej z wiązek o T i ponowne splątanie za pomocą drugiej płytki półprzewodzącej. W ten sposób powstaje sieć kubitów, z których każdy jest splątany z czterema innymi. Wynik został nazwany „rozszerzonym stanem EPR” (ang. *extended EPR* – XEPR) i może być tzw. stanem źródłowym umożliwiającym przeprowadzenie tzw. jednokierunkowego obliczenia kwantowego (ang. *measurement-based quantum computation (MBQC)* lub *one-way QC*), za pomocą którego można (przynajmniej teoretycznie) zaimplementować dowolne obliczenie kwantowe (podobnie jak dowolny klasyczny algorytm można wykonać za pomocą maszyny Turinga).

W pracy [3] udokumentowane jest efektywne splątanie około 10 tysięcy kubitów. Ciekawe w tym podejściu jest to, że splątanie obejmuje kubity, które fizycznie nie współistnieją, bo na końcu obu torów sygnałowych stany kubitów są mierzone, co kończy ich żywot. Splątanie kwantowe należy rozumieć jako sukcesywną (wsteczną) teleportację kwantową zachodzącą na drugiej płytce półprzewodzącej.

Jak będzie wyglądał komputer kwantowy, jeszcze nie wiadomo. Obecną sytuację można porównać do pierwszych sterowców wykonujących loty komercyjne. Były to urządzenia niewątpliwie użyteczne i bez dwóch zdań wprowadzały zupełnie nową jakość poprzez użycie trzeciego wymiaru przestrzeni. Historia awiacji potoczyła się jednak jeszcze inaczej.

Piotr ZALEWSKI

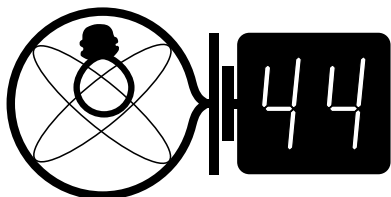
[1] N.G. Dickson i inni (prawie wszyscy z *D-Wave Systems Inc.*), *Thermally assisted quantum annealing of a 16-qubit problem*, Nature Communications 4, 1903, doi:10.1038/ncomms2920, maj 2013.

[2] <http://www.dwavesys.com/en/deep-dive.html>.

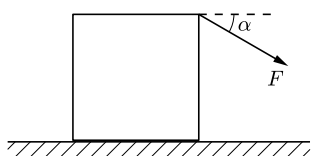
[3] Shota Yokoyama, Ryuji Ukai, Seiji C. Armstrong, Chanond Sornphiphatphong, Toshiyuki Kaji, Shigenari Suzuki, Jun-ichi Yoshikawa, Hidehiro Yonezawa, Nicolas C. Menicucci i Akira Furusawa, *Ultra-large-scale continuous-variable cluster states multiplexed in the time domain*, Nature Photonics (2013), doi:10.1038/nphoton.2013.287.

Skrót regulaminu

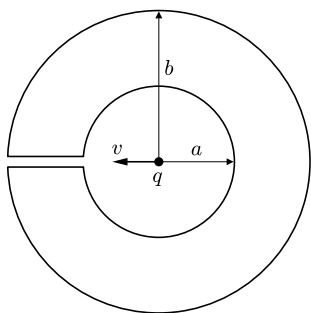
Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (**M** lub **F**) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu **44** punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (**M** lub **F**), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2014



Rys. 1



Rys. 2

Zadania z fizyki nr 570, 571

Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

570. Pręt o długości l , promieniu r i masie m porusza się wewnątrz pionowej rury o promieniu $R \ll l$, wypełnionej nieściśliwą cieczą o gęstości ρ , wzdłuż jej osi. Gęstość pręta jest mniejsza od gęstości cieczy. Znaleźć przyspieszenie pręta. Opory ruchu (lepkość cieczy) można zaniedbać.

571. W pionowej, wąskiej rurce o długości $2l$ dolny koniec jest zamknięty, a górny otwarty. W dolnej połowie znajduje się gaz doskonały o temperaturze T_1 , górna połowa jest wypełniona rtęcią. Ciśnienie zewnętrzne jest równe ciśnieniu słupka rtęci o wysokości l . Do jakiej temperatury wystarczy ogrzać gaz w rurce, aby cała rtęć została z niej wyparta?

Rozwiązania zadań z numeru 9/2013

Przypominamy treść zadań:

562. Sześcian o masie m stoi na powierzchni poziomej. Z jaką minimalną siłą F i pod jakim kątem α do poziomu (rys. 1) należy ciągnąć sześcian za środek górnej krawędzi, żeby przewrócił się bez poślizgu, jeżeli współczynnik tarcia wynosi μ ? Siła F jest prostopadła do górnej krawędzi sześcianu.

563. W środku nieruchomej, wydrążonej, przewodzącej kuli o promieniach wewnętrznym a i zewnętrznym b umieszczono cząstkę o masie m naładowaną ładunkiem $q > 0$ (rys. 2). Jaką prędkość należy nadać cząstce, aby przez wąską szczelinę oddaliła się do nieskończoności? Przenikalność elektryczna próżni ϵ_0 jest dana.

562. Warunek na brak poślizgu ma postać: $F \cos \alpha \leq \mu(mg + F \sin \alpha)$. Aby nastąpił obrót wokół dolnej, przedniej krawędzi, musi być spełniony warunek: $aF \cos \alpha < \frac{mg a}{2}$, gdzie a jest krawędzią sześcianu. Rozważmy przypadek graniczny, gdy siła $F = F_0 = \frac{mg}{2 \cos \alpha}$ nie powoduje jeszcze obrotu. Z warunku na brak poślizgu otrzymujemy wtedy: $\frac{mg}{2} \leq \mu mg(1 + \frac{\tan \alpha}{2})$, czyli $\tan \alpha \geq \frac{1-2\mu}{\mu}$. Musimy rozważyć dwa przypadki:

- 1) $\mu < 0,5$, wtedy $\tan \alpha = \frac{1-2\mu}{\mu}$,
- 2) $\mu \geq 0,5$, wtedy $\alpha = 0$.

Ostatecznie otrzymujemy odpowiedź:

$$\alpha = 0 \quad \text{i} \quad F > \frac{mg}{2} \quad \text{dla} \quad \mu \geq 0,5$$

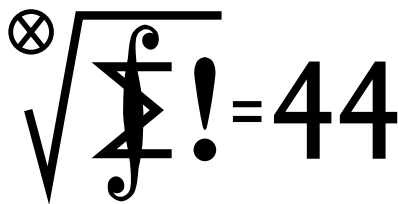
oraz

$$\tan \alpha = \frac{1-2\mu}{\mu} \quad \text{i} \quad F > \frac{mg \sqrt{5\mu^2 - 4\mu + 1}}{2\mu} \quad \text{dla} \quad \mu < 0,5.$$

563. W chwili początkowej na wewnętrznej powierzchni wydrążonej kuli indukuje się ładunek $-q$, a na powierzchni zewnętrznej q , ponieważ w przewodniku nie ma pola elektrycznego. Energia początkowa układu jest sumą energii kinetycznej cząstki, energii W_1 oddziaływania elektrostatycznego cząstki z ładunkami indukowanymi oraz energii W_2 oddziaływania między ładunkami indukowanymi. $W_1 = kq^2(\frac{1}{b} - \frac{1}{a})$, gdzie $k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$, $W_2 = \frac{qU}{2}$, gdzie U jest napięciem między sferami o promieniach a i b związanym tylko z ładunkami na sferach. Potencjał sfery wewnętrznej wynosi $V(a) = kq(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}) < 0$, potencjał sfery zewnętrznej $V(b) = 0$, $U = -V(a)$. Po oddaleniu się cząstki do nieskończoności energia układu wynosi zero i z zasady zachowania energii otrzymujemy szukaną prędkość:

$$v = q \sqrt{\frac{k(b-a)}{mab}}.$$

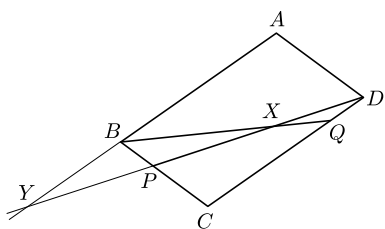
Klub 44



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2014

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 663 ($WT = 1,92$) i 664 ($WT = 1,53$) z numeru 6/2013

Rami Marcin Ayoush	Szelków	41,55
Marek Spychała	Warszawa	39,37
Janusz Fiett	Warszawa	38,75
Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,70
Marcin Malogrosz	Warszawa	37,48
Wojciech Maciak	Warszawa	36,72



Zadania z matematyki nr 673, 674

Redaguje Marcin E. KUCZMA

673. Czy istnieją cztery kolejne liczby całkowite dodatnie, których iloczyn, powiększony o 2^{10} , jest kwadratem liczby całkowitej? Podać wszystkie rozwiązania (jeśli istnieją).

674. Znaleźć wszystkie funkcje $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które spełniają układ równań funkcyjnych

$$f(x+1) = f(x) + 1, \quad f(x^2) = f(x)^2 \quad \text{dla } x \in \mathbb{R}.$$

Zadanie 674 zaproponował pan Paweł Najman z Krakowa.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2013

Przypominamy treść zadań:

665. Dany jest równoległobok $ABCD$. Punkty P i Q leżą odpowiednio na bokach BC i DC , odcinki BP i DQ mają jednakową długość. Dowieść, że odcinki BQ i DP przecinają się w punkcie, leżącym na dwusiecznej kąta BAD .

666. Niech W będzie wielomianem stopnia $k \geq 2$, o współczynnikach całkowitych nieujemnych. Zakładamy, że dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$ wartość $W(n)$ jest k -tą potęgą liczby całkowitej nieujemnej. Udowodnić, że W ma postać $W(x) = (ax + b)^k$, gdzie $a \geq 1$, $b \geq 0$ są liczbami całkowitymi.

665. Niech X będzie punktem przecięcia odcinków BQ i DP . Przedłużamy odcinek DP do przecięcia z prostą AB w punkcie Y . Z równoległości $DC \parallel AB$ oraz $AD \parallel BC$ wynikają proporcje

$$\frac{|XY|}{|XD|} = \frac{|BY|}{|QD|} \quad \text{oraz} \quad \frac{|AY|}{|AD|} = \frac{|BY|}{|BP|}.$$

Prawe strony tych równości mają jednakową wartość, bo $|BP| = |QD|$. Zatem i lewe strony mają jednakową wartość; a to znaczy, że w trójkącie DAY odcinek AX jest dwusieczną kąta przy wierzchołku A (czy go nazwiemy BAD , czy DAY , to wszystko jedno).

666. Niech

$$W(x) = \sum_{j=0}^k c_j x^j; \quad c_j \in \mathbb{Z}, c_j \geq 0 \quad (j = 0, \dots, k); c_k > 0.$$

Z założenia istnieje ciąg liczb całkowitych nieujemnych (d_n) taki, że

$$W(n) = d_n^k \quad \text{dla } n = 1, 2, 3, \dots$$

Ciąg $W(n)/n^k$, czyli $(d_n/n)^k$, dąży do c_k , gdy $n \rightarrow \infty$. Stąd

$$(1) \quad \frac{d_n}{n} \rightarrow c_k^{1/k}, \quad \text{a także} \quad \frac{d_{n+1}}{n} = \frac{d_{n+1}}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \rightarrow c_k^{1/k}, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Różnica $W(n+1) - W(n)$ jest wielomianem stopnia $k-1$, z wyrazem wiodącym $kc_k x^{k-1}$. Zatem

$$(2) \quad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \rightarrow kc_k, \quad \text{gdy } n \rightarrow \infty.$$

Z drugiej strony,

$$(3) \quad \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} = \frac{d_{n+1}^k - d_n^k}{n^{k-1}} = (d_{n+1} - d_n) \cdot A_{n,k},$$

gdzie

$$A_{n,k} = \frac{1}{n^{k-1}} \sum_{j=0}^{k-1} d_{n+1}^{k-1-j} d_n^j = \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{d_{n+1}}{n}\right)^{k-1-j} \left(\frac{d_n}{n}\right)^j.$$

Wobec związków (1), przy $n \rightarrow \infty$ mamy

$$(4) \quad A_{n,k} \rightarrow \sum_{j=0}^{k-1} c_k^{(k-1-j)/k} c_k^{j/k} = kc_k^{1-1/k}.$$

Z zależności (3), (4), (2) wynika teraz, że przy $n \rightarrow \infty$

$$d_{n+1} - d_n = \frac{1}{A_{n,k}} \cdot \frac{W(n+1) - W(n)}{n^{k-1}} \rightarrow c_k^{1/k}.$$

Różnica $d_{n+1} - d_n$ przedstawia więc ciąg liczb całkowitych, który jest zbieżny – taki ciąg jest od pewnego miejsca stały.

Oznaczając $a = c_k^{1/k}$, mamy zatem

$$d_{n+1} - d_n = a \quad \text{dla } n \geq n_0;$$

liczba a jest całkowita oraz dodatnia.

Dla liczb całkowitych $n \geq n_0$ uzyskujemy równość

$$W(n) = d_n^k = (d_{n_0} + (n - n_0)a)^k = (an + b)^k,$$

gdzie $b = d_{n_0} - n_0 a$ jest liczbą całkowitą. Wniosek: W jest wielomianem

$$W(x) = (ax + b)^k;$$

pozostaje tylko zauważyć, że $b \geq 0$, skoro (z założenia) współczynniki c_j wielomianu W są nieujemne, zaś $c_0 = b^k$, $c_1 = kab^{k-1}$, $a > 0$.

Prosto z nieba: Włókna i pustki

Niezwykle precyzyjne obserwacje satelity Planck kreślą obraz Wszechświata, w którym głównym składnikiem jest tajemnicza ciemna energia (68,3% całkowitej gęstości masy/energii) oraz równie tajemnicza, nieoddziałująca elektromagnetycznie ciemna materia (26,8%); zwykła materia stanowi tylko 4,9% całkowitej gęstości. Nasz Wszechświat jest również bardzo *plaski*, a jego średnia gęstość to 10^{-29} g/cm³, co odpowiada sześciu protonom na metr sześcienny. Wszechświat może się więc wydawać prawie kompletnie pusty, a przynajmniej ubogi w znaną z codziennego doświadczenia materię. Jaka jest jego struktura? W skalach większych od „ludzkich” (~ m) materia grupuje się w gwiazdy ($\approx 10^6$ km), te w galaktyki ($\approx 10^{18}$ km, czyli 30 kpc w przypadku Drogi Mlecznej), a te z kolei w gromady galaktyk (1–10 Mpc). Supergromady, czyli gromady gromad tworzą gigantyczne struktury zwane włóknami (filamentami) o rozmiarach rzędu 100 Mpc, które zawierają praktycznie całą świecąca materię skupioną w gwiazdach. Pomiędzy włóknami znajdują się pustki; jedną z nich jest gigantyczna superpustka w kierunku gwiazdozbioru Erydanu, odkryta w danych satelity WMAP i potwierdzona przez Plancka. Obserwowane struktury są wynikiem pierwotnych fluktuacji w bardzo wczesnym

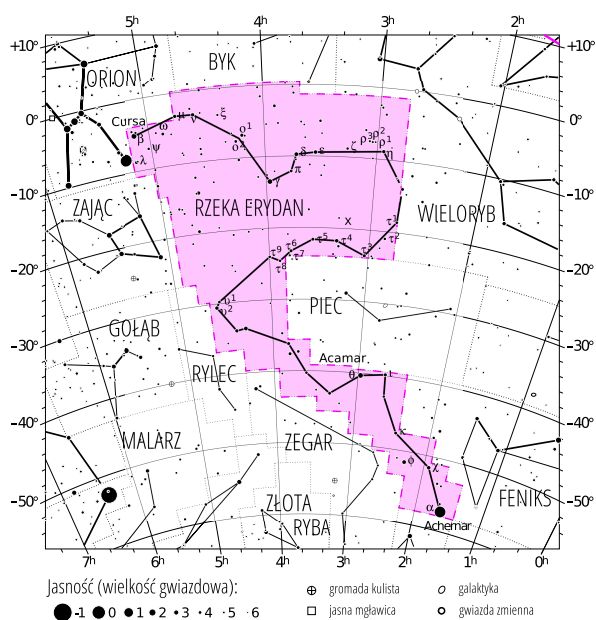
etapie życia Wszechświata. Materia, wtedy mieszanina elektronów, barionów i fotonów, zapadała się grawitacyjnie w obszarach gęstszych przy współdziałaniu ciemnej materii i w obecności promieniowania. W ten sposób prawie jednorodny rozkład materii zmienił się w obecnie obserwowaną sieć włókien i pustek. Powstające w trakcie tego procesu fale dźwiękowe (akustyczne oscylacje barionowe) pozostawiły swój ślad na „sferze ostatniego rozproszenia” w czasie rekombinacji plazmy w atomy wodoru (ok. 400 tys. lat po Wielkim Wybuchu, przy przesunięciu ku czerwieni z ≈ 1000), dlatego też do badania wielkich struktur używa się obserwacji mikrofalowego promieniowania tła.

Fluktuacje promieniowania tła są wywołane efektem Sachs–Wolfa, czyli poczerwienieniem (lub poniebieszczeniem) fotonów uciekających z głębszych lub płytszych lokalnych studni potencjału.

Mniejsza niż średnia gęstość rozkładu materii odpowiada obszarom chłodniejszym, czyli pustkom; miejsca cieplejsze są związane z włóknami.

Mamy nadzieję, że analiza niebieskich i czerwonych plamek na mapie stworzonej przez zespół Plancka będzie jeszcze przez długi czas źródłem interesujących odkryć.

Michał BEJGER



Gwiazdozbiór Erydanu. Mapa nieba we współrzędnych równikowych; rozmiary gwiazd odzwierciedlają ich jasności w wielkościach gwiazdowych (x oznacza Zimną Plamę). [Mapkę nieba wykonano na podstawie mapy IAU/magazynu *Sky & Telescope* (Roger Sinnott & Rick Fienberg).]

Niebo jak własna kieszeń: Styczeń

Styczeń wykorzystujemy na walce ze spowodowaną wyśrubowanymi postanowieniami noworocznymi depresją, poprawiając sobie humor obserwacjami Rzeki Erydan – szóstego co do wielkości, ale niezbyt charakterystycznego gwiazdozbioru widocznego o tej porze roku nad południowym horyzontem. W *Eneidzie* Wergiliusz utożsamia Erydan z jedną z rzek Hadesu, płynącą przez sielankową krainę zwaną Polami Elizejskimi; w to ekskluzywnie miejsce trafiają po śmierci ludzie dobrzy, bohaterowie oraz naukowcy.

Kąpiel w Erydanu jest także marzeniem poczętego za pomocą genetycznych manipulacji makabrycznego Tyfona, syna Gai i Tartara (lub, według innej wersji mitu, Hery), najbardziej zabójczego potwora greckiej mitologii!

Najjaśniejszy obiekt Erydanu to Achemar (0,44^m), bardzo szybko rotująca gwiazda ciągu głównego (typ B6) o wyraźnym niebieskim kolorze. Nie jest, niestety, widoczna z Polski, tak jak i cała południowa część gwiazdozbioru otoczona egzotycznymi konstelacjami Zegara, Rylca, Złotej Ryby i Feniksa, dlatego za punkt odniesienia musi nam wystarczyć druga co do jasności Cursa (β Eri, 2,79^m), znajdująca się tuż obok Rigla (β Ori). Erydan zawiera także inny ciekawy, niewidoczny gołym okiem obiekt głębokiego nieba, nazwany Zimną Plamą; jest to znacząco

zimniejszy niż inne obszar mikrofalowego promieniowania tła wielkości kilku stopni łuku, który według kosmologów jest dowodem na obecność w tym kierunku ogromnej kosmicznej pustki (przestrzeni pozbawionej galaktyk) o rozmiarach przekraczających 150 Mpc.

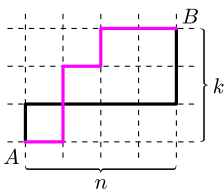
W styczniu (5 I) Jowisz znajdzie się w opozycji (Bliźnięta): jego tarcza będzie wtedy całkowicie oświetlona przez Słońce, a planeta osiągnie jasność $-2,23^m$. Jest to dobry czas do obserwacji, z przybierającym po nowiu (1 I) Księżycem; dzień przed pełnią, która wypada 16 I, Księżyc będzie w odległości paru stopni od Jowisza. Przed wschodem Słońca widać także Marsa w gwiazdozbiorze Panny (jasność zmieniająca się od 1^m do 0,4^m), oraz Saturna w gwiazdozbiorze Wagi (0,77^m). Słynna kometa C/2012 S2 (ISON) o jasności nieco poniżej 6^m będzie przemieszczać się w okolicy północnego bieguna nieba (7 I znajdzie się najbliżej Polaris), a 14–15 I, gdy Ziemia przetnie tor orbity komety, możemy spodziewać się deszczu meteorów. Ciekawe wydają się także Kwadrantydy (maksimum 5 I), o radiancie w gwiazdozbiorze Wolarza.

M. B.

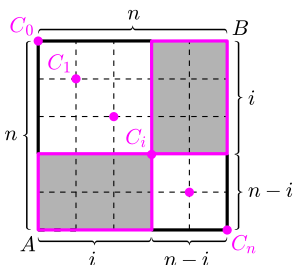
1. W Kratkowie ulice prowadzą tylko z północy na południe lub z zachodu na wschód, a odstęp między kolejnymi przecznicami są równe jednej kratce. Szukamy najkrótszej możliwej drogi ulicami z punktu A do punktu B (rys. 1). Którędy należy iść i ile jest różnych dróg do wyboru?

2. Wykaż, że $\sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 = \binom{2n}{n}$.

3. Bilet do kina kosztuje 10 zł, w kasie jest dużo biletów i nie ma pieniędzy. W kolejce stoi, w przypadkowej kolejności, n osób z banknotami 10 zł oraz k osób posiadających jedynie banknot 20 zł, przy czym $n \geq k$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że kasjerowi w trakcie obsługi nie zabraknie reszty do wydawania?

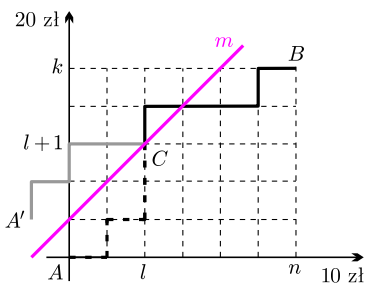


Rys. 1. Dwie z najkrótszych dróg z A do B : $ENNNENE$ i $NEEEENN$.



Rys. 2

$\binom{n}{n-i} = \binom{n}{i}$, bo wybór i elementów z n równoważny jest odrzuceniu pozostałych $n - i$ elementów.



Rys. 3. Punkt (x, y) – kasjer dostał już x banknotów po 10 zł i y po 20 zł.

Rozwiązania

R1. Najkrótsze drogi prowadzą na północ lub na wschód (rys. 1). Wszystkie są długości $n + k$, gdyż każda ma łącznie n kratek na wschód i k na północ.

Każdą taką drogę można utożsamić z jej opisem – ciągiem zawierającym n znaków E oraz k znaków N kodującym, czy na kolejnym skrzyżowaniu należy iść na północ (N), czy na wschód (E). Najkrótszych dróg jest więc tyle, ile takich ciągów, czyli $\binom{n+k}{n}$, bo na tyle sposobów można wybrać, na których n spośród wszystkich $n + k$ miejsc ciągu ma być znak E . \square

R2. Z zadania 1 wiemy, że liczba najkrótszych dróg „po kratkach” z lewego dolnego do prawego górnego rogu kwadratu $n \times n$ równa jest $\binom{n+n}{n} = \binom{2n}{n}$.

Wyznamy tę samą liczbę inaczej. Każda z takich dróg musi przejść przez dokładnie jeden z n kolorowych punktów C_0, C_1, \dots, C_n z rysunku 2. Liczba najkrótszych dróg z A do B przechodzących przez C_i jest iloczynem liczby najkrótszych dróg z A do C_i i liczby najkrótszych dróg z C_i do B , czyli – z zadania 1 – równa jest

$$\binom{i + (n - i)}{i} \cdot \binom{(n - i) + i}{n - i} = \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n - i}.$$

Stąd liczba wszystkich najkrótszych dróg z A do B równa jest

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot \binom{n}{n - i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2,$$

co kończy dowód na mocy początkowej obserwacji, że dróg tych jest $\binom{2n}{n}$. \square

R3. Zilustrujemy kolejkę jako pewną drogę o $n + k$ krokach: w danym kroku idziemy w prawo, jeśli klient ma 10 zł, lub w górę, jeśli ma 20 zł. Aby kasjerowi nie zabrakło reszty, liczba wręczonych mu banknotów 20 zł nigdy nie może przekroczyć liczby banknotów 10 zł, które do tego momentu dostał. Innymi słowy, droga jest *dobra*, jeśli nie dotyka kolorowej prostej m z rysunku 3. Policzmy, ile jest *złych* dróg.

Niech dana zła droga pierwszy raz dotyka prostej m w punkcie $C = (l, l + 1)$ (rys. 3). Jej część od punktu $A = (0, 0)$ do punktu C odbijmy symetrycznie względem prostej m , uzyskując *półdobcie złej drogi* – nową drogę prowadzącą tylko w prawo lub w górę od punktu $A' = (-1, 1)$ do punktu $B = (n, k)$. Każda zła droga ma inne półdobcie. Ponadto każda najkrótsza droga z A' do B przecina prostą m , więc jest półdobciem pewnej złej drogi. Stąd złych dróg jest tyle, ile ich półdobić, czyli najkrótszych dróg z A' do B , a więc, na mocy zadania 1,

$$\binom{(n + 1) + (k - 1)}{n + 1} = \binom{n + k}{n + 1}.$$

Wszystkich najkrótszych dróg z A do B jest $\binom{n+k}{n}$, więc liczba dobrych dróg to

$$\binom{n + k}{n} - \binom{n + k}{n + 1} = \frac{n + 1 - k}{n + 1} \binom{n + k}{n},$$

a prawdopodobieństwo, że kasjerowi nie zabraknie reszty, równe jest $\frac{n+1-k}{n+1}$. \square

Liczba dobrych dróg dla $n = k$, czyli $\frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$, to tzw. n -ta liczba Catalana.