






tel. 22 63 10 34 48 fax 22 63 10 59 92

SPIS TREŚCI NUMERU 7 (494)

Demon Laplace'a <i>Szymon Charzyński</i>	str. 1
Na czym stoi matematyka? <i>Wiktor Bartol</i>	str. 4
Burzliwe początki cyfrowego tysiąclecia <i>Tomasz Idziaszek</i>	str. 6
 Zadania	str. 6
Wyobrażenie świata <i>Michał Bejger</i>	str. 9
Rozprawka o metodzie <i>Marek Kordos</i>	str.12
 Goryl, jaki jest, każdy widzi <i>Magdalena Fikus</i>	str.17
X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów <i>Barbara Roszkowska-Lech</i>	str.18
Informatyczny kącik olimpijski (83): Więzienie <i>Tomasz Idziaszek</i>	str.20
Aktualności	str.21
Klub 44	str.22
Prosto z nieba: O rozmiarach gwiazd	str.24
Niebo w lipcu	str.24
 Panaceum? <i>Joanna Jaszuńska</i>	str.25

W następnym numerze polecamy



twierdzenie o powrocie

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Zofia Gołąb-Meyer, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Marcin Adamski, Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński, Wojciech Czerwiński, Tomasz Idziaszek, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Urszula Pastwa, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Krzysztof Turzyński – z-ca red. nac., Piotr Zalewski.
Okładki i ilustracje: Podpunkt.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
102-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Skład systemem \TeX oraz rysunki techniczne wykonała Redakcja.
Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Konstruktorska 4, 02-673 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2015 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl

lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH

pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰.

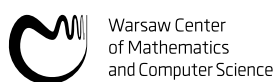
Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Wydawca: Uniwersytet Warszawski

Cena 1 egzemplarza 4 zł



Warsaw Center
of Mathematics
and Computer Science

wcmcs.edu.pl

Demon Laplace'a

Szymon CHARZYŃSKI

Kopalnią wiedzy o zaćmieniach Słońca jest strona prowadzona przez NASA: <http://eclipse.gsfc.nasa.gov>.

7 października 2135 roku Księżyc na 4 minuty i 43 sekundy przesłoni Słońce i większość terytorium naszego kraju na chwilę ogarnie ciemność. Wcześniej zdarzą się zaćmienia częściowe. Wszystkich zaćmień Słońca, widocznych w różnych częściach świata, będą w bieżącym tysiącleciu setki i szczegółowy przebieg każdego z nich można przewidzieć na kilkaset lat do przodu. Jak to się dzieje, że potrafimy tak precyzyjnie te zjawiska przewidywać?

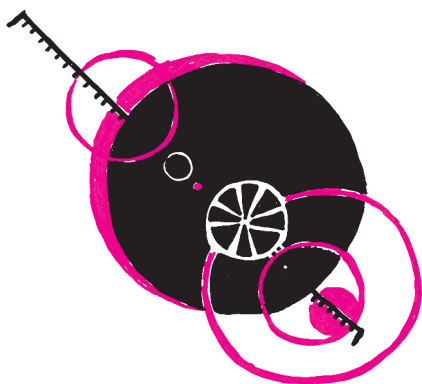
Sukces przewidywań opiera się na dwóch fundamentach. Po pierwsze, dzięki bardzo dokładnym obserwacjom astronomicznym znamy bardzo precyzyjnie aktualny stan Układu Słonecznego, czyli masy jego głównych składników oraz ich położenia i prędkości. Po drugie, od czasów Isaaca Newtona znamy prawa rządzące ruchem ciał niebieskich, czyli zasady dynamiki i prawo powszechnego ciążenia. Prawa te mają tę własność, że zadanie warunków początkowych jednoznacznie determinuje całą przyszłą (ale również przeszłą) ewolucję układu fizycznego. Mówimy, że te prawa są *deterministyczne*. Opierając się zatem na znajomości aktualnego stanu Układu Słonecznego, możemy, rozwiązując równania ruchu, przewidzieć jego stan w przyszłości, a w szczególności znaleźć te chwile, kiedy Słońce, Księżyc i Ziemia ustawią się (prawie) w jednej linii i Księżyc całkowicie lub częściowo przesłoni nam Słońce.

Nasuwa się naturalne pytanie, czy przebieg wszystkich zjawisk daje się przewidywać w taki deterministyczny sposób. Bardzo śmiałą hipotezę, że odpowiedź na to pytanie jest twierdząca, sformułował w 1814 roku Pierre-Simon Laplace. Stwierdził on, że gdyby pewien intelekt był w stanie poznać stan wszystkich składników naszego wszechświata, znał wszystkie prawa, którym podlegają, i gdyby był w stanie przeanalizować te wszystkie dane, to mógłby przewidzieć losy wszystkich tych składników. Taki intelekt znałby całą przeszłość i całą przyszłość. Choć sam Laplace nie nazwał tego intelektu demonem, to obecnie jego koncepcja funkcjonuje w kulturze jako tytułowy *demon Laplace'a*. Tak narodził się paradygmat klasycznego determinizmu.

Była to wizja świata rządzonego ściśle deterministycznymi prawami, których, być może, jeszcze do końca nie znamy, ale było to swoiste wyznanie wiary, że takie deterministyczne prawa istnieją. Poznanie tych praw miałooby natomiast pozwolić na nieograniczoną moc przewidywania przebiegu zjawisk. Paradygmat klasycznego determinizmu wywarł ogromny wpływ na kolejne pokolenia przyrodników, czego przejawem jest chociażby powszechnie znany fragment listu Einsteina do Maksa Borna: *Ty wierzysz w Boga, który gra w kości, ja w panowanie i porządek w świecie obiektywnie istniejącym, który próbuję ująć na drodze dzikiej spekulacji*. Nie jest to wyznanie wiary w Boga, w którego Einstein nie wierzył, i używał tego pojęcia tylko jako metafory, lecz właśnie wyznanie wiary w determinizm.

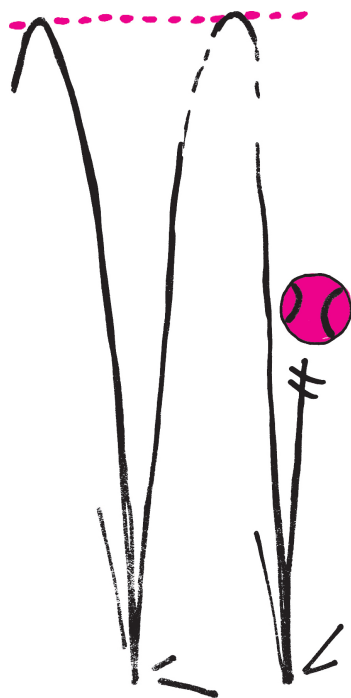
Nie wszystkim jednak podobała się idea absolutnego determinizmu. Świat, w którym jest miejsce dla demona Laplace'a, podąża jedyną możliwą trajektorią wyznaczoną przez deterministyczne prawa. Realizuje się tylko jedna możliwa historia. Czy w takim świecie jest miejsce dla istoty obdarzonej wolną wolą? Dla niektórych idee klasycznego determinizmu i wolnej woli są nie do pogodzenia, bo skoro cała przyszłość jest jednoznacznie zdeterminowana i możliwa do przewidzenia, to i wynik każdego naszego życiowego wyboru można zawczasu obliczyć. Gdzie tu miejsce na akt woli? Sprzeczność ta nie dla wszystkich jest jednak oczywista, zależy to bowiem od tego, co sobie ktoś wyobraża pod pojęciem wolnej woli, bo o ile pojęcie klasycznego determinizmu jest dosyć jednoznacznie zdefiniowane, to pojęcie wolnej woli może wywoływać różne skojarzenia.

Jeżeli mamy układ podlegający ściśle deterministycznym prawom, który potrafimy w laboratorium przygotować w powtarzalny sposób, za każdym razem w tym samym stanie, to on za każdym razem zachowa się tak samo. Jeżeli, na przykład, będziemy identyczne piłeczki pingpongowe upuszczać z tej samej



wysokości w tym samym polu grawitacyjnym na podłogę, która ma za każdym razem te same własności elastyczne, i powietrze będzie miało zawsze ten sam skład, ciśnienie i temperaturę, to piłeczka po odbiciu wzleci zawsze na tę samą wysokość. Tak działa klasyczny determinizm.

Nie da się takich całkowicie powtarzalnych eksperymentów przeprowadzać na układach fizycznych, które podejrzewamy o posiadanie wolnej woli, ponieważ układy te zwykle mają również pamięć, dlatego każdy kolejny eksperyment jest przeprowadzany na układzie bogatszym, chociażby o doświadczenie poprzedniego eksperymentu. Gdy zapytamy dwa razy licealistę, którą z dwóch, znanych tylko z widzenia koleżanek, chętniej zaprosiłby do znajomych na portalu społecznościowym, to możemy uzyskać dwie sprzeczne odpowiedzi. Czasem wystarczy skwitować pierwszą odpowiedź dezaprobującym grymasem twarzy, żeby, pytając drugi raz, uzyskać przeciwstawną odpowiedź. Wyobraźmy sobie jednak następujący eksperyment myślowy – uwspółcześioną wersję demona Laplace’a, czyli mogącego zapisać stan wszechświata w jakiejś chwili (tak jak w grach komputerowych „zasejwować”) i następnie wczytywać i puszczać wielokrotnie od tej zapisanej chwili. Demon wykona eksperyment na naszym licealiście. Wyobraźmy sobie, że naszemu królikowi doświadczalnemu wpadły w oko dwie koleżanki z innej klasy i waha się, którą zaczepić, aż wreszcie któregoś wieczoru rozdarty wewnętrznie młodzieniec decyduje się zaprosić do znajomych na portalu społecznościowym jedną z nich. Znajomość się rozwija, po latach jest ślub, dzieci, wnuki itp. Załóżmy teraz, że demon zapisał stan całego wszechświata, np. w przeddzień podjęcia decyzji przez licealistę, wczytuje ten stan i puszcza historię w ruch jeszcze raz, a nawet wiele razy. Oczywiście, według poglądu Laplace’a historia potoczy się za każdym razem tak samo. Czy jeżeli jednak licealista podejmie za każdym razem tę samą decyzję, będzie to oznaczało, że decyzja ta nie była „wolna”?



Klasyczny prosty przykład chaotycznej dynamiki stanowi układ dyskretny oparty na odwzorowaniu logistycznym, danym wzorem $f(x) = k \cdot x \cdot (1 - x)$, dla $k \in [0, 4]$ przekształcającym przedział $[0, 1]$ w siebie. Warunkiem początkowym jest liczba $x_0 \in [0, 1]$. Trajektorię układu stanowi ciąg zadany rekurencyjnie $x_{n+1} = f(x_n)$. Tak zdefiniowany układ dynamiczny przejawia zasadniczo różne zachowania w zależności od wartości parametru k . Dla $k \in [0, 3]$ wszystkie ciągi, niezależnie od wartości x_0 dążą do tej samej granicy (zależnej jedynie od k). Dla $k > 3$ dynamika się komplikuje i w pewnych zakresach staje się chaotyczna. W szczególności np. jest chaotyczna dla $k = 4$, co przejawia się, między innymi, tym, że jeżeli wybierzemy dwie dowolnie bliskie wartości początkowe, np. $x_0 = 0,3$ oraz $y_0 = 0,300001$, to ciągi, które z nich powstaną, będą się niewiele początkowo różniły, ale od pewnego miejsca zupełnie się rozjadą. W szczególności mamy $x_{10} = 0,043422$, $y_{10} = 0,042968$, czyli różnica jest wciąż stosunkowo niewielka, ale już $x_{20} = 0,941785$, $y_{20} = 0,033125$ i tutaj różnica jest już znaczna. Gdybyśmy wzięli wartości początkowe różniące się jeszcze mniej niż $0,000001$, to być może trajektorie pozostawałyby do siebie zbliżone przez większą liczbę iteracji, ale i tak prędzej czy później się rozjadą.

Pisaliśmy o tym m.in. w *Delcie* 10/2010.

Zachęcam Cię, Czytelniku, do poeksperymentowania z tym odwzorowaniem. Jest to bardzo pouczająca zabawa.

Laplace przedstawił swoją koncepcję w czasach, kiedy mechanika klasyczna stanowiła trzon fizyki, a jej sformułowanie było jednym z najważniejszych przełomów w historii nauki, z czego zapewne zdawał sobie sprawę. Trudno się zatem dziwić, że on i jemu współcześni ulegli pokusie przyjęcia przekonania, że oto dotarli do pewnej ostatecznej prawdy o świecie. Laplace nie mógł oczywiście wiedzieć, jakie kolejne przełomowe odkrycia po mechanice klasycznej przyniesie przyszłość i że odkrycia te spowodują odesłanie jego koncepcji do lamusa.

Jakie odkrycia przyczyniły się do unicestwienia demona Laplace’a? Zanim zajmiemy się tym, które zadało mu decydujący cios, przyjrzymy się odkryciu, które znacznie jego demoniczną moc osłabiło. W XX wieku stwierdzono, że *determinizm* i *przewidywalność* to nie to samo. Odkryto *chaos deterministyczny*. Okazuje się, że nawet jeśli prawa opisujące dany układ są deterministyczne, to w pewnych sytuacjach ściśle przewidzenie zachowania układu jest praktycznie niemożliwe. Jedną z manifestacji chaosu jest duża wrażliwość zachowania układu chaotycznego na dowolnie małe zmiany stanu początkowego. Jeżeli mamy dwie kopie takiego układu, które w chwili początkowej różnią się dowolnie mało, ale nie są dokładnie takie same, to ich ewolucja przebiega w taki sposób, że różnice między nimi bardzo szybko rosną i po pewnym czasie dwie kopie układu zachowują się w sposób zupełnie niepodobny. Ponieważ rzeczywiste pomiary wykonuje się zawsze z pewną skończoną dokładnością, to w praktyce nigdy nie znamy początkowego stanu układu dokładnie. W konsekwencji, nawet jeżeli znamy ściśle deterministyczne prawa, którym podlega nasz układ, to nie będziemy w stanie przewidzieć zachowania się układu w długiej perspektywie czasowej, właśnie dlatego, że nie wiemy dokładnie, do którego ze stanów początkowych mieszczących się w ramach naszej niepewności pomiarowej te prawa zastosować.

Opisane zjawisko oznacza, że jest niezwykle istotne, w jaki sposób nasz demon zapisuje stan wszechświata. Jeżeli zapisując, dokonuje jakichś przybliżeń, np. zaokrągla liczby, używając liczb binarnych o skończonej precyzji, tak jak to się robi standardowo w pamięci komputera, to może się okazać, że po wczytaniu tych danych i puszczeniu historii od nowa, potoczy się ona inaczej, nawet jeżeli

jest ściśle deterministyczna. Zresztą w taki, mniej więcej, sposób ta własność układów chaotycznych została odkryta. Edward Lorenz w 1961 r. badał własności pewnego układu trzech równań różniczkowych zwyczajnych, który stał się potem bardzo znany i nosi dziś jego nazwisko. Znajdował rozwiązania tego układu na komputerze. Pewnego razu powtórzył numeryczną procedurę dla, jak sądził, tego samego zestawu danych początkowych, w celu sprawdzenia poprawności metod numerycznych. Rozwiązania znalezione przez komputer początkowo się pokrywały, ale po pewnym czasie zaczęły się rozjeżdżać, aż wreszcie stały się zupełnie niepodobne. Lorenz w pierwszej chwili zinterpretował te wyniki jako skutek błędu, ale szybko zrozumiał, że żadnej pomyłki nie było. Okazało się, że powtarzając obliczenia, jako stan początkowy wprowadził liczby, które były zaokrągleniem do części tysięcznych liczb, które pierwotnie były w pamięci komputera zapisane z dokładnością do 6 cyfr po przecinku. Ta drobna różnica w danych początkowych okazała się mieć kluczowe znaczenie.

Edward Lorenz zajmował się modelowaniem procesów zachodzących w atmosferze, czyli meteorologią. Atmosfera ziemską jest właśnie przykładem układu chaotycznego, którego zachowania w dłuższej perspektywie czasowej nie da się przewidzieć. Dlatego możemy dokładnie obliczyć, o której godzinie zacznie się zaćmienie 7 października 2135 roku, ale absolutnie niemożliwe jest dziś przewidzenie, czy w podziwianiu tego pięknego widowiska nie przeszkadzają nam chmury.

Może jednak, gdyby nasz demon znał aktualny stan wszechświata z nieskończoną dokładnością, to byłby w stanie przewidzieć dokładnie całą jego przyszłość (wliczając w to np. pogodę za 120 lat)? Niestety, nie. Według naszej obecnej wiedzy o wszechświecie nie ma w nim miejsca dla demona Laplace'a.

Decydującego argumentu przeciwko demonowi dostarcza mechanika kwantowa. Teoria ta przewiduje istnienie w przyrodzie zjawisk czysto losowych. Rozważmy prosty przykład i wyobraźmy sobie nietrwałe jądro atomowe (np. jądro uranu, czyli pierwiastka naturalnie występującego w skorupie ziemskiej). Nietrwałość oznacza, że jądro to ulega *spontanicznemu* rozpadowi promieniotwórczemu, w wyniku którego powstaje inne jądro i emitowane są jakieś cząstki. *Spontaniczność* rozpadu oznacza, że konkretna chwila, w której on nastąpi, nie jest w żaden sposób określona. Określone jest *prawdopodobieństwo na jednostkę czasu* zajścia takiego rozpadu, które wyznacza się, obserwując duże próbki takich pierwiastków. Mając, na przykład, kilogram atomów takiego pierwiastka, możemy zmierzyć, po jakim czasie zostanie połowa początkowej liczby atomów. Jest to *czas połowicznego zaniku*, czyli parametr różny dla różnych pierwiastków, określający statystyczne własności dużych próbek, pozwalający wyznaczyć wspomniane prawdopodobieństwo rozpadu na jednostkę czasu. Możemy więc określić, po jakim czasie jaka część naszej próbki ulegnie rozpadowi, ale nie da się określić, które konkretnie jądra z próbki się rozpadną. Oznacza to, że gdyby nasz demon zapisywał stan wszechświata w jakiejś chwili i wybrał sobie do obserwacji jakieś konkretne nietrwałe jądro, to puszczając historię od tej chwili, mógłby za każdym razem zaobserwować inny czas, po jakim jądro się rozpadło. Mechanika kwantowa pozwala jedynie ściśle przewidzieć, do jakiego rozkładu będzie dążył rozkład wyników tych pomiarów, jeżeli wykonamy takich eksperymentów bardzo wiele. Teoria chaosu nauczyła nas już, że drobne zmiany w układzie w jakiejś chwili mogą przełożyć się na ogromne zmiany za jakiś czas. Więc istnienie losowych procesów nawet na poziomie mikroskopowym powoduje, że historia Wszechświata zapisanego przez demona w jakiejś chwili i puszczana wielokrotnie od nowa od tego momentu może przebiec za każdym razem inaczej.

Przeciwko takiej probabilistycznej interpretacji mechaniki kwantowej protestował Albert Einstein we wspomnianym liście. Próbą ratowania determinizmu były teorie *parametrów ukrytych*. Pomysł był taki, że mechanika kwantowa jest niepełną teorią, a prawa, które ściśle determinują wszystkie pozornie losowe procesy, takie jak rozpady promieniotwórcze, są przed nami na razie ukryte. Gdyby nasz demon znał wartości tych ukrytych parametrów, to wiedziałby, kiedy



Rozwiązanie zadania F 883.

Częstotliwość fotonów emitowanych przez spoczywający atom wodoru i, podobnie, deuteru jest proporcjonalna do iloczynu masy zredukowanej układu elektron-jądro, μ . Masa zredukowana układu elektron-jądro o masie M wynosi

$$\mu = \frac{m_e M}{m_e + M}.$$

Wynika stąd, że wszystkie częstotliwości widma deuteru są A razy większe od częstotliwości występujących w widmie wodoru:

$$A = \left(1 + \frac{m_e}{m_p}\right) / \left(1 + \frac{m_d}{m_p}\right).$$

Po podstawieniu wartości mas otrzymujemy $A = 1,0002723$, a więc wartość bardzo bliską 1. Gdyby zinterpretować wzrost obserwowanych częstotliwości o czynnik A jako skutek zjawiska Dopplera (postępowego ruchu atomu z prędkością v), to A powinno być równe $1 + v/c$, gdzie c jest prędkością światła, i dla $A = 1,0002723$ otrzymujemy wartość $v = 81,7$ km/s, odpowiadającą ruchowi atomu wodoru w kierunku obserwatora (taka prędkość średnia atomu wodoru odpowiada temperaturze ok. $2,7 \cdot 10^5$ K).

Więcej o nierównościach Bella można przeczytać w *Delcie* 5/2001 w artykule Andrzeja Dragana *A może jednak ukryty determinizm?*

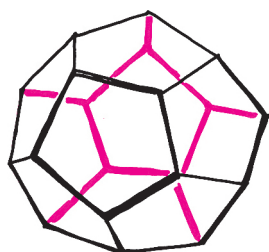
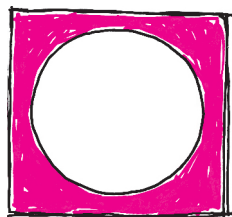
które jądro się rozpadnie. Okazało się, że hipoteza istnienia parametrów ukrytych daje się testować doświadczalnie, dzięki twierdzeniu udowodnionemu w 1964 roku, znanemu jako *nierówności Bella*. Twierdzenie to mówi, że jeżeli wyniki pewnych pomiarów byłyby determinowane przez jakieś ukryte parametry, to częstości występowania tych wyników spełniałyby pewne nierówności. Mechanika kwantowa przewiduje łamanie tych nierówności. W wielu przeprowadzonych eksperymentach wykazano, że rzeczywiste układy fizyczne zachowują się zgodnie z przewidywaniami mechaniki kwantowej, łamiąc nierówności Bella.

Musimy się więc pogodzić z tym, że w przyrodzie występują pewne niedeterministyczne procesy, których losowość nie jest odzwierciedleniem naszej niepełnej wiedzy o układzie, ale jest ich wewnętrzną, nieusuwalną cechą. Świat nie jest całkowicie deterministyczny. Hipoteza Laplace'a okazała się zbyt daleko idąca. Czy uratowaliśmy zatem wolną wolę? Czy zastąpienie czystego determinizmu determinizmem z domieszką czystego przypadku kogoś pociesza?

Na czym stoi matematyka?

Wiktor BARTOL

Matematyka bardzo się w XIX wieku zmieniła. Algebra, badająca dotąd przede wszystkim metody rozwiązywania równań wielomianowych, dzięki pracom Evariste'a Galois, George'a Boole'a i innych wytworzyła struktury abstrakcyjne: grupy, pierścienie, algebry Boole'a, oderwane od obliczeń liczbowych, reprezentujące za to pewne ogólne własności działań (na dowolnych obiektach). Geometria utraciła euklidesową jednoznaczność, odnajdując się w światach dotąd nieznanymi i nieprzewidywanymi, zwanych geometriami nieeuklidesowymi. Analiza, nabierając coraz bardziej potrzebnej ścisłości, wyszła poza granice intuicji, uwzględniając szerszy repertuar funkcji (niegdys uważanych za ciągle z definicji) i dopuszczając zaskakujące konstrukcje, jak choćby funkcje wszędzie ciągłe i nigdzie nieróżniczkowalne. I wreszcie w drugiej połowie XIX wieku badania Georga Cantora nad reprezentacjami funkcji za pomocą szeregów doprowadziły do otwarcia matematycznych drzwi dla starannie dotąd omijanej nieskończoności aktualnej, nieskończoności „istniejącej”, danej w całości – w odróżnieniu od potencjalnej, czyli takiej, która oznacza jedynie możliwość nieograniczonego powiększania zbioru. Cantor pokazał, że można sensownie porównywać wielkości zbiorów nieskończonych, operować nimi tak, jakby były dobrze określonymi obiektami matematycznymi.



Niestety, okazało się, że pojęcie zbioru (w szczególności nieskończonego) dobrze określone nie było. Bertrand Russell wskazał na sprzeczność wyrosłą z nieprecyzyjnego rozumienia zbioru. Istotnie, jeśli możemy dowolnie tworzyć zbiory, to w szczególności możemy utworzyć zbiór Z wszystkich tych zbiorów, które nie są swoimi własnymi elementami. Inaczej mówiąc, $Z = \{X : X \notin X\}$. Próba odpowiedzi na pytanie, czy $Z \in Z$, jak nietrudno stwierdzić, prowadzi do sprzeczności. Nieco wcześniej, pod koniec XIX wieku, Cesare Burali-Forti pokazał, że nie istnieje, że nie można utworzyć zbioru wszystkich liczb porządkowych. Sprzeczności tego rodzaju pojawiły się także w logice. Czy zatem swoboda używania nader abstrakcyjnych pojęć, w tym nieskończoności aktualnej, powinna być matematykom odebrana?

Zagrożenie pojawieniem się sprzeczności wywołało różne reakcje w środowisku matematycznym. Leopold Kronecker zaproponował, by za fundament matematyki przyjąć liczby naturalne, unikając w ten sposób wszystkiego, czego nie da się z nich wyprowadzić. Wielu matematyków gotowych było zrezygnować z tej części matematyki, która dopuszczała zbiory aktualnie nieskończone, a nawet ze wszystkiego, czego nie dawało się konstruktywnie pokazać (nie tylko *wykazać*). Intuicjoniści, jak określa się zwolenników jednej z takich konstruktywistycznych filozofii, nie uznawali tzw. prawa wyłączonego środka,

czyli uznawali zdanie „ a lub nie a ” za prawdziwe wtedy, gdy udowodniło się a lub udowodniło *nie* a ; o porównywaniu zbiorów nieskończonych nie było mowy. Przyjęcie takiego punktu widzenia oznaczałoby utratę wielu ważnych twierdzeń.

David Hilbert, wybitny niemiecki matematyk przełomu wieków XIX i XX, autor przedstawionych w 1900 roku na II Międzynarodowym Kongresie Matematyków 23 problemów, które miały wytyczyć kierunki rozwoju matematyki w XX wieku, nie godził się z takim okrojeniem matematyki. Zaproponował sposób działania, który mógłby przeciąć wszelkie wątpliwości, a jednocześnie pozwoliłby pozostać w, jak to określił, „raju Cantora”, czyli w świecie bezpiecznej nieskończoności.

Na czym polegał ten sposób, nazwany programem Hilberta? Przede wszystkim na uczynieniu z teorii matematycznych przedmiotu badań, w efekcie których można byłoby udowodnić kilka pożądaných ich cech, przede wszystkim *niesprzeczność* i *zupełność*. Teoria jest niesprzeczna, gdy nie istnieje takie zdanie α , że i α , i negacja α są twierdzeniami teorii (równoważnie, gdy istnieje zdanie niemające dowodu). Teoria jest zupełna, gdy każde zdanie prawdziwe w dowolnym modelu teorii jest jej twierdzeniem, a więc istnieje dla niego dowód wychodzący od aksjomatów (równoważnie, gdy dla każdego zdania α jest tak, że albo α , albo negacja α jest twierdzeniem tej teorii).

Pierwszym krokiem do badania teorii matematycznej jest jej sformalizowanie, a więc: określenie zbiorów symboli reprezentujących obiekty, którymi teoria ma się zajmować, symboli logicznych, symboli reprezentujących działania na obiektach i relacje między nimi, ścisła identyfikacja uznawanych za poprawne wyrażen zapisanych za pomocą tych symboli, wybór niektórych wyrażen i uznanie ich za niezbędny początek każdego dowodu (aksjomaty) oraz dokładny opis reguł przetwarzania wyrażen (reguły wnioskowania). Oczywiście, samo pojęcie dowodu musi być równie ściśle zdefiniowane jako pewien ciąg wyrażen, w którym każde jest albo aksjomatem, albo jest skutkiem zastosowania reguły wnioskowania do wcześniejszych wyrażen.

Do tak sformalizowanej teorii można zastosować metody matematyczne i wykazać owe dobre własności. Hilbert pisał o metodach „finitystycznych”, nie precyzując dokładnie znaczenia tego terminu; chodziło o metody wymagające „skończenie wielu kroków”. Od takich metod należałoby wymagać *zachowawczości*, co oznacza, że gdy zredukujemy je do zbiorów skończonych – choć obejmować mają wszystkie – to tak uzyskane wnioski będą zgodne z tym, co o zbiorach skończonych już wiemy.

Próbę takiej konstrukcji matematyki podjęli Bertrand Russell i Alfred North Whitehead w publikowanym w latach 1910–1913 (choć niedokończonym) dziele *Principia Mathematica*. Cóż... Kilkanaście lat później, w 1931 roku, ukazała się praca Kurta Friedricha Gödla *Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I* (O formalnie nierozstrzygalnych zdaniach *Principia Mathematica* i podobnych systemów I). Gödel udowodnił w niej m.in. dwa kluczowe dla sprawy twierdzenia. Po pierwsze, dla każdej dostatecznie bogatej (dokładniej, takiej, w której można wyrazić arytmetykę liczb naturalnych) niesprzecznej teorii matematycznej istnieje zdanie α , takie że ani α , ani negacja α nie jest twierdzeniem tej teorii. Inaczej mówiąc, nie można w takich przypadkach osiągnąć zupełności. A po drugie – wniosek z pierwszego twierdzenia – metodami takiej teorii nie można udowodnić jej niesprzeczności. Innymi słowy, aby udowodnić niesprzeczność pewnej teorii, trzeba wyjść poza nią i użyć środków teorii bogatszej. Skąd jednak pewność, że bogatsza teoria jest niesprzeczna? Trzeba jeszcze bogatszej teorii... Matematyka funkcjonuje zatem w warunkach, które można określić jako niesprzeczność warunkowa.

Program Hilberta pozostał więc nierealizowalną mrzonką. Trudno jednak obarczać Davida Hilberta winą za to niepowodzenie. Jego oczekiwania wydawały się tak naturalne... A matematyka wzbogaciła się o dwie nowe dyscypliny: metamatematykę i teorię dowodu, a także o twierdzenia Gödla, które można z pewną swobodą językową określić jako „kultowe”.



Rozwiązanie zadania F 884.

Zamiana jąder atomów cząsteczki na jądra ich cięższych izotopów praktycznie nie zmienia stanów elektronowych (patrz rozwiązanie zadania 883), tym samym zarówno odległość równowagowa R jąder atomowych, jak i energia wiązania cząsteczki nie ulegną zmianie. Zależność energii wiązania U od odległości r atomów ma więc dla niewielkich wychyleń z położenia równowagi postać:

$$U(r) = \frac{1}{2}k(r - R)^2$$

z takimi samymi wartościami k i R . Częstota charakterystyczna ω takiego układu odpowiada zatem częstoci drgań mas m_C i m_O , o masie zredukowanej $u = m_C m_O / (m_C + m_O)$, połączonych „sprężyną” o stałej sprężystości k . Mamy więc $\omega^2 = k/u$. Z kolei stała B , jak w mechanice klasycznej, jest proporcjonalna do odwrotności momentu bezwładności obu mas obiegających wspólny środek ciężkości, a więc B jest odwrotnie proporcjonalne do μR^2 . Oznaczając literami primowanymi odpowiednie wartości dla cząsteczki cięższej, a bez znaku prim dla lżejszej, otrzymujemy:

$$\frac{\mu'}{\mu} = \frac{14 \cdot 18(12 + 16)}{12 \cdot 16(14 + 18)} = 1,148,$$

a więc:

$$\frac{\lambda'_R}{\lambda_R} = \frac{\mu'}{\mu} = 1,148$$

oraz

$$\frac{\lambda'_V}{\lambda_V} = \sqrt{\frac{\mu'}{\mu}} = 1,072.$$

Burzliwe początki cyfrowego tysiąclecia

Tomasz IDZIASZEK



Rozpoczynając na początku lat 80. XX wieku studia doktoranckie na Uniwersytecie w Erlangen, Karlheinz Brandenburg raczej nie przypuszczał, że wyniki jego pracy przyczynią się do zrewolucjonizowania branży muzycznej na całym świecie. A zaczęło się od tego, że jego promotor, profesor Dieter Seitzer, rozważał zagadnienie przesyłania muzyki liniami telefonicznymi. Ze względu na znaczne pogorszenie jakości dźwięku analogowy przesył nie wchodził w grę, należało więc użyć technologii ISDN (*Integrated Services for Digital Network*) umożliwiającej jednoczesne przesyłanie tymi liniami sygnału cyfrowego (co w niedalekiej przyszłości wykorzystano do dostarczenia Internetu do masowego odbiorcy). Problemem była zbyt mała przepustowość tego kanału wynosząca 128 kb/s (kilobitów na sekundę). Świeżo wypromowany standard płyty kompaktowej opisywał kodowanie dźwięku, w którym na jedną minutę potrzebne jest około 10 MB (pisaliśmy o tym w *Delcie* 10/2011), zatem wymagana przepustowość wynosiła 1411,2 kb/s, czyli nieco ponad 11 razy więcej niż umożliwiała ISDN. Próbując opatentować swój pomysł, Seitzer został odesłany z kwitkiem z biura patentowego, gdyż „nie patentuje się rzeczy niemożliwych”.

Brandenburg, próbując zrealizować wizję Seitzera, postanowił zmniejszyć ilość danych potrzebnych do zapisu dźwięku, czyli dokonać jego *kompresji*. Niestety, metody kompresji bezstratnej (które redukują liczbę bitów potrzebną do przesłania redundantnych informacji, ale w taki sposób, że nadal jest możliwe wierne odtworzenie pierwotnych danych) nie za dużo mogą pomóc w przypadku cyfrowej muzyki (średnio można przyjąć, że pozwalają zmniejszyć rozmiar danych o połowę). Potrzebna była *kompresja stratna*, polegająca na usunięciu części informacji, ale w taki sposób, by zostało to niezauważone przez odbiorcę.

Aby podjąć decyzję, które dane mogą być usunięte, Brandenburg skorzystał z *modelu psychoakustycznego*, który opisuje, jak działają uszy i mózg w odbieraniu dźwięku. Przykładowo, choć człowiek słyszy dźwięki w zakresie



Zadania

Redaguje Tomasz TKOCZ

M 1462. Na płaszczyźnie dany jest zbiór punktów S . Mówimy, że punkt P jest widoczny z punktu A , jeśli odcinek AP jest zawarty w S . Zbiór S jest widoczny z punktu A , jeśli każdy jego punkt jest widoczny z A .

Wykazać, że zbiór S jest widoczny z każdego punktu trójkąta ABC , jeśli jest widoczny z każdego wierzchołka tego trójkąta.

Rozwiązanie na str. 8

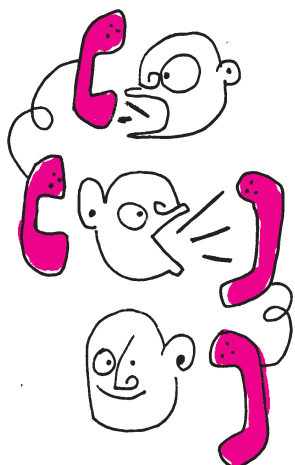
M 1463. Udowodnić, że dla liczby całkowitej dodatniej n oraz liczb rzeczywistych x, y spełniających $x + y = 1$, prawdziwa jest tożsamość

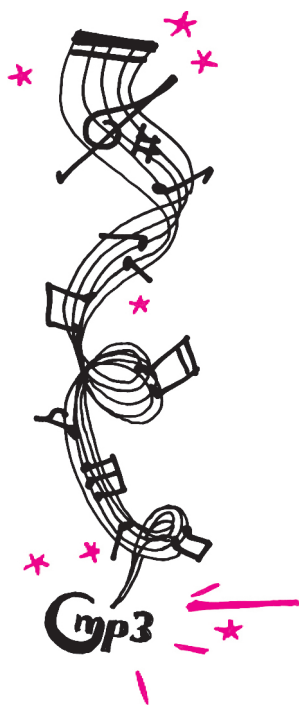
$$x^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} y^k + y^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} x^k = 1.$$

Rozwiązanie na str. 9

M 1464. Każda spośród n osób zna dokładnie jedną wiadomość i każda z tych n wiadomości jest inna. Co jakiś czas pewna osoba dzwoni do innej i przekazuje jej wszystko, co wie (nie poznając żadnej informacji w zamian). Ile co najmniej rozmów telefonicznych musi się odbyć, zanim wszystkie osoby będą znać wszystkie informacje?

Rozwiązanie na str. 11





od 12 Hz do 20 kHz, to maksymalna czułość występuje w zakresie od 2 kHz do 4 kHz. Zatem można rozdzielić sygnał dźwiękowy na kilka pasm obejmujących różne zakresy częstotliwości i zakodować z mniejszą dokładnością pasma odbierane przez ludzkie ucho z mniejszą czułością. Model opisuje też zjawisko *maskowania*, które polega na tym, że głośnie dźwięk potrafi zagłuszyć cichsze dźwięki o podobnej częstotliwości, a także cichsze dźwięki, które występują zaraz po nim lub tuż przed nim. Dzięki temu te cichsze dźwięki również można zapisać, używając mniejszej liczby bitów.

W 1988 roku powołano międzynarodową grupę standaryzacyjną MPEG (*Moving Picture Experts Group*) zrzeszającą inżynierów z różnych ośrodków naukowych, których celem było wypracowanie algorytmów kompresji obrazu i dźwięku. W ramach jednego z jej zespołów kontynuował swe badania Brandenburg. W wywiadach przywołuje on różne anegdoty z tego okresu, jak choćby to, że dobierając parametry algorytmu kompresji, przesłuchał niemal tysiąc razy piosenkę Suzanne Vega *Tom's Dinner*, lub to, że kolejne nieudane próby zaimplementowania teoretycznie poprawnego algorytmu spowodowane były błędem w używanym przez niego kompilatorze. Ostatecznie prace zespołu zaowocowały przyjętym trzy lata później standardem kompresji dźwięku nazwanym oficjalnie MPEG-1 Audio Layer III, który urzeczywistnił marzenie Seitzera, gdyż umożliwił kompresję dźwięku z przepustowością 128 kb/s bez znacznego pogorszenia jego jakości.

Początkowo opracowany standard nie przyjął się w przemyśle jako zbyt skomplikowany i wymagający zbyt dużej mocy obliczeniowej, jak na możliwości ówczesnego sprzętu (do użytku wszedł prostszy standard MPEG-1 Audio Layer II, aktualnie nadal stosowany do przesyłu audycji radia cyfrowego). Ale gdy w 1997 roku firma Intel wypuściła na rynek procesor Pentium MMX, komputery osobiste stały się wystarczająco silne, by podołać zadaniu kompresji. Jedną z decyzji, które musieli podjąć koledzy Brandenburga, było przyjęcie trzyliterowego rozszerzenia plików, w których zapisywane byłyby dane zakodowane ich algorytmem. Tak narodził się, dziś znany chyba wszystkim użytkownikom komputerów, skrót *MP3*.



Zadania

Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 883. Linie widma promieniowania elektromagnetycznego wysyłanego przez atomy deuteru są nieznacznie przesunięte w stosunku do analogicznych linii emitowanych przez standardowy wodór (z protonem jako jądrem atomu). Jaką prędkość v ruchu przypisze atomowi astronom, jeśli badał widmo spoczywającego deuteru w przekonaniu, że to wodór? Masa elektronu $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$, masa protonu $m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$, masa deuteronu (jądra deuteru) $m_d = 1876 \text{ MeV}/c^2$, a prędkość światła $c = 3 \cdot 10^5 \text{ km/s}$.

Rozwiązanie na str. 3



F 884. Cząsteczki chemiczne poza ruchem postępowym wykonują także oscylacje i rotacje. Energie wzbudzeń oscylacyjnych i rotacyjnych zależą od składu atomowego i stanu elektronów. Dla cząsteczki dwuatomowej energie oscylacji wynoszą $E_V = \hbar\omega(\nu + 1/2)$, gdzie liczba $\nu = 0, 1, 2, 3, \dots$ numeruje kolejne stany oscylacyjne, a energie stanów rotacyjnych to $E_R = BJ(J + 1)$, dla $J = 0, 1, 2, 3, \dots$, $\hbar = h/2\pi$, zaś h oznacza stałą Plancka. Wielkość B nazywa się stałą rotacyjną cząsteczki w danym stanie atomowym. Dla cząsteczki tlenu węgla $^{12}\text{C}^{16}\text{O}$ w stanie podstawowym powłok elektronowych odpowiednie stałe wynoszą: $\omega = 2169,8 \text{ hc/cm}$, $B = 1,931 \text{ hc/cm}$, gdzie c oznacza prędkość światła. Odległość równowagowa jąder węgla i tlenu wynosi $R = 1,128 \cdot 10^{-8} \text{ cm}$. Jakiej zmianie ulegnie widmo promieniowania, gdy zamienimy atomy węgla i tlenu na ich cięższe izotopy, otrzymując cząsteczkę $^{14}\text{C}^{18}\text{O}$?

Rozwiązanie na str. 5

Również w 1997 roku zadebiutował program Winamp, który umożliwiał odtwarzanie plików zapisanych w tym standardzie, a same pliki można było znajdować w Internecie za pośrednictwem strony mp3.com. Początkowo naukowcy chcieli zarobić na swoim wynalazku, sprzedając kosztowną licencję na oprogramowanie kompresujące dźwięk, a jednocześnie ułatwić powstawanie oprogramowania dekodującego. Szybko się jednak okazało, że taki model biznesowy się zupełnie nie sprawdzi, gdyż w Internecie pojawiło się darmowe oprogramowanie kompresujące. Spowodowało to lawinowy wzrost liczby plików MP3. W 1999 roku powstał serwis Napster, który umożliwiał wyszukiwanie i wymienianie się plikami MP3 bezpośrednio między komputerami użytkowników (*peer-to-peer file sharing*). Popyt na „darmową” muzykę z komputera był tak duży, że w pewnym momencie fraza „mp3” była najczęściej wyszukiwanym hasłem w Internecie.

Na odpowiedź branży muzycznej nie trzeba było długo czekać. Na właścicieli Napstera i podobnych witryn internetowych, które pojawiały się jak grzyby po deszczu, posypały się pozwy o naruszenie praw autorskich, a konkretnie dopiero co przegłosowanej amerykańskiej ustawy DMCA (*Digital Millennium Copyright Act*). W zasadzie do dziś działalność organizacji takich jak RIAA (*Recording Industry Association of America*) na polu muzyki w Internecie zdaje się ograniczać do pozywania autorów i indywidualnych użytkowników programów do wymiany plików oraz publikowania mało wiarygodnych raportów dokumentujących rzekome straty branży muzycznej spowodowane tą wymianą.

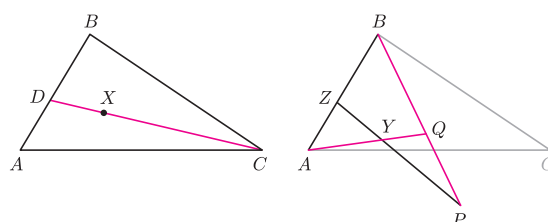
Pierwszy sklep internetowy, w którym można było legalnie zakupić pliki z cyfrową muzyką, został otworzony przez firmę Apple dopiero w 2003 roku, a to też tylko dzięki determinacji Steve'a Jobsa. Niestety, sprzedawane tam pliki były zabezpieczone mechanizmami DRM (*Digital Rights Management*), które w teorii miały przeciwdziałać odtwarzaniu plików na nieuprawnionych urządzeniach (a zatem ukrócić udostępnianie ich w Internecie), a w praktyce sprawiają jedynie kłopot legalnym nabywcom.

Mechanizmy DRM są krytykowane za to, że pod pretekstem ochrony praw autorskich ograniczają one uprawnienia nabywcy (np. te powszechnie stosowane w filmach na płytach DVD i Blu-ray uniemożliwiają wykonanie kopii zapasowej, odtworzenie filmu na sprzęcie pochodzącym z innego regionu geograficznego czy pominięcie reklam). Czasem mogą też działać na szkodę nabywcy, jak to miało miejsce w głośnej sprawie płyt kompaktowych produkowanych przez firmę Sony, które instalowały na komputerach użytkowników niebezpieczne oprogramowanie. A w świetle ustawy DMCA tworzenie i rozpowszechnianie programów, służących obchodzeniu tych mechanizmów (nieważne jak uciążliwe lub szkodliwe by one były) także jest niezgodne z prawem.

Dopóki więc muzyka lub film „ściągnięte za darmo” z Internetu będą mniej problematyczne w obsłudze od legalnie zakupionych egzemplarzy, nie ma co liczyć na zmianę przyzwyczajęń internautów, którzy nieskrępowany dostęp do cyfrowych treści, zapoczątkowany przez upowszechnienie się formatu MP3, uważają dziś za coś naturalnego.

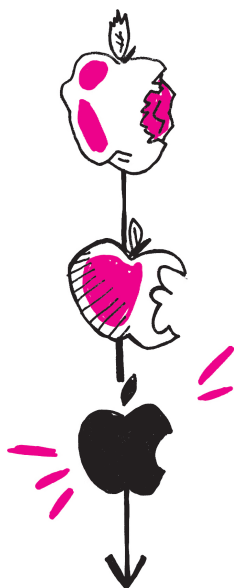


Rozwiązanie zadania M 1462.
Pokażemy, że jeśli S jest widoczny z A i B , to jest widoczny z każdego punktu odcinka AB . To wystarczy, bowiem dowolny punkt X z trójkąta ABC leży na pewnym odcinku CD , dla pewnego D z odcinka AB .



Ustalmy punkt Z na odcinku AB i weźmy dowolny punkt P z S . Chcemy wykazać, że odcinek ZP leży w S . Niech Y będzie dowolnym punktem na odcinku ZP .
Ponieważ S widać z B , to każdy punkt odcinka BP leży w S , w szczególności Q – punkt przecięcia odcinka BP z prostą AY . Ponieważ S widać też z A , to każdy punkt odcinka AQ należy do S , w szczególności punkt Y .

O zaskakującym podobieństwie szympanсів zwyczajnych (*Pan troglodytes*) i bonobo (*Pan paniscus*) do *Homo sapiens sapiens* w dziedzinach naturalnie przypisywanych tylko naszemu rodzajowi (empatii, abstrakcyjnego myślenia i uczuć, moralności, świadomości śmierci, metod przekazywania tradycji) pisze Frans de Waal w doskonałej książce „Bonobo i ateista” (recenzja w *Delcie* 2/2015).



Rozwiązanie zadania M 1463.

Załóżmy najpierw, że $x \in [0, 1]$ i rozważmy doświadczenie losowe polegające na rzucaniu monetą tak długo, dopóki $n + 1$ razy wypadnie orzeł lub $n + 1$ razy reszka. Prawdopodobieństwo wypadnięcia orła w pojedynczym rzucie wynosi x , zaś reszki $1 - x = y$. Zauważmy, że prawdopodobieństwo tego, że doświadczenie zakończy się w rzucie $n + k + 1$ (dla $k = 0, \dots, n$) z powodu wypadnięcia $n + 1$ orłów wynosi $\binom{n+k}{k} x^{n+1} y^k$, a z powodu wypadnięcia $n + 1$ reszek $-\binom{n+k}{k} x^k y^{n+1}$. Sumując prawdopodobieństwa poszczególnych możliwości zakończenia doświadczenia, otrzymujemy

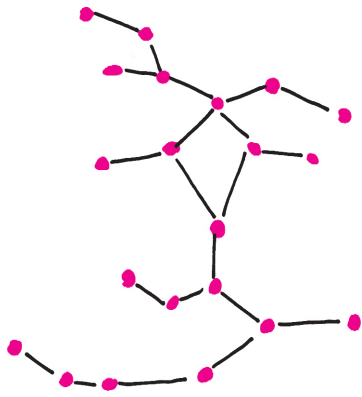
$$x^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} y^k + y^{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+k}{k} x^k = 1.$$

Po wstawieniu $y = 1 - x$ lewa strona tożsamości jest wielomianem zmiennej x , który jest tożsamościowo równy 1 na przedziale $[0, 1]$, więc jest on równy 1 dla wszystkich x rzeczywistych.

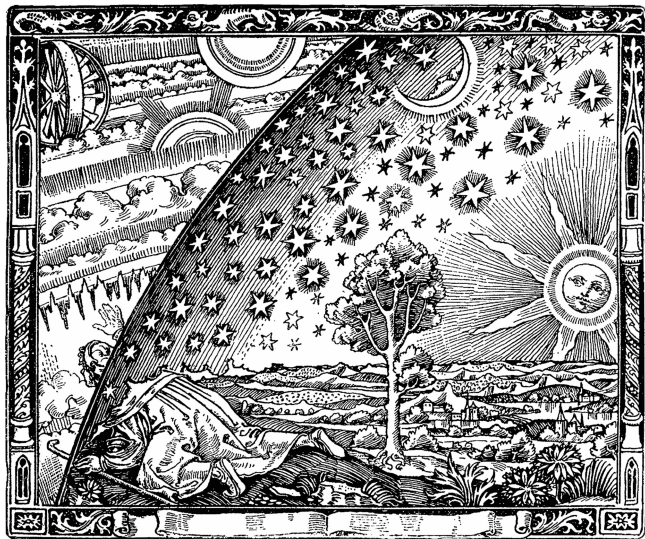
Wydaje się oczywiste, że praktycznie wszystkie zwierzęta nie zdają sobie sprawy z rzeczywistych rozmiarów świata i historycznego upływu czasu. Praktycznie wszystkie, ponieważ z tej kategorii należy wyłączyć ludzi i, w pewnym stopniu, szympansy. Badania człowiekowatych doprowadzają współczesnych badaczy do nieuniknionej refleksji: świadomość racjonalna, pozwalająca na abstrakcyjne wyobrażenia i ich analizę pojawia się naturalnie, stopniowo w drodze ewolucji. Szympansy są tego doskonałym przykładem. Podobnie było w przypadku praludzi – pierwotne struktury socjalne, które mogą być, jak pokazuje przykład szympansov, niezwykle wyrafinowane, ewoluowały, tworząc nowe umiejętności, np. mowę przydatną do przekazywania cennych informacji między pokoleniami. To zapewne wtedy tworzenie *ad hoc* prostych narzędzi stało się rozważaniem, jak coś działa (powinno działać), a praczłowiek coraz śmielej zastanawiał się nad otaczającym go światem. Oczywiście, że refleksje prymitywnego zbieracza czy łowcy były mocno ograniczone w porównaniu z wiedzą zaawansowanego cywilizacyjnie osadnika. Przypuszczam, że praludzie wyobrażali sobie sawannę afrykańskiej doliny ryftowej, na której żyli, jako nieskończoną i wieczną (a przynajmniej istniejącą bardzo długo w skali ludzkiego życia) przestrzeń, ponieważ nie mieli powodów, by zakładać inaczej, doświadczając przewidywalnych, cyklicznych zmian w przyrodzie. Były to czasy *kosmologii magicznej*, w której największe znaczenie miały wyjątkowe zjawiska lokalne – anomalie pogodowe, uderzenia piorunów, pożary itd. Od pewnego jednak momentu praludzie zaczęli uświadamiać sobie istnienie gwiazdzonego nieba nad nimi jako obszaru świata wartego głębszych studiów. Najwcześniejsze dowody na badania astronomiczne mają około 20 tys. lat (kalendarz lunarny rzeźbiony w kości, znaleziony w południowej części Sahary). Późnomegalityczne budowle o zastosowaniu astronomiczno-kultowym, podobne do późniejszego brytyjskiego Stonehenge (2–3 tys. lat p.n.e.), powstawały w Afryce i Europie już 5 tys. lat p.n.e. i były konstruowane przez różne niekontaktujące się ze sobą kultury. Jednocześnie pokolenia teoretyków proponowały mniej lub bardziej estetycznie wyszukane modele powstania i budowy świata; modele te zakładały istnienie preferowanego w danym momencie przez daną kulturę stwórcy nieba i ziemi. W okresie tym powstawała *kosmologia mityczna*, racjonalizująca obserwacje poprzez postulowanie istnienia różnych odpowiednio wszechmocnych bóstw. Brzmi naiwnie? Mit religijny był w istocie pierwszą „naukową” próbą opisu świata podjętą przez ludzkość.

Wielkie cywilizacje epoki brązu – Egipt i Mezopotamia – zaczęły rozróżniać *mitę kosmogoniczną* opisującą stworzenie i strukturę świata od kosmologii rozumianej jako opis działania i ewolucji świata. Wiele prac ówczesnych astronomów miało zastosowanie praktyczne, odnoszące się do pomiarów kalendarzowych (przewidywanie przyprawów, rolnictwo itd.). Babilończycy już 1000 lat p.n.e. mieli zaawansowane katalogi gwiazd, zaćmień i faz Księżyca, które regularnie aktualizowali, a nawet byli w stanie przewidywać zdarzenia na sferze niebieskiej, używając doskonałej w tym czasie arytmetyki. Jednocześnie ich model Wszechświata wyobrażony był jako fantazyjna, wieloskładnikowa kopuła niebios (dwa nieba ponad sferą gwiazd) spoczywająca na nieruchomej ziemi, oraz podzielona na dwie struktury podziemia. Nie był to jednak kompletny model kosmologiczny w dzisiejszym znaczeniu tego słowa: nie korzystał w pełni z wyżej wspomnianych katalogów i nie umożliwiał interpretacji obserwacji astronomicznych.

Ta sztuka udała się dopiero Grekom. Zanim jednak powiemy o porównaniu teorii z obserwacjami, należy wspomnieć o naukowym przełomie rozpoczętym przez greckich filozofów żyjących w okresie między 7 w. p.n.e. a powstaniem imperium rzymskiego. Stworzyli oni pierwszą prawdziwie naukową metodę badania świata, używającą wnioskowania popartego dowodem, racjonalizmu i debaty opartej o argumenty logiczne. Mimo że część teorii proponowanych przez greckich filozofów przyrody nie przetrwała próby czasu, ich przekonanie o matematyce jako języku opisu własności Wszechświata jest dziś równie aktualne jak za czasów Platona. Idealizacja praw natury, które powinny dać się opisać prostymi, uniwersalnymi prawami w języku matematyki, jest dziś rzadko kwestionowanym fundamentem podejścia naukowego. Sposób badań świata stworzony przez starożytnych może być w związku z tym nazwany *kosmologią matematyczną*.



Greckie modele kosmologiczne były początkowo podobne do wcześniejszych wersji babilońskich: Tales z Miletu (624–545 p.n.e.) wyobrażał sobie świat jako okrągłą płytę pływającą po bezkresnym oceanie. Anaksymander z Miletu (610–546 p.n.e.) jako pierwszy zaproponował pogląd, że powierzchnia Ziemi jest zakrzywiona (w kształt powierzchni walca). Stworzył też jedną z pierwszych map znanego świata, a także rozważał istnienie światów innych niż nasz. Demokryt z Abdera (460–370 p.n.e.) oprócz stworzenia wraz z Leukippossem (V w. p.n.e.) podstaw teorii atomizmu (co, mówiąc dzisiejszym językiem, oznacza, że wszystko co jest, składa się z niepodzielnych elementów materii oraz próżni) przypuszczał, że oprócz Ziemi istnieją również inne planety. Kosmos według Demokryta był areną, na której nieustannie tworzyły się i ginęły nowe światy – sfera niebieska przestała być jedynie dekoracją, a stała się aktywną częścią świata. Silny prąd filozoficzny reprezentowany przez pitagorejczyków przyczynił się w dziedzinie astronomii do odkrycia kulistości Ziemi (obserwacje cienia Ziemi podczas zaćmienia Księżyca) i stworzył pierwszy opis Kosmosu z prawdziwego zdarzenia. Był to model geocentryczny, którego środek zajmowała Ziemia, otoczona przez obracające się siedem sfer niebieskich z innymi planetami, Księżycem i Słońcem; ósmą sferę zajmowały gwiazdy stałe. Odległości między sferami spełniały ściśle określone związki arytmetyczne, odtwarzające harmonię interwałów muzycznych (stąd kosmiczna muzyka sfer). Model ten rezonował w historii aż do rewolucji kopernikańskiej. I tak wybitny pitagorejczyk, Filolaos z Tarentu (470–399 p.n.e.), zaproponował przełomową modyfikację: złamanie symetrii, i uznanie, że centrum świata zajmuje nie Ziemia, a Wieczny Ogień. To jego światło odbite od Słońca i Księżyca dociera do Ziemi, a Ziemia sama krąży umieszczona w swojej sferze wraz ze znajdującym się po przeciwnej stronie Antychtonem (Przeciwziemią). Późniejsze zmiany do modelu geocentrycznego wprowadzone przez Hipparchosa z Nikei (190–120 p.n.e.) dotyczyły technicznych detali – epicykli i deferentów, dopuszczających skomplikowany ruch planet w celu wyjaśnienia obserwowanych zmian jasności. Model geocentryczny był także rozwijany przez Platona, Eudoksosa z Knidos, Arystotelesa i Ptolemeusza. Przetrwał aż do XVI w. przekazany astronomom europejskim przez astronomów arabskich, a nawet został włączony do dogmatu przez Kościół katolicki.



Czytelnik Wnikliwy znajdujący więcej pytań niż odpowiedzi (C. Flammarion, 1888).

Pierwszym filozofem, który wprost rozważał model heliocentryczny, był Arystarch z Samos (310–230 p.n.e.). Podobnie jak Eratostenes (276–195 p.n.e.), o którym pisaliśmy w *Delcie* 7/2014, zdawał sobie sprawę z rzeczywistych rozmiarów Ziemi, Księżyca i odległości między Ziemią a Słońcem, opisał także ruch orbitalny Ziemi i jej ruch wokół osi obrotu, oraz poprawnie zidentyfikował ruch gwiazd stałych jako konsekwencję ruchu Ziemi. Z perspektywy czasu, mimo genialnej intuicji Arystarch poniósł porażkę – jego teoria została uznana za błędną przez starożytnych z powodów filozoficznych, ale również dlatego, że kołowość orbit założona w modelu dawała błędne wyniki w porównaniu z obserwacjami. Półtora tysiąclecia pomiędzy Arystarchem a Mikołajem Kopernikiem (1473–1543) wypełniały w dziedzinie kosmologii teoretyczne spory o naturze geocentrycznego Wszechświata, motywowane bardzo silnym wpływem wyidealizowanych modeli kryształowych sfer niebieskich otaczających nieruchomą Ziemię, autorstwa Platona i Arystotelesa. Poglądy starożytnych wspierane przez autorytet Kościoła nie były kwestionowane nawet w obliczu dramatycznych niezgodności teorii z obserwacjami.

Na całe szczęście przewrót kopernikański zbiegł się w czasie z powrotem racjonalnego myślenia naukowego. Dobrym przykładem jest Johannes Kepler, który zarzucił preferowany przez siebie elegancki, ale błędny opis Układu Słonecznego używający platońskich idealnych brył na rzecz elips – mniej eleganckich, lecz świetnie opisujących rzeczywistość. Inni wielcy astronomowie, jak Tycho Brahe, krytykowali



Tajemnicza sprawność matematyki w opisie świata fizycznego jest do dziś fascynującym przedmiotem badań filozofów.

O wszechświatach wyspowych pisał Agnieszka Janiak w poprzednim numerze *Delt*y.

Przez kilkadziesiąt lat w pierwszej połowie XX w. wczesne oszacowania wieku Wszechświata na podstawie pomiaru stałej Hubble'a były sprzeczne z pomiarami geologicznymi wieku Ziemi na podstawie pomiarów radioaktywności pierwiastków: Ziemia wydawała się starsza niż Wszechświat!



Rozwiązanie zadania M 1464.

Najpierw pokażemy, że $2(n-1)$ połączeń wystarczy. Ustalmy pewną osobę A . Najpierw każda z pozostałych osób dzwoni do A , przekazując jej swoją informację. Wówczas osoba A zna już wszystkie informacje i w ciągu kolejnych $n-1$ rozmów może przekazać je pozostałym.

Teraz pokażemy, że aby wszyscy poznali wszystkie informacje, potrzeba co najmniej $2(n-1)$ połączeń. Niech m oznacza liczbę wszystkich wykonanych w tym celu połączeń, l zaś – liczbę połączeń, które zostały wykonane przed pierwszym momentem, gdy pewna osoba (nazwijmy ją A) znała wszystkie n wiadomości. Każda z pozostałych $n-1$ osób musi być poinformowana o wiadomościach, których nie zna, więc trzeba wykonać jeszcze co najmniej $n-1$ połączeń, tzn. $m-l \geq n-1$. Zauważmy również, że po l telefonach osoba A zna wszystkie wiadomości, więc każda z $n-1$ pozostałych osób musiała wykonać wcześniej przynajmniej jedno połączenie (inaczej jej wiadomość nie byłaby znana nikomu poza nią, w szczególności A). Stąd $l \geq n-1$. W takim razie $m \geq n-1+l \geq 2(n-1)$.

model heliocentryczny, wskazując na nieobserwowalność określonych zjawisk, np. paralaks gwiazd. Zmiany pozycji pobliskich gwiazd względem dalszych na sferze niebieskiej, wywołane ruchem orbitalnym Ziemi, zaobserwował dopiero Friedrich Bessel w 1838 r.; krytyka Brahego była więc motywowana stanem ówczesnej wiedzy na temat odległości kosmicznych. Na początku XVII w. Galileusz, używając teleskopu, stwierdził, że Droga Mleczna składa się z ogromnej ilości gwiazd, obserwował też księżyc Jowisza, wybuch supernowej i plamy na Słońcu. Wszystkie te obserwacje skłoniły badaczy do rezygnacji z poglądu Arystotelesa o idealnej wieczności nieboskłonu, a później, po sformułowaniu prawa powszechnego ciężenia (Izaak Newton, 1687), do akceptacji przekonania, że gwiazdy rządzą się takimi samymi prawami jak obiekty na Ziemi. Staje się także jasne, że prawa przyrody dają się opisać w języku matematyki, im prostszym i bardziej uniwersalnym, tym lepiej (zasada brzytwy Ockhama!). Obszar dostępny badaniom filozofów natury powiększa się: nawet Immanuel Kant (1755) pisze na temat obserwowanych na gwiazdzistym niebie obiektów mgławicowych (innych galaktyk, jak obecnie wiemy), spekulując o ich podobieństwie do naszej Galaktyki i nazywając je „wszechświatami wyspowymi”. Joseph von Fraunhofer rozpoczyna w 1814 r. erę badań widmowych Wszechświata – obecność linii widmowych znanych pierwiastków w świetle gwiazd jest kolejnym dowodem na to, że wszędzie obowiązują te same prawa fizyki. Modele i obserwacje gwiazd zmiennych są wykorzystywane do pomiaru odległości astronomicznych (Henrietta Leavitt, 1912). Początek XX w. oprócz powstania mechaniki kwantowej i ogólnej teorii względności jest także czasem Wielkiej Debaty pomiędzy Harlowem Shapleyem a Heberem Curtisem na temat rzeczywistych rozmiarów Wszechświata i natury mgławic spiralnych. Potwierdzenie, że są one podobne do Drogi Mlecznej (każda z ogromną liczbą gwiazd, a więc być może i układów planetarnych), a także obserwacja ich ruchu względem nas („ucieczka galaktyk” Edwina Hubble’a) wywołały przewrót podobny do kopernikańskiego. Zmienność świata w największej skali skłania do pytania o jego wiek i stan początkowy. Nieomal z dnia na dzień Wszechświat stał się ogromny, dynamicznie zmienny (i jeszcze bardziej obojętny w kwestii specjalnej pozycji Ziemi i ludzkości), ale jednocześnie jak nigdy przedtem znalazł się pod lupą metody naukowej i krytycznej weryfikacji hipotez.

Aktualny stan wiedzy sugeruje, że Wszechświat nie tylko rozszerza się, ale rozszerzanie przyspiesza; potrafimy nawet dość dokładnie oszacować czas (13,8 mld lat), jaki upłynął od „Wielkiego Wybuchu”, i badać ewolucję Wszechświata w różnych skalach, używając największych zdobyczy XX w.: Modelu Standardowego cząstek elementarnych (i ich oddziaływań) i ogólnej teorii względności opisującej oddziaływania grawitacyjne. Sięganie w otchłanie Kosmosu stało się jednocześnie i podróżą w czasie, i badaniem elementarnych składników materii, a granice pomiędzy astronomią i fizyką zatarły się.

Współczesne fundamentalne odkrycia są jednak w pewnym sensie uświadamianiem sobie kolejnych tajemnic – Wszechświat wydaje się w większości wypełniony tajemniczą ciemną energią (68% całej masy-energii) i ciemną materią (27%); dobrze rozumiemy tylko pozostałe 5% „zwykłej” materii. Co na to teoretycy? Przez ostatnie pół wieku trwał rozwój motywowanej matematycznym pięknem hipotezy strun, eksplorującej możliwości unifikacji wszystkich oddziaływań w jedną Teorię Wszystkiego. Niestety, brak solidnych przewidywań eksperymentalnych dotychczas raczej rozczarowuje, niż obiecuje przyszłe przełomy naukowe. Mimo tego trwa filozoficzna dyskusja o zakresie stosowalności dowodu eksperymentalnego w naukach fizycznych. Czy matematyczne piękno teorii naukowej jest ważniejsze niż jej praktyczna weryfikowalność? Czy metoda naukowa może być skuteczna bez wymogu falsyfikowalności? Możemy te pytania zadać obok wielu innych, stawianych aktualnie przez badaczy: co dalej, jeśli Wielki Zderzacz Hadronów nie stwierdzi istnienia supersymetrii lub innych niestandardowych cząstek? Czy nasz Wszechświat jest jednym z wielu, a jeśli tak, to czy da się to stwierdzić eksperymentalnie? Czy założenie hipotezy wielu Wszechświatów rozwiązuje problem Wielkiego Wybuchu? Czy świat realny ma trzy wymiary przestrzenne, czy też więcej, a może mniej? Czym jest czas? Czym jest świadomość? Dlaczego prawa fizyki są takie, a nie inne? Czy Wszechświat *jest* matematyką? I na koniec, czy te pytania są istotnie różne od tych, które zadawali starożytni?

Rozprawka o metodzie

Marek KORDOS

Na początek stwierdzenie: w nauce, a zwłaszcza w matematyce, zajmujemy się tylko wyjątkowymi, wyidealizowanymi sytuacjami.

A może lepiej zacząć tak: do tego, o co nam chodzi, co nas interesuje, dorobiliśmy sobie taki świat, taką całość, że to, od czego zaczęliśmy, stało się wyjątkowe.

Ponieważ może się to wydawać mętne i wątpliwe, więc przyjrzyjmy się przykładom.

Przykład I. Liczby będące wynikiem pomiarów wszystkie są wymierne, a więc wyjątkowe, zaniedbywalne wśród – uważanych przez nas za zwyczajne – liczb rzeczywistych.

Przykład II. Na powierzchni patrzymy tak, że wydają się nam niesłychanie regularne. Tak doskonałe, by można było stwierdzić, że

- (Jacob Bernoulli) krzywizna normalna powierzchni ma dwa ekstrema i to w kierunkach prostopadłych;
- (Leonhard Euler) krzywiznę każdej krzywej normalnej opisuje równość $\kappa_N = \kappa_{\max} \sin^2 \alpha + \kappa_{\min} \cos^2 \alpha$, gdzie kąt α mierzymy od kierunku minimalnej krzywizny.
- (Jean Meusnier) krzywiznę dowolnej krzywej na powierzchni opisuje równość $\kappa = \frac{\kappa_N}{\sin \theta}$, gdzie krzywa normalna i dana mają wspólną styczną, a θ to kąt między płaszczyzną ściśle styczną do krzywej i płaszczyzną styczną do powierzchni.

Przykład III. Nawet geometrię obraliśmy tak,

- by w niej grupy izometrii, podobieństw i przekształceń afinicznych to były trzy różne grupy;
- by wśród geometrii riemannowskich o stałej krzywiznie stanowiła ona wspólny brzeg bogactwa geometrii hiperbolicznych i eliptycznych;
- co więcej: by jedynie nasza (szkolna, euklidesowa) płaszczyzna – spośród wszystkich jednorodnych geometrii o wymiarze większym od 1 – nie dopuszczała paradoksalnego rozkładu, czyli by jej grupa izometrii nie miała podgrup wolnych.

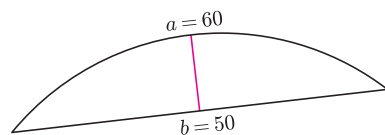
Zamiast mnożyć przykłady postawmy pytanie: czy możliwa jest matematyka nietraktująca rzeczywistych sytuacji za wyjątki, czyli niedolepiająca do tego, co naprawdę jest, absurdalnych dodatków w rodzaju liczb przestępnych, ciągłych funkcji $[0, 1]$ na $[0, 1]$ w żadnym przedziale niemonotonicznych, paradoksalnych rozkładów czy indukcji pozaskończonych itp.?

Od 40 lat lansowany jest pogląd, by nie nazywać tego zajmowania się liczbami i figurami matematyką – ale o tym dalej.

A odpowiedź jest TAK. Co więcej, większość czasu, w którym ludzie zajmowali się liczbami i figurami, wypełniona była taką matematyką.

Cofnijmy się więc o 5000 lat

Tabliczka sumeryjska (babilońska) *British Museum 85 194* prezentuje nam dydaktyczny dialog między uczniem a nauczycielem.



Rys. 1

Problem: Odcinek kołowy. Brzeg 60, cięciwa 50. Jakie pole?

Nauczyciel: 60, brzeg, o ile wychodzi poza 50?

Uczeń: O 10 wychodzi.

N: 50 pomnóż przez 10.

U: 500, jak widzisz.

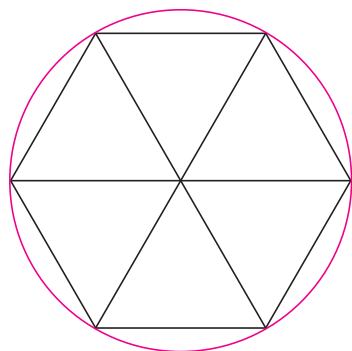
N: 10 (linię dzielącą) podnieś do kwadratu.

U: 100, jak widzisz.

N: 100 od 500 jest oddalone...

U: 450, jak widzisz, jest pole!

Jak widać, pole odcinka kołowego obliczamy ze wzoru $(a - b)b - \frac{1}{2}(a - b)^2$.



Rys. 2. Obwód sześciokąta foremnego to $6r$, a okrąg nie jest od niego istotnie dłuższy.

Niby dziwne, ale...

1° Oczywiście, $\pi = 3$ – uzasadnienie na marginesie (patrz również, na przykład, Księga I Królewska, 7 23) – zresztą, gdy się zastanowimy, okaże się, że nasze 3,14 to też przecież przybliżenie.

2° Dla półkola mamy $a = \pi r = 3r$, $b = 2r$ i linia dzieląca faktycznie równa się $a - b = r$. Obliczenie zatem jest poprawne:

$$(a - b)b - \frac{1}{2}(a - b)^2 = r \cdot 2r - \frac{1}{2}r^2 = \frac{3}{2}r^2 = \frac{1}{2} \cdot 3r^2 = \frac{1}{2}\pi r^2.$$

3° Jeśli wzór jest dobry dla półkola, to i w innych przypadkach da rozsądne wyniki.

Przytoczony bieg myśli charakteryzuje najstarszy ze sposobów porządkowania wiedzy o świecie, znany jako **metodologia empiryczna**.

Narzędziami są analogia, powtarzające się następstwo czasowe. Brak natomiast niezbędnego dziś dla nas elementu: związku przyczynowego.

Z tego wyniku **sposób notowania**: jest to mit, fabuła.

Wdrażanie, praktyczne spożytkowanie to algorytm powstały w wyniku testowania tzw. metodą prób i błędów, realizowany w postaci ceremoniału (stąd nazywanie uczonych tych czasów kapłanami).

Przyjrzyjmy się prądródom takiego porządkowania rzeczywistości.

Można tu cofnąć się jeszcze przed zaistnienie ludzkości. W połowie sierpnia na nadbrzeżnych łąkach tysiące bocianów, zgodnie, pod kierunkiem swego przywódcy, zbierają się do liczącej wiele tysięcy kilometrów podróży, **bo tak trzeba**.

Pierwsze człowiecze porządkowanie świata powoduje, że dziecko, wieczorem kładąc się spać, **wie**, że gdy się obudzi, znów będzie jasno.

Takie jest zresztą i faktyczne postrzeganie świata: **...przede mną gasisz w lazururowej wodzie gwiazdę ognistą** – i tak my wraz z poetą widzimy nadmorskie zachody Słońca.

Dlatego nie powinny nas dziwić odnotowania tego porządku w mitach.

Pory roku zostały odnotowane jako sześć pestek granatu zjedzonych przez Persefonę.

Pojawianie się na świecie potomstwa (o tak oczywistych dla nas przyczynach) długo relacjonowano jako spowodowane przez wolę sił wyższych, wiatr zachodni, konia morskiego itp.

Konieczność usuwania zwłok powodowały wampiry, duchy, demony (to samo pod nazwą kiedyś mikrobów, a dziś bakterii i wirusów opowiadają nam higieniści).

Nie każdy zdaje sobie sprawę, jak blisko mamy przykład współczesny:

1 szklanka masła	2 łyżeczki wanilii
1 szklanka białego cukru	2 rozmieszane jajka
1 szklanka brązowego cukru	2,5 szklanki mąki (nieprzesianej)
2 łyżeczki sody	2 szklanki pokruszonych płatków kukurydzianych
1 łyżeczka soli	1 lub 2 szklanki wiórków czekoladowych

Stop masło, dodaj obie szklanki cukru i wymieszaj. Dodaj sodę, sól, wanilię i jajka. Dokładnie wymieszaj. Następnie dodaj mąkę, cały czas mieszając. Dodaj pokruszone płatki i wiórki czekoladowe. Całość dokładnie wymieszaj.

Z ciasta palcami uformuj kulki wielkości orzechów włoskich i układaj na posmarowanej tłuszczem blasze. Każdą z kulek delikatnie przyciśnij płaską łyżką, obtoczoną w mące lub posmarowaną tłuszczem.

Piecz w temperaturze 190°C przez 8–10 minut. Studź przez 2 minuty na blasze, a następnie wyłóż na drucianą kratkę, aby całkiem ostygły.

złóż takie ofiary

przestrzegaj takiego rytuału

(bo jak np. nie dostudzisz na kratce, to będą strasznie twarde!)

DAR BOGÓW! Otrzymasz **czekoladowe piguski**.

Patrz np. Homer, *Odyseja* V.125-128; Arystofanes, *Żaby*, 338, Hezjod, *Teogonia*, 969 i dalej.

Patrz np. *Opowieści z 1000 i jednej nocy*: *Opowieści Sindbada Żeglarza, podróż I*; *Księga Rodzaju*, 30 31-43; Claude Lévi-Strauss, *Smutek tropików*.

Patrz np. *Księga Papugi: 25 opowieści wampira*.

A oto przykład z agro- i zootechniki

Określenie objętości stogów w metrach sześciennych

Jeśli linkę z uwiązaniem na końcu kamieniem przetrzucisz przez najwyższy punkt stogu tak, by ów kamień sięgnął ziemi, to *przerzut* będzie właśnie jej długością.

obwód w metrach	przerzut w metrach							
	8	9	10	11	12	13	14	15
12	24,0							
13	25,0	33,5						
14	26,5	35,5						
15	28,0	38,0	52,5					
16	29,5	40,0	55,0	68,0				
17	31,0	42,0	57,0	71,0	85,0			
18	32,0	44,0	59,0	74,0	88,5	104,0		
19	33,5	46,5	61,0	76,5	92,5	109,5	127,0	144,0
20	35,0	49,0	63,5	79,5	96,5	114,5	134,0	152,0
21	36,5	51,0	66,5	82,0	100,5	120,0	141,0	160,0
22		53,0	68,5	84,5	104,0	125,0	147,5	168,0
23		55,0	70,5	87,5	108,0	130,0	154,0	176,0
24			72,5	90,0	112,0	135,0	161,0	184,0
25			75,0	93,0	116,0	140,5	168,0	192,0

Poradnik łąkarza, PWRiL, 1961, str. 245, tab. 59; tego rodzaju tabel jest tam 126.

Przykład powyższy jest może szczególnie właściwy, gdyż metodologia empiryczna rozwinęła się do niesłychanie wysokiego poziomu w państwach rolniczych – takich imperiach jak Egipt, Nigeria i inne państwa rozlokowane wokół wielkich rzek. Stabilne warunki życia pozwalały uznać jego rytm za ład Wszechświata i nie kazały szukać przyczyn stabilnych regularności.

Przewrót

Ubogie, niewielkie, ale sprawne koczownicze plemiona pasterskie uderzyły na zasobne rolnicze imperia, traktując różnicę poziomu życia jako niezawinioną krzywdę.

Każdy z nas czytał zresztą o śmierci dobrego pasterza Abła z ręki podłego rolnika Kaina – należało się zrewanżować.

Z tego samego źródła dowiadujemy się o początku tych walk – to najazd Hyksosów na Egipt (–1800), potem dowiadujemy się o wyjściu Mojżesza z Egiptu (–1300), a już z innych źródeł mamy wieści o kończącej czas przemian wojnie trojańskiej (–1000).

Bo były to zmiany dwuetapowe. Najpierw umięśniony Conan-pasterz niewolił uroczą, umytą i uczesaną Amazonkę-rolniczkę, a potem ona brała go pod pantofel, czego skutkiem była całkowita asymilacja jego plemienia (taką hybrydową kulturę opisuje np. w *The Golden Bough* – polski skrót: *Złota gałąź* – James George Frazer). To zjawisko było tak odrażające dla kolejnych fal plemion pasterskich, że uznawały za oczywistość konieczność zniszczenia wszystkiego, co znalazły na swej drodze, w szczególności owe hybrydowe formacje państwowe.

Czas ten ze względu na totalne niszczenie dawnego porządku relacjonowany jest jako Wiek Ciemny (technicznie: żelazo zwyciężyło brąz),

I powstaje dorycka Grecja: –VIII wiek;

Powstaje **metodologia dedukcyjna**. Istotą rewolucji metodologicznej jest stwierdzenie, iż w zmiennych warunkach **wiedza pełna** jest nieosiągalna; w zmiennych warunkach potrzebna jest **wiedza pewna**.

Wymóg pewności wymusza idealizację – pewność musi eliminować wszelkie odstępstwa, co narzuca ostre reguły, jakie muszą spełniać twierdzenia – atomy wiedzy pewnej.

Fabularnie można to przeczytać u Roberta Gravesa: *Wyprawa po złote runo*, dostępna również pod tytułem *Herkules z mojej zagłogi*.

Patrz np. Ewa Wipszycka-Bravo, *Historia starożytnych Greków*.

Potem jeszcze były „dożynki” dawnego ładu: koniec Etrusków (Tarkwiniusze, –V wiek) i wojny punickie (–II wiek).

Rzeczownikami mogą być jedynie abstrakty (np. *zły pieniądz wypiera dobry pieniądz* nie dotyczy konkretnej waluty, *gravitacja* powoduje nie tylko spadanie, ale utrzymuje okręty na wodzie i unosi balony do góry); **czasowniki** muszą być formalne, jednoznaczne (to, że *odcinek ma tyle samo punktów co prosta, na której leży* wymaga sprecyzowania zwrotu „ma tyle samo”); a **zdania** – jedynie **warunkowe** (mimo iż *woda płynie z góry na dół*, każdy z nas widział fontannę). Gdy przesłanki dotyczą pojedynczych twierdzeń, nazywamy je założeniami, gdy całej grupy – aksjomatami.

No i najważniejsze: **dedukcja** – zdania mogą być przyczyną innych zdań.

W ten sposób pojawia się rzecz najsilniej odróżniająca obie metodologie:

metodologia dedukcyjna likwiduje niezależność poszczególnych elementów wiedzy, teraz stwierdzenia są zależne.

Powstają dwie struktury: teoria i praktyka.

A więc powstaje pytanie:

Co zrobić, gdy praktyka nie zgadza się z teorią?

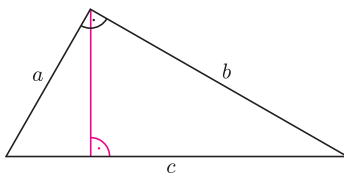
- Trzeba zmienić teorię!
- Czyś ty zwariował!
- Trzeba zmienić praktykę?
- Chyba żartujesz!
- No to co zrobić?
- **Zmienić, że się nie zgadza!!**

I matematycy wybrali tę drogę. Oto przykład flagowy.

Zdanie: Przy podobieństwie o skali λ pola zmieniają się w stosunku λ^2 .

jest przyczyną zdania: W trójkącie prostokątnym suma kwadratów przyprostokątnych jest równa kwadratowi przeciwprostokątnej.

Dowód: Stosunek podobieństwa mniejszych trójkątów do największego to a/c i b/c , a ich pola składają się na jego pole, więc $\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$, czyli $a^2 + b^2 = c^2$.



Rys. 3

A oto **konsekwencje:** oglądając kwadrat z narysowaną przekątną, widzimy **konieczność fundamentalnej decyzji:**

albo dopuścimy nieistniejące liczby, takie jak ta, której kwadratem jest 2, **albo** uznamy, że pomysł z dedukcją i „zawszeprawdziwymi” twierdzeniami należy odrzucić.

Kłopot był poważny. Trwająca sto lat walka stronnictw – mistyczni akuzmatycy kontra fundamentalistyczni matematycy – została rozstrzygnięta w –V wieku: wygrała koncepcja doklejania do matematyki najrozmaitszych paskudztw,

i tak:

- dla rozwiązalności równań trzeciego stopnia wprowadzono liczby zespolone,
- dla twierdzeń Desarguesa, Pascala, Ponceleta, Steinera wprowadzono punkty w nieskończoności,
- dla zapewnienia istnienia rozwiązania równania różniczkowego wprowadzono przekroje i w konsekwencji liczby przestępne,
- dla istnienia nieliniowych rozwiązań równania Cauchy’ego wprowadzono pewnik wyboru i bazę Hamela
- i wiele, wiele innych dziwolągów,

a więc książka kucharska, czyli metodologia empiryczna poległa z kretesem.

Ale nowy, lepszy świat, **świat wiedzy pewnej**, mimo ponad 2500-letniego ciągłego ulepszania i doskonalenia, nie okazał się tak łaskawy, jak jeszcze sto lat temu przypuszczano.

Toruńska Letnia Szkoła Matematyki i Informatyki

Zapraszamy do udziału
w Toruńskiej Letniej Szkole
Matematyki i Informatyki –
ogólnopolskiej konferencji
dla studentów i doktorantów,
która odbędzie się
już po raz siódmy
w dniach

24–28.08.2015.

Tematami będą

topologia i geometria

oraz

technologie webowe;

więcej informacji na stronie

tismii.mat.umk.pl.

Nie dość, że ideał wiedzy pewnej nie dał się implementować w wielu dyscyplinach, choćby w, odczuwanej jako pierwszoplanowa, medycynie, to jeszcze nawet matematykom z uporem odmawiał odpowiedzi na ważne pytania.

Choć, mówiąc słowami Hilberta, *wir müssen wissen* (musimy wiedzieć), to jednak czas, w którym ma się spełnić obiecane *wir werden wissen* (będziemy wiedzieć), wydaje się nam leżeć prawie w nieskończoności.

O ile są jeszcze tacy, którzy widzą siebie w sytuacji, gdy dowiadują się o prawdziwości (czy też nieprawdziwości) **hipotezy Riemanna**, to znaleźć przekonanych o tym, że **równanie Naviera–Stokesa** zniemacka znajdzie rozwiązanie, raczej się nie da, choć sprawa ma fundamentalne znaczenie i bardzo liczni są ci, którzy nad nią pracują.

To wszystko powoduje, że metodologia książki kucharskiej odżywa, że coraz częściej matematycy zaczynają stosować nieledwie sumeryjskie metody i to z dobrym skutkiem.

Taki, na przykład, **problem trzech ciał** od pewnego czasu jest rozwiązywany fenomenologicznie, ale z jakże pięknymi efektami – proszę dla przykładu obejrzeć choćby <http://astro.u-strasbg.fr/~koppen/body/ThreeBodyHelp.html>

Ładnych parę lat młodszy ode mnie **tranzystor** umożliwił powstanie matematykopochodnej, ale nie matematykopodobnej dyscypliny, którą nazywamy informatyką.

W 1972 roku jej Najwyższy Kapłan, Donald Knuth, w artykule *Ancient Babylonian algorithms*, stwierdził, że sposób porządkowania i zdobywania wiedzy przez Sumerów nie jest pierwotną matematyką, lecz jest strukturalnie zbliżony właśnie do informatyki.

Gdy to połączyć z jego dewizą, iż **dowód poprawności algorytmu nie dowodzi jego poprawności – tę można uzyskać jedynie przez przetestowanie**, widzimy, że następuje renesans książki kucharskiej, choć dziś w naszych dyscyplinach przybiera ona nazwę algorytmu, maszyny Turinga czy funkcji obliczalnej.

Na zakończenie wypada dać dobitny przykład bezsilności matematycznych metod wobec wyzwań, jakie stawia rzeczywistość i informatyka.

Rzeczywistość to szeroko dyskutowana historia z wojny o Falklandy, jaką trzydzieści trzy lata temu stoczyła Wielka Brytania z Argentyną.

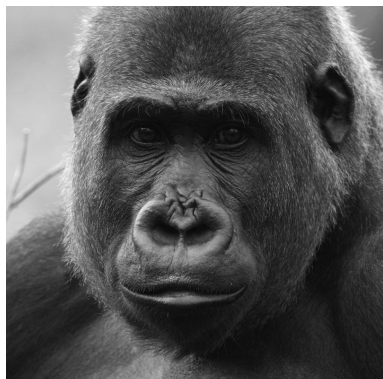
Wielką Brytanię reprezentować będzie niszczyciel rakietowy HMS Sheffield, Argentynę zaś samolot wielozadaniowy Dassault Super Étendard produkcji francuskiej, uzbrojony w, również francuskie, rakiety AM39 Exocet.

Informatykę reprezentować będzie oprogramowanie zamontowanej na niszczycielu broni antyrakietowej.

Podczas tygodniowej podróży Sheffielda z Anglii na Falklandy informatycy brytyjscy usiłowali znaleźć to miejsce w oprogramowaniu, gdzie jest powiedziane, że broń francuska to „swój”, a nie „obcy”. Jako że tak Wielka Brytania, jak i Francja były wojskowo związane z NATO, systemy informatyczne armii obu tych państw reagowały wzajemnie na ich uzbrojenie jak na własne. Zatem Sheffield postrzegał zarówno Étendardy, jak Exocety jako przyjazne, nawet gdy się do niego zbliżały. Należało to jakoś w oprogramowaniu zmienić, a w tym celu trzeba było znaleźć to miejsce w oprogramowaniu, gdzie jest o tym mowa. I na to tydzień nie wystarczył.

4 maja 1982 roku Sheffield został trafiony Exocetami i mimo pomocy innych jednostek 10 maja zatonął.

Przygody, jakie spotykają co jakiś czas różne systemy rejestracji chorych, rezerwacji biletów, ewidencji emerytur, zliczania głosów itp. pokazują, że może powinniśmy przyzwyczajać się do nowej metodologii myślenia i działania.



Goryl, jaki jest, każdy widzi

I każdy wie. Bardzo czarna twarz. Wydaje się być zawsze nie w humorze. Badany był w terenie przez wytrwałych, z których najważniejsza, Diane Fossey, po 18 latach obserwacji goryli górskich na granicy Rwandy, Ugandy i Konga, została w tajemniczych okolicznościach zamordowana. NIE przez goryle!

Obecnie goryle klasyfikuje się jako nizinne wschodnie i zachodnie, terytorialnie rozdzielone. Wschodnie od zachodnich goryli rozdzieliły się genomycznie 1,75 mln lat temu. Na wschodzie Centralnej Afryki, w obszarze wulkanicznym, żyją goryle górskie. (Niestety dla goryli, jest to region przygraniczny, w którym trwa obecnie wojna.) W epoce Diany Fossey było ich 253, co groziło pełnym wytępieniem. Wysiłki ekologicznych organizacji doprowadziły do obecnego stanu liczącego około 480 osobników. Ta grupa goryli była najlepiej poznana z żyjących na swobodzie, ale dopiero teraz oznaczono ich genom.

W 2003 roku sekwencjonowano genom goryla zachodniego (jedna samica z hodowli miejskiej), jako drugi po genomie szympansa w grupie wielkich małp człekokształtnych. Przystąpiono do dogłębnych porównań z genomami człowieka i szympansa. Z różnic genomowych można było, przyjmując określone stałe tempo mutacji, wyliczyć momenty rozdzielenia się tych gatunków. Pewne było, że najwcześniej mieliśmy wspólnego przodka z gorylami, później z szympanсами. W tych porównaniach objawiła się dobitnie także bardzo istotna cecha ewolucji genomów: w różnych ich obszarach, zarówno kodujących, jak i niekodujących białek, tempo zmian jest różne. Stąd też genomika daje jedynie orientacyjne dane dotyczące rozdzielenia się gatunków: obecnie przyjmuje się, że dla człowieka z gorylem jest to 10 mln lat, a dla człowieka z szympansem – 6 milionów.

W marcu 2015 roku, na podstawie 7 zebranych próbek krwi, opublikowano dane sekwencjonowania genomu goryla górskiego. Badaczy zadziwił fakt, że wiele szkodliwych genetycznych wariantów powodujących choroby goryli nizinnych i innych hominidów, u tych goryli z małej, odrębnej populacji, a więc poddanej w dużej mierze chowowi wsobnemu, zniknęło. Można to zrozumieć tak, że jeżeli blisko spokrewnione osobniki mają po jednej letalnej mutacji, to ich potomstwo nie może przeżyć do wieku rozrodczego. Dziś około 30% każdego chromosomu jest identyczne wśród górskich goryli, co oznacza, że połowa rodzeństwa tworzy pary (u wschodnich goryli nizinnych ta liczba wynosi 14%).

Ta adaptacja w małej izolowanej terytorialnie grupie nasuwa wnioski, dotyczące możliwości ewolucji grup ludzkich teraz i w przyszłości. Okazuje się także, że goryle górskie i ich sąsiedzi, goryle wschodnich nizin, są 2–3 razy mniej genetycznie zróżnicowane od dużych grup części zachodniej Afryki.

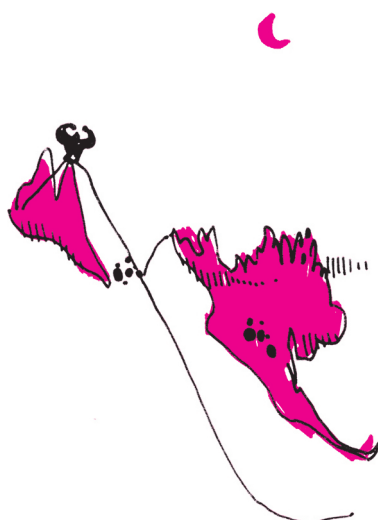
Dane porównawcze pozwalają również stwierdzić, że góraska grupa nie była znacznie większa przez ostatnie setki tysięcy lat, co częściowo zmniejsza zakładaną uprzednio odpowiedzialność człowieka za wymieranie tego gatunku, sugerując zasadniczy wpływ zmian klimatycznych na liczebność populacji.

W 30% sekwencji genom goryli jest bliższy do ludzkiego i szympaniego niż te ostatnie dwa między sobą. Drogi rozdzielenia się genetycznego nie są prostymi kreskami na prostych rysunkach. We wszystkich liniach można wyróżnić około 500 genów ulegających częstszym mutacjom niż pozostałe, wyraźnie zaznacza się to w grupie genów związanych ze słuchem i rozwojem mózgu (ewolucja mowy?).

Wiemy dziś z wykopalisk paleontologicznych i po poznaniu sekwencji genomu człowieka neandertalskiego, że ewolucja *Homo* była zawila, obfitowała w wymarłe dziś rozgałęzienia, aż zakończyła się dla współczesności jednym gatunkiem, *Homo sapiens*. Można zatem przyjąć, że w dziejach gatunków goryl–szympanś–człowiek widzimy echo historii rozwoju naszych przodków dawniej niż 100 000 lat temu i sytuacji, które napotkali w ciągu kilku milionów lat ewolucji. Dane genetyczne sugerują także wymianę materiału genetycznego już po formalnym rozejściu się gatunków – takie daty nie są wszak „ostre”, tym bardziej że mówimy o setkach tysięcy lat granicznych.

Zdanie tytułowe staje się bardziej ściśle dzięki współczesnej genetyce.

Magdalena FIKUS



X Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów

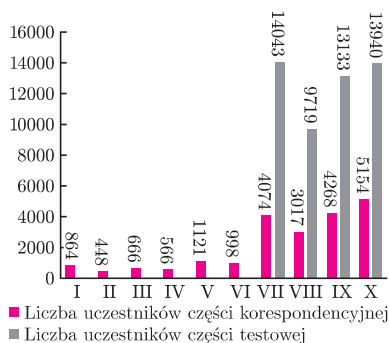


25. kwietnia odbyły się finałowe zawody jubileuszowej, X Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów, a dzień później, 26. kwietnia w pięknej auli Politechniki Warszawskiej 86. uczestnikom wręczono dyplomy laureatów.

W zawodach stopnia pierwszego X Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów wzięło udział 13940 uczniów z 1235 szkół (5154 nadesłało potem rozwiązania zadań z części korespondencyjnej). Do zawodów stopnia II zakwalifikowano 1138 uczniów z 520 szkół, a do zawodów stopnia trzeciego 157 z 86 szkół.

Olimpiada Matematyczna Gimnazjalistów (OMG), młodsza siostra Olimpiady Matematycznej, powstała w roku 2005 dzięki zapałowi i pasji ludzi związanych z Komitetem Głównym Olimpiady Matematycznej. W regulaminie OMG wpisano: *Celem zawodów Olimpiady Matematycznej Gimnazjalistów jest rozbudzanie zamiłowania do matematyki wśród młodzieży szkół gimnazjalnych, wyszukiwanie uczniów zainteresowanych matematyką, kształtowanie umiejętności samodzielnego zdobywania wiedzy oraz stymulowanie aktywności poznawczej młodzieży uzdolnionej.*

Wykres obok przedstawia liczbę uczniów startujących w kolejnych edycjach Olimpiady. Gwałtowny wzrost liczby uczestników od VII OMG spowodowany jest rozszerzeniem pierwotnej formuły o część testową.



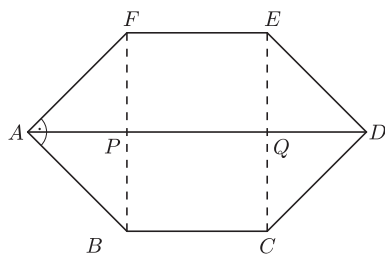
Wiecej o historii i teraźniejszości OMG można przeczytać na stronie <http://om.edu.pl>.

Zapisany w regulaminie cel „rozbudzania zamiłowania do matematyki...”

realizowany jest nie tylko przez organizację zawodów, ale też przez różne działania towarzyszące, skierowane do uczniów (gazetka *Kwadrat*, Facebookowa Liga Zadaniowa, obozy naukowe) oraz nauczycieli (seminaria i wydawnictwa). Organizatorzy pierwszej olimpiady swoją pasją zarazili innych. W organizację olimpiady włącza się czynnie duża grupa wolontariuszy, w większości finalistów i laureatów poprzednich edycji. Oni też pracują obecnie w Komitecie Głównym, Komitetach Okręgowych i Komisji Zadaniowej.

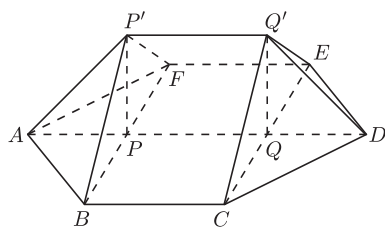
W czasie zawodów finałowych X OMG uczestnicy mieli, jak zwykle, trzy godziny na rozwiązanie pięciu zadań. Najtrudniejsze okazało się zadanie, które przytaczam poniżej. Tylko kilku zawodników przedstawiło poprawne rozwiązanie tego zadania.

Zadanie 1 (X OMG). Czy istnieje wielościan wypukły, którego dokładnie jedna ściana nie jest wielokątem foremnym?



Rys. 1.1

Rozwiązanie. Tak, taki wielościan istnieje. Opiszemy, jak go skonstruować. Rozpatrzmy sześciokąt $ABCDEF$ o wszystkich bokach równej długości i kątach przy wierzchołkach A, B, C, D, E, F równych odpowiednio: $90^\circ, 135^\circ, 135^\circ, 90^\circ, 135^\circ, 135^\circ$. Niech P będzie punktem przecięcia przekątnych AD oraz BF , a Q punktem przecięcia przekątnych AD oraz CE (rys. 1.1). Łatwo wykazać, że $AP = BP = FP = QC = QE = QD$. Wybierzmy teraz w przestrzeni punkty P' oraz Q' po tej samej stronie płaszczyzny sześciokąta, tak aby proste PP' i QQ' były prostopadłe do tej płaszczyzny oraz aby $PP' = AP = QQ'$. Wielościan $ABCDEFPP'Q'$ (rys. 1.2) spełnia warunki zadania – ma jedną ścianę, podstawę, która nie jest wielokątem foremnym, cztery ściany będące trójkątami równobocznymi i dwie ściany kwadratowe. Sprawdzenie tego faktu pozostawiamy Czytelnikom. \square



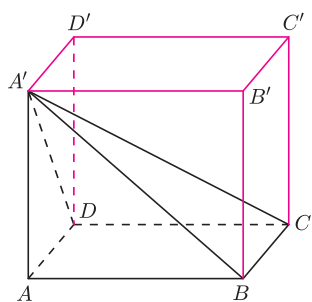
Rys. 1.2

Zadania, w których pojawia się pytanie o istnienie wielościanu spełniającego określone warunki, występują często wśród zadań olimpijskich. W dziesięciu edycjach olimpiady, na różnych etapach znajdziemy 10 zadań tego typu. Zawsze należało uzasadnić, że odpowiednią bryłę można zbudować. Konstrukcja wielościanu o zadanych własnościach wymagała od uczestników sporej wyobraźni i pomysłowości.

Czasem, aby skonstruować wielościan o wymaganych własnościach, trzeba dokładnie przyjrzeć się znanym bryłom i zauważyć tam pewne prawidłowości.

Zadanie 2 (II OMG). Czy istnieje taki ostrosłup czworokątny, którego każda ściana boczna jest trójkątem prostokątnym?

O kłopotach związanych z konstrukcją wielościanów spełniających określone warunki oraz o pewnych metodach ich konstrukcji można przeczytać w *Kwadratach* nr 7 oraz nr 12.



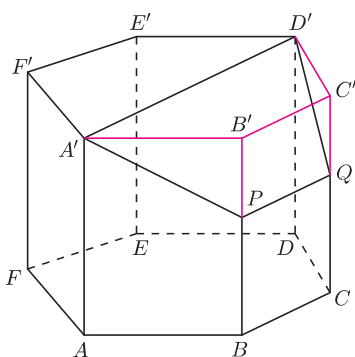
Rys. 2

Rozwiązanie. Tak, taki ostrosłup istnieje. Jeśli dokładnie przyjrzymy się prostopadłościanowi, to dostrzeżemy „w nim” nasz ostrosłup. Rzeczywiście, niech $ABCDA'B'C'D'$ będzie prostopadłościanem. Wówczas ostrosłup $ABCDA'$ spełnia warunki zadania (rys. 2). Trójkąty BAA' oraz DAA' są, oczywiście, prostokątne. Ponadto, ponieważ prosta BC jest prostopadła do płaszczyzny $A'AB$, to jest ona prostopadła do każdej prostej z tej płaszczyzny, w szczególności do prostej BA' . Zatem trójkąt CBA' jest prostokątny. Podobnie dowodzimy, że trójkąt CDA' jest prostokątny. \square

Często aby skonstruować wielościan o pewnych własnościach, trzeba „zdeformować” inny „regularny” wielościan, na przykład, poprzez wycięcie lub doklejenie jakiegoś elementu.

Zadanie 3 (IV OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę krawędzi i którego każda ściana ma parzystą liczbę boków?

Rozwiązanie. Tak, taki wielościan istnieje. Rozpatrzmy graniastosłup sześciokątny o podstawach $ABCDEF$ oraz $A'B'C'D'E'F'$. Graniastosłup ten ma 18 krawędzi i wszystkie jego ściany mają parzystą liczbę boków. Gdyby udało się dodać jedną krawędź, nie zmieniając własności ścian, to otrzymany wielościan spełniałby warunki zadania. Zauważmy, że sześciokąt $A'B'C'D'E'F'$ można bez trudu podzielić jedną z przekątnych na dwa czworokąty. Teraz tylko trzeba zrobić z tych czworokątów ściany wielościanu przez pochylenie jednego z nich. Poprowadźmy więc przez punkty A' oraz D' płaszczyznę przecinającą krawędzie BB' i CC' odpowiednio w punktach P oraz Q . Płaszczyzna ta dzieli graniastosłup na dwa wielościany, z których jeden spełnia warunki zadania: ma osiem ścian będących czworokątami i jedną ścianę sześciokątną. Ponadto wielościan ten ma 19 krawędzi (rys. 3).

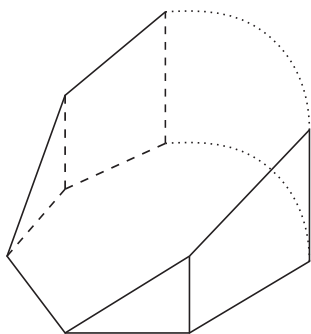


Rys. 3

Czytelnik Uważny skonstruuje podobną metodą inne przykłady wielościanów o zadanych własnościach, rozpatrując graniastosłup o podstawie będącej $2n$ -kątem, dla $n > 3$. \square

Zadanie 4 (V OMG). Czy istnieje wielościan wypukły mający dokładnie 100 ścian, z których co najmniej jedna jest 99-kątem i taki, że w każdym jego wierzchołku zbiegają się dokładnie trzy krawędzie?

Rozwiązanie. W każdym wierzchołku graniastosłupa o podstawie będącej 99-kątem zbiegają się dokładnie trzy krawędzie. Niestety, taki graniastosłup ma 101 ścian. Spróbujemy pozbyć się jednej ściany tak, aby pozostałe własności nie zmieniły się. Przetnijmy nasz graniastosłup płaszczyzną przechodzącą przez jedną krawędź dolnej podstawy i przecinającą wszystkie boczne krawędzie (rys. 4). Płaszczyzna ta dzieli graniastosłup na dwa wielościany, z których dolny spełnia warunki zadania. \square



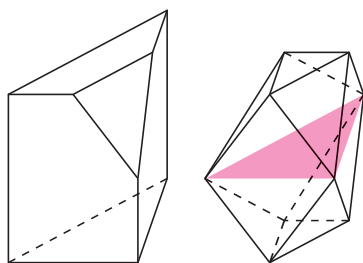
Rys. 4

Zadanie 5 (IX OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, że w każdym jego wierzchołku schodzą się co najmniej cztery krawędzie, i który można przeciąć pewną płaszczyzną, otrzymując w przekroju trójkąt?

Rozwiązanie. Rozpatrzmy graniastosłup trójkątny i płaszczyznę przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego, wybranego wierzchołka odetnijmy z niego czworościan zawierający ten wierzchołek. Następnie w ten sam sposób odetnijmy czworościany z pozostałych „rogów” graniastosłupa (rys. 5). Otrzymany wielościan spełnia warunki zadania. \square

I jeszcze zadanie do samodzielnego rozwiązania.

Zadanie 6 (VIII OMG). Czy istnieje taki wielościan wypukły, który ma nieparzystą liczbę ścian, i w którego każdym wierzchołku schodzi się parzysta liczba krawędzi?



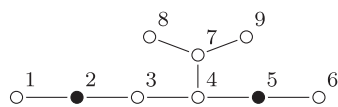
Rys. 5

Czytelnik Uważny znajdzie wielościan o żądanych własnościach wśród prezentowanych w tym artykule. Proponujemy znalezienie innych przykładów.

Barbara ROSZKOWSKA-LECH

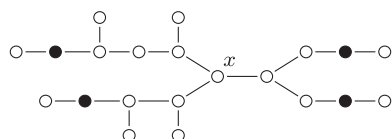
Informatyczny kącik olimpijski (83): Więzienie

Uczestnicy VII obozu informatycznego ILOCAMP mieli do rozwiązania takie oto zadanie: *Więzienie składa się z n cel i $n - 1$ łączących je korytarzy. W części z cel znajdują się więźniowie. Reszta cel jest pusta. W wyniku awarii wszystkie cele zostały otwarte. Jaka jest minimalna liczba strażników potrzebnych do uniemożliwienia więźniom ucieczki? Strażników można rozmieszczać jedynie w pustych celach, a więzień może uciec, jeśli na drodze od jego celi do celi wyjściowej (takiej, do której prowadzi tylko jeden korytarz) nie ma żadnej celi ze strażnikiem.*



Rys. 1. Przykładowe drzewo T_1 o $n = 9$ wierzchołkach i wyróżnionym zbiorze $B = \{2, 5\}$. Mamy tu dwa minimalne zbiory blokujące: $\{1, 4, 6\}$ i $\{1, 6, 7\}$.

Zadanie można przeformułować następująco: dane jest n -wierzchołkowe drzewo, w którym wyróżniono podzbiór wierzchołków B . Należy znaleźć najmniejszy blokujący zbiór wierzchołków (rozłączny z B), taki że każda ścieżka z dowolnego wierzchołka zbioru B do dowolnego liścia drzewa musi przechodzić przez co najmniej jeden wierzchołek ze zbioru blokującego (patrz drzewo T_1 na rysunku 1).

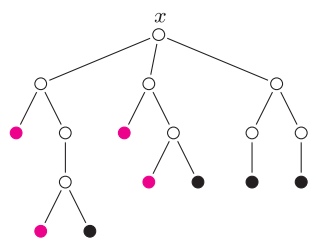


Rys. 2. Drzewo T_2 . Minimalny zbiór blokujący ma 7 wierzchołków.

Na początek wypróbujmy kilku kandydatów na zbiór blokujący. Oczywiście jest, że zbiór wszystkich liści w drzewie jest zbiorem blokującym (zakładamy, że B nie zawiera liścia, w przeciwnym przypadku zbiór blokujący nie istnieje). Również jest nim zbiór wszystkich niewyróżnionych sąsiadów wierzchołków z B . Dość łatwo się jednak przekonać, że żaden z nich nie musi być minimalny – dla drzewa T_1 są to zbiory $\{1, 6, 8, 9\}$ oraz $\{1, 3, 4, 6\}$; oba mają po 4 wierzchołki.

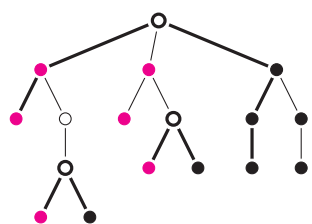
Zacznijmy jednak od zbioru liści i spróbujmy usunąć z niego nadmiarowe wierzchołki. Jeśli jedyny sąsiad u liścia w należy do zbioru B , to każdy zbiór blokujący musi zawierać liść w (np. każdy zbiór blokujący dla drzewa T_1 musi zawierać wierzchołki 1 i 6). Z drugiej strony, jeśli wierzchołek u nie należy do B , to istnieje minimalny zbiór blokujący, który nie zawiera liścia w . Jest tak dlatego, że każda ścieżka z B do w przechodzi przez u , więc, blokując wierzchołek u zamiast wierzchołka w , dostajemy równie dobre rozwiązanie. Postępując w ten sposób z drzewem T_1 , pozbedzimy się liści i znajdziemy zbiór blokujący $\{1, 4, 6\}$, ale nie dla każdego drzewa tak znaleziony zbiór będzie minimalny (patrz drzewo T_2 na rysunku 2).

Zwodnicze jest, że w treści zadania liście oraz wyróżnione wierzchołki pełnią nieco inną rolę (w szczególności można blokować liście, ale nie wierzchołki z B). Możemy jednak nieznacznie przeformułować treść zadania, aby te role stały się w pełni symetryczne. Zauważyliśmy już, że musimy blokować jedynie liście sąsiadujące z B , a ponieważ nie wpływają one na resztę wierzchołków, możemy je dodać do zbioru blokującego i usunąć z drzewa. Następnie oznaczmy zbiór pozostałych liści przez A . Składową w drzewie nazwiemy maksymalny zbiór wierzchołków, z których każde dwa można połączyć ścieżką, której wewnętrzne wierzchołki nie należą do zbioru $A \cup B$. Przykładowo w drzewie T_2 mamy jedną składową zawierającą 17 wierzchołków, a gdyby wierzchołek x należał do B , to mielibyśmy trzy składowe, o licznosciach 6, 6 i 7. Zauważmy, że zbiór blokujący możemy wyznaczyć dla każdej składowej niezależnie. Będzie to taki podzbiór wierzchołków spoza $A \cup B$, że każda ścieżka ze zbioru A do zbioru B musi przecinać ten podzbiór.



Rys. 3. Jedyna składowa drzewa T_2 , ukorzeniona w x . Wierzchołki z A zaznaczone zostały kolorem, wierzchołki z B są czarne.

Weźmy zatem składową i ukorzeńmy ją w dowolnym wierzchołku spoza $A \cup B$ (rys. 3). Zastosujemy teraz programowanie dynamiczne – przeglądając drzewo składowej od liści do korzenia, w każdym poddrzewie będziemy konstruować minimalny zbiór blokujący. Jednocześnie każdy wierzchołek w będziemy wrzucać do jednego z trzech zbiorów: S_A (jeśli poddrzewo zaczepione w w zawiera taki wierzchołek z A , do którego ścieżka z w nie zawiera zablokowanych wierzchołków), S_B (poddrzewo to zawiera niezablokowany wierzchołek z B) oraz S (wszystkie wierzchołki z $A \cup B$ w tym poddrzewie są zablokowane – być może z powodu dodania wierzchołka w do zbioru blokującego).



Rys. 4. Wierzchołki składowej przydzielone do zbiorów S , S_A , S_B zaznaczone są odpowiednio na białym, kolorowo i czarno. Wyróżniono również wierzchołki minimalnego zbioru blokującego oraz odpowiadające im ścieżki.

Wierzchołki ze zbiorów A i B łądzą odpowiednio w zbiorach S_A i S_B . Rozważmy teraz wierzchołek wewnętrzny w ; jeśli ma on takie dwoje dzieci, z których jedno należy do S_A , a drugie należy do S_B , to przez wierzchołek w przechodzi (co najmniej jedna) niezablokowana ścieżka p_w łącząca pewien wierzchołek z A z pewnym wierzchołkiem z B . Dodajemy zatem w do zbioru blokującego oraz do zbioru S . W przeciwnym przypadku wszystkie dzieci w należą do zbioru S , $S_A \cup S$ lub $S_B \cup S$ i dodajemy wierzchołek w odpowiednio do zbioru S , S_A lub S_B (rys. 4).

Jasne jest, że w ten sposób skonstruujemy poprawny zbiór blokujący W . Dowodem na jego minimalność jest skonstruowany, niejako przy okazji, zbiór ścieżek $\{p_w \mid w \in W\}$, które są rozłączne, a każda musi zawierać co najmniej jeden wierzchołek z W . Złożoność czasowa rozwiązania to $O(n)$.

Tomasz IDZIASZEK

Pierwsza wspólna obserwacja pięknych rzadkich rozpadów

Ukazaniu się tego numeru *Delty* będzie, mam nadzieję, towarzyszyć prezentowanie wstępnych wyników uzyskanych po miesiącu działania LHC przy nowej, wyższej energii trzynastu bilionów elektronowoltów (13 TeV).

Natomiast w marcu ukazała się praca [1], w której, dzięki wspólnej analizie danych zebranych przez zespoły badawcze CMS (ang. *Compact Muon Solenoid*) i LHCb (ang. *Large Hadron Collider beauty*), udało się po raz pierwszy zaobserwować bardzo rzadki rozpad mezonu B_s^0 na parę mion – antymion. Dodatkowo uzyskano przesłankę o zachodzeniu jeszcze rzadszego rozpadu $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

Oba mezony są zbudowane z pary masywnego antykwarku \bar{b} oraz lekkiego kwarku s (w przypadku B_s^0) lub bardzo lekkiego d (w przypadku B^0). Odpowiednie antymezyony zawierają kwark b oraz lekki antykwark (\bar{s} lub \bar{d}).

Wynik jest niezwykle interesujący z kilku powodów. Rozpady te zachodzą poprzez oddziaływania słabe, które w najniższym rzędzie tzw. rachunku zaburzeń (rozwinęcia amplitudy względem bardzo małej stałej sprzężenia) są zabronione. Stosunek rozgałęzienia, czyli względne prawdopodobieństwo zachodzenia tych rozpadów, obliczone w ramach Modelu Standardowego, wynosi odpowiednio zaledwie cztery na miliard oraz jeden na dziesięć miliardów. Istnienie nieznanymi cząstek przewidywanych przez rozszerzenia Modelu Standardowego mogłyby te prawdopodobieństwa istotnie zmienić. Zaobserwowanie takich odstępstw świadczyłoby więc o istnieniu takich scenariuszy i odwrotnie: pomiar stosunku rozgałęzienia na poziomie przewidywania Modelu Standardowego nakładałby istotne ograniczenia na masy takich hipotetycznych obiektów (bo im bardziej masywna cząstka jest wymieniana, tym bardziej musi być wirtualna i tym mniejsze prawdopodobieństwo zajścia procesu).

Obydwa zespoły badawcze już wcześniej opublikowały wyniki osobnych poszukiwań, na podstawie danych zebranych w 2011 roku przy energii zderzeń proton-proton 7 TeV oraz w roku 2012 przy energii 8 TeV. Statystyczna istotność rejestrowanego sygnału nie przekroczyła jednak progu tzw. 5σ (prawdopodobieństwo odrzucenia prawdziwej hipotezy braku sygnału nie większe od $2,9 \cdot 10^{-7}$).

Wstępny szacunek pokazywał jednak, że tę umowną granicę odkrycia powinna przekroczyć wspólna analiza. To zmobilizowało zespoły badawcze CMS i LHCb do jej przeprowadzenia. Jest to pierwsze takie wspólne opracowanie danych przy LHC.

Koncepcja obu eksperymentów jest zupełnie różna. CMS jest detektorem uniwersalnym, nastawionym na poszukiwanie bezpośredniej produkcji masywnych nieznanymi cząstek. Jest detektorem hermetycznym,

pozwalającym na rejestrację cząstek wtórnych w pełnym kącie bryłowym, z optymalnymi możliwościami detekcji pod dużymi kątami w stosunku do kierunku zderzających się protonów. Cząstki zawierające kwark b są przede wszystkim tłem, które trzeba umieć ograniczyć, ale mogą pojawiać się wśród produktów rozpadów niektórych z poszukiwanych sygnałów. Dlatego efektywna detekcja pięknych cząstek (b jak ang. *beauty*) była jednym z wymogów projektowych.

LHCb, jak samo rozwinięcie nazwy wskazuje, jest detektorem zaprojektowanym do fizyki cząstek b . Jest on nastawiony tylko na rejestrację cząstek emitowanych pod małymi kątami i tylko po jednej stronie punktu oddziaływania. Działa on przy mniejszym stopniu zogniskowania wiązek, co daje mniejszą liczbę zderzeń na jedno przecięcie (kilka zamiast kilkudziesięciu). Może sobie jednak pozwolić na większą częstość zapisu interesujących przypadków (bo ilość informacji na pojedynczy przypadek jest mniejsza).

W ten sposób eksperymenty się uzupełniają. Obydwa zarejestrowały podobną liczbę niemal biliona cząstek b , wśród których oczekiwano 100 (10) poszukiwanych rozpadów $B_s^0 (B^0) \rightarrow \mu^+ \mu^-$.

Głównymi zmiennymi odróżniającymi sygnał od tła była masa układu mion – antymion oraz odpowiedź wielokryterialnej procedury selekcyjnej. Dane zostały podzielone na dwadzieścia (CMS – 12, LHCb – 8) rozłącznych kategorii o różnym przewidywanym stosunku sygnału do tła. Procedura selekcji była dostrajana z pominięciem przedziału masy układu mion – antymion, w którym był oczekiwany sygnał. Po odsłonięciu tego okna okazało się, że sygnał $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ został znaleziony na poziomie istotności $6,2\sigma$ (oczekiwano $7,4\sigma$), a $B^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ na poziomie $3,2\sigma$ (oczekiwano $0,6\sigma$).

W ten sposób zwieńczone zostało 30 lat wysiłków kilku generacji naukowców (pierwsze ograniczenie, na poziomie ponad milion razy większym od przewidywania Modelu Standardowego, zostało opublikowane przez eksperyment CLEO w 1984 roku). Polscy naukowcy są współautorami publikacji [1].

Pomiar stosunku rozgałęzienia jest, w ramach niepewności pomiarowej, zgodny z przewidywaniem Modelu Standardowego. Odchylenie od przewidywania dla samego B^0 (oraz dla B^0 względem B_s^0) jest na poziomie (powyżej) 2σ . Do niezgodności daleko, ale to i tak łakomy kąsek dla wygłodniałych poszukiwaczy efektów wykraczających poza Model Standardowy. Właśnie zbierane (przy energii 13 TeV) dane pozwolą, w perspektywie dwóch–trzech lat, na istotne poprawienie precyzji pomiaru.

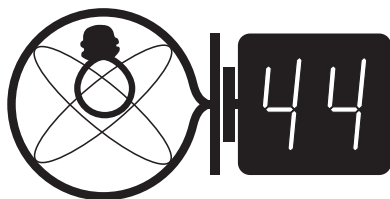
Piotr ZALEWSKI

[1] CMS & LHCb Collaborations, *Observation of the rare $B_s^0 \rightarrow \mu^+ \mu^-$ decay from the combined analysis of CMS and LHCb data*, *Nature* (2015) doi:10.1038/nature14474.

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie

i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



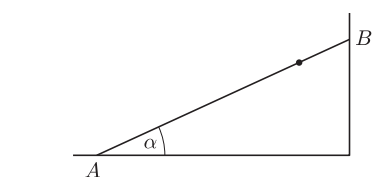
Rozwiązania zadań z fizyki z numeru 3/2015

Redaguje **Elżbieta ZAWISTOWSKA**

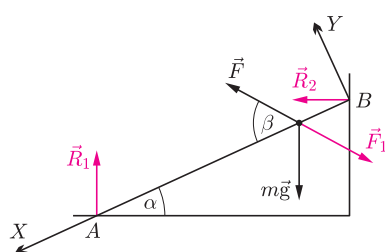
Przypominamy treść zadań:

594. Żuk pełźnie po sztywnej słomce, opartej o gładką podłogę i gładką pionową ściankę (rys. 1). Słomka jest jednorodna, tworzy z poziomem kąt α , jej długość wynosi l , masa słomki jest zaniedbywalna w porównaniu z masą żuka m . Prędkość początkowa żuka w punkcie B wynosi v_0 . Jak musi poruszać się żuk, aby słomka pozostawała nieruchoma? Po jakim czasie dopełnie on do punktu A ?

595. W pionowo ustawionym cylindrze zamkniętym tłokiem znajduje się w stanie równowagi n moli jednoatomowego gazu doskonałego o temperaturze T_0 . Układ jest izolowany cieplnie od otoczenia. Gaz ściśnięto za pomocą tłoka, wykonując nad gazem pracę W . Następnie tłok puszczono i zatrzymał się on w nowym położeniu równowagi. Jaka jest temperatura końcowa gazu? Ciśnienie zewnętrzne jest stałe.



Rys. 1



Rys. 2

594. Wprowadźmy współrzędne XY jak na rysunku 2. Niech żuk znajduje się w odległości x od początku układu B . Siły działające na słomkę zaznaczono na rysunku kolorem. Są to siły reakcji R_1 i R_2 prostopadłe odpowiednio do podłogi i ścianki oraz siła F_1 , jaką żuk działa na słomkę. Siłę ciężkości działającą na słomkę pomijamy zgodnie z treścią zadania. Słomka nie porusza się, więc siły działające na nią równoważą się: $\vec{F}_1 + \vec{R}_1 + \vec{R}_2 = 0$. Na żuka działa siła ciężkości oraz siła reakcji słomki $\vec{F} = -\vec{F}_1$, która tworzy ze słomką nieznaną kąt β (siły te zaznaczono na rysunku na czarno). Równanie ruchu żuka ma postać $m\vec{a} = \vec{F} + m\vec{g} = \vec{R}_1 + \vec{R}_2 + m\vec{g}$. Przyspieszenie \vec{a} skierowane jest wzdłuż słomki. Stąd $R_2 = ma \cos \alpha$ oraz $R_1 = mg - ma \sin \alpha$. Momenty sił działających na słomkę względem dowolnego punktu równoważą się. Względem punktu B warunek ten ma postać: $lR_1 \cos \alpha = xF_1 \sin \beta$. Siły działające na żuka prostopadłe do słomki równoważą się: $F_1 \sin \beta = F \sin \beta = mg \cos \alpha$, zatem $-al \sin \alpha / g = x - l$, gdzie

$$a = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Wprowadzając nową zmienną $z = x - l$, otrzymujemy równanie

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{gz}{l \sin \alpha}.$$

Jest to równanie oscylatora harmonicznego o częstości $\omega = \sqrt{g/(l \sin \alpha)}$. Ruch żuka opisuje funkcja $x = A \sin \omega t + B \cos \omega t + l$ z warunkami początkowymi: $x(0) = B + l = 0$ oraz $v(0) = \omega A = v_0$. Zatem $x = v_0 \sin \omega t / \omega + l(1 - \cos \omega t)$. Kładąc $x = l$, otrzymujemy czas τ podróży żuka do końca słomki:

$$\operatorname{tg}(\omega\tau) = \frac{l\omega}{v_0}.$$

595. Niech ciśnienie zewnętrzne wynosi p_0 . Oznaczmy objętości i temperatury gazu w kolejnych stanach równowagi przez V_0, V_1, V_2 oraz T_0, T_1, T_2 . Zmiana energii wewnętrznej podczas ściskania gazu wynosi $\Delta U_1 = nc_v(T_1 - T_0) = W + p_0(V_0 - V_1)$ a po oswoobodzeniu tłoka $\Delta U_2 = nc_v(T_1 - T_2) = -p_0(V_2 - V_1)$, gdzie molowe ciepło właściwe przy stałej objętości $c_v = 3R/2$. Całkowita zmiana energii wewnętrznej $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2 = nc_v(T_2 - T_0) = W + p_0(V_0 - V_2)$. Z równania Clapeyrona $p_0(V_0 - V_2) = nR(T_0 - T_2)$. Szukana temperatura końcowa wynosi

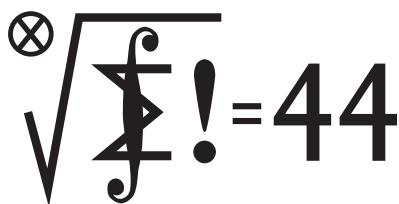
$$T_2 = T_0 + \frac{2W}{5nR}.$$

Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 F** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 588 ($WT = 2,29$) i 589 ($WT = 3,23$) z numeru 12/2014

Andrzej Idzik	Bolesławiec	37,76
Tomasz Rudny	Warszawa	37,68
Jacek Konieczny	Poznań	27,92
Marian Lupieżowicz	Gliwice	26,26
Michał Koźlik	Gliwice	22,60
Ryszard Woźniak	Kraków	22,51
Bogusław Mikielewicz	Brodnica	22,22

Witamy ponownie obecnego po przerwie w zestawieniu pana Bogusława Mikielewicza, życzymy także sukcesów nowym uczestnikom zmagani ligowych: panom Jędrzejowi Biedrzyckiemu, Karolowi Łukanowskiemu i Janowi Zambrzyckiemu.

Klub 44



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 691 ($WT = 2,17$) i 692 ($WT = 1,80$) z numeru 12/2014

Piotr Kumor	Olsztyn	47,64
Wojciech Maciak	Warszawa	47,06
Marek Spychała	Warszawa	42,75
Wojciech Tobiś	Praszk	38,82
Grzegorz Karpowicz	Wrocław	37,05
Janusz Olszewski	Warszawa	35,83
Krzysztof Maziarz	Kraków	35,37
Paweł Najman	Kraków	31,92

Piotr Kumor – superWeteran Ligi – konkretnie: czterokrotny; właśnie przekroczył magiczną linię 44 po raz dwunasty. Zaś pan Wojciech Maciak zaokrąglił liczbę członków Klubu 44 M do 5^3 .

Rozwiązania zadań z matematyki z numeru 3/2015

Redaguje Marcin E. KUCZMA

Przypominamy treść zadań:

697. Dana jest liczba naturalna $N > 1$ bezkwadratowa (tj. niepodzielna przez kwadrat żadnej liczby naturalnej większej od 1). Spośród wszystkich dodatnich dzielników liczby N losujemy kolejno, bez zwracania, dwa dzielniki: k, m . Rozważamy zdarzenia: (A) liczby k, m są względnie pierwsze; (B) liczba m jest podzielna przez k . Które z tych zdarzeń jest bardziej prawdopodobne? Czy odpowiedź zmieni się, gdy losowanie będzie wykonywane ze zwracaniem?

698. Dla ustalonej liczby naturalnej $n \geq 2$ znaleźć najmniejszą wartość sumy

$$\left\lfloor \frac{1}{x_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{x_2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor,$$

gdy x_1, x_2, \dots, x_n są dowolnymi liczbami rzeczywistymi dodatnimi, spełniającymi warunek $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

697. Wygodnie będzie zacząć od przypadku, gdy losowanie jest ze zwracaniem. Wynik losowania to wówczas para uporządkowana (k, m) dzielników liczby N . Zdarzenia A, B identyfikujemy z odpowiednimi podzbiorami zbioru wszystkich takich par. Gdy para (k, m) należy do A , liczby k, m są względnie pierwszymi dzielnikami liczby N , zatem także iloczyn $q = km$ jest dzielnikiem N . Oczywiście k dzieli q , więc para (k, q) należy do B .

Na odwrót, gdy (k, q) jest dowolną parą ze zbioru B (więc $k \mid q$), wtedy iloraz $m = q/k$ też jest dzielnikiem N , i to względnie pierwszym z k (bo gdyby k, m miały wspólny dzielnik $p > 1$, liczba q , więc i N , byłaby podzielna przez p^2 , wbrew założeniu zadania). Zatem para (k, m) należy do A .

Opisane operacje $(k, m) \mapsto (k, q), (k, q) \mapsto (k, m)$ są wzajemnie odwrotne. Stąd wynika, że zbioru A i B są równoliczne; zaś zdarzenia A, B są (przy losowaniu ze zwracaniem) jednakowo prawdopodobne.

Losowanie bez zwracania eliminuje dublety, tzn. pary postaci (ℓ, ℓ) , gdzie $\ell \mid N$. W poprzednim modelu, do zbioru A należała tylko jedna taka para $(1, 1)$; do B należały wszystkie. Więcej par zostało wyeliminowanych z B , wobec czego (przy losowaniu bez zwracania) zdarzenie A jest bardziej prawdopodobne niż B .

698. Skorzystamy ze znanej nierówności $(\sum x_i)(\sum 1/x_i) \geq n^2$; we wszystkich symbolach sumowania przyjmujemy $i = 1, \dots, n$. Przy warunku $\sum x_i = 1$ mamy więc $\sum 1/x_i \geq n^2$. Dla każdej liczby rzeczywistej t słuszne jest oszacowanie $\lfloor t \rfloor > t - 1$. Stąd

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor > \sum \left(\frac{1}{x_i} - 1 \right) \geq n^2 - n,$$

czyli

$$\sum \left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor \geq n^2 - n + 1.$$

W uzyskanej zależności można osiągnąć równość, biorąc na przykład

$$x_1 = \dots = x_{n-1} = \frac{n^2}{n^3 - 1}, \quad x_n = \frac{n^2 - 1}{n^3 - 1}.$$

Widać, że $\sum x_i = 1$. Dla $i = 1, \dots, n-1$ mamy przy tym

$$\left\lfloor \frac{1}{x_i} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2} \right\rfloor = \left\lfloor n - \frac{1}{n^2} \right\rfloor = n - 1,$$

zaś dla $i = n$:

$$\left\lfloor \frac{1}{x_n} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n^3 - 1}{n^2 - 1} \right\rfloor = \left\lfloor n + \frac{1}{n+1} \right\rfloor = n.$$

Tak więc $\sum \lfloor 1/x_i \rfloor = (n-1)(n-1) + n = n^2 - n + 1$ (dla tak określonych liczb x_i ; można dać wiele innych przykładów). Wniosek: liczba $n^2 - n + 1$ to szukane minimum.

Prosto z nieba: O rozmiarach gwiazd

Astronomiczne rozmiary kosmosu bardzo łatwo wywołują u nieprzyzwyczajonych zawroty głowy i problemy z wyobrażeniem sobie wielkości i odległości do różnych obiektów astrofizycznych. W niektórych przypadkach prowadzi to nawet do zupełnej znieczulicy w kwestii niezwyklej rozpiętości skal obiektów występujących w naszym Wszechświecie.

Słońce jest traktowane przez Ziemiaków jako naturalny punkt porównania mas, jasności i rozmiarów innych gwiazd. Na tle populacji galaktycznej jest jednak dość przeciętną, średniej wielkości gwiazdą – promień około 700 tys. km (nieco ponad stukrotnie większy niż ziemski) i masie $2 \cdot 10^{30}$ kg (około 330 tys. razy więcej niż Ziemia). Jest w średnim wieku (4,5 mld lat) i znajduje się na tzw. ciągu głównym, czyli wśród *karłów*: niestarych gwiazd, których źródłem energii jest przemiana wodoru

Zachęcamy do przestudiowania diagramu Hertzsprung–Russella, czyli zależności temperatury względem obserwowanej jasności dla różnych mas początkowych gwiazd.

Gwiazdy typu Wolfa–Rayeta są masywnymi ($> 20 M_{\odot}$), zaawansowanymi ewolucyjnie obiektami, które dość efektywnie tracą masę przez silny wiatr z górnych warstw atmosfery.



Nieczęste zjawisko drugiej pełni w ciągu tego samego miesiąca nosi nazwę *niebieskiego księżyca* (ang. *blue moon*), z czym zapewne wiąże się fraza „once in a blue moon” jako określenie wydarzenia niezwykle rzadkiego.

Prawdziwym hitem lipca jest jednak misja satelitarna NASA New Horizons, która w połowie miesiąca powinna dotrzeć w okolice Plutona (14^m , jasność wymagająca profesjonalnego teleskopu), znajdującego się w gwiazdozbiornie Strzelca w okolicy gwiazdy $\xi 2$ Sgr; Strzelec będzie widoczny nad południowym horyzontem około północy. Sonda New Horizons przeleci obok Plutona 14 VII, robiąc pierwsze w historii zdjęcia „z bliska” planecie i jej lodowym księżycem – niecierpliwie czekamy na pierwsze dane z przedmieść

w hel w jądrze. Za kolejne 5 mld lat Słońce w trakcie ewolucji opuści ciąg główny. Będzie wtedy o wiele większe (rozmiaru orbity Ziemi) i zmieni kolor na czerwony. Źródłem energii tego typu gwiazd – *czerwonych olbrzymów* – jest wodor „palony” w otoczce helowego jądra. W kolejnym etapie produkcja energii wróci do jądra, tym razem podczas zamiany helu na cięższe pierwiastki. Ostatecznie, po etapie odrzucenia zewnętrznych warstw (które utworzą mgławicę planetarną), to właśnie powoli stygnące jądro Słońca – *biały karzeł* wielkości Ziemi – będzie jedyną pozostałością po Słońcu.

Początkowa masa gwiazdy na ciągu głównym i jej skład decyduje o jej późniejszym rozmiarze. Ogólna reguła brzmi: otyli żyją gwałtownie i krótko. Bardzo masywne gwiazdy ewoluują w skali milionów lat, by pod koniec życia wybuchnąć jako supernowe.

Jak duże mogą być gwiazdy? Obecną rekordzistką jest UY Scuti, sklasyfikowana jako *hiperolbrzym*, czyli gwiazda dużo większa nie tylko od *olbrzymia*, ale także od *superolbrzymia*, tj. gwiazdy dostatecznie masywnej, spalającej hel i kolejne cięższe pierwiastki, aż do żelaza w jądrze. Promień UY Scuti wynosi 1700 promieni Słońca i zmienia się w trakcie pulsacji o około 200 promieni Słońca. Rozmiar gwiazdy sięga więc prawie 9 jednostek astronomicznych, czyli odległości Słońce–Saturn! Zewnętrzne, rzadkie warstwy atmosfery przechodzące w wypływ wiatrowy rozciągają się aż do orbity Plutona. UY Scuti nie jest wcale najmasywniejszą gwiazdą znaną astronomom – waży około $30 M_{\odot}$, podczas gdy obecny rekord masy należy do gwiazdy typu Wolfa–Rayeta, R136a1 (około $265 M_{\odot}$). Na drugim końcu skali znajdują się wspomniane już białe karły, które mogą być tak małe jak skaliste globy typu ziemskiego, oraz gwiazdy neutronowe o promieniach 10–15 km.

Michał BEJGER

Niebo w lipcu

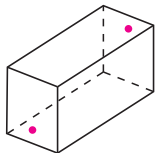
Lipiec zacznie się w tym roku spektakularną koniunkcją Wenus ($-4,1^m$) i Jowisza ($-1,35^m$). By zobaczyć to nieczęste zjawisko – planety zblizną się do siebie na odległość kątową $0,3^{\circ}$ – należy obserwować gwiazdozbiór Lwa zachodzący wraz ze Słońcem pierwszego dnia miesiąca. Mars natomiast przebywa w gwiazdozbiornie Bliźniąt i jest widoczny o świcie – od początku czerwca oddala się od Słońca, powoli zwiększając jasność ($1,85^m$ w połowie lipca; 16 VII około 6 rano spotka się z Merkurem o jasności $-1,4^m$). Saturna ($0,5^m$) można będzie obserwować w pierwszej połowie nocy w gwiazdozbiornie Wagi. Księżyc będzie miał w lipcu dwie pełnie, 2 i 31 VII (nów 16 VII). Druga, niebieska pełnia może trochę przeszkadzać w obserwacji roju Delta Akwaryd (radiant w Wodniku), który będzie aktywny od połowy lipca do połowy sierpnia; maksimum 28 VII. Rój ten jest związany z przechodzącymi blisko Słońca pozostałościami komet Marsdena i Krachta, i przeważnie wykazuje zadowalającą aktywność (zenitalna liczba godzinna 20).

naszego układu planetarnego! Po tym krótkim rendez-vous sonda oddali się jeszcze bardziej od Ziemi w celu zbadania jeszcze bardziej odległych i tajemniczych obiektów w otaczającym Układ Słoneczny pasie Kuipera. W tym samym czasie inna misja NASA, Dawn, będzie kończyć zbieranie podstawowych danych o wiele bliższej Ziemi planecie karłowatej Ceres, którą można obserwować przez lornetkę w sąsiadującym ze Strzelcem gwiazdozbiornie Mikroskopu.

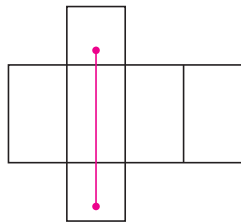
M. B.

W rozwiązaniach wielu zadań kluczowe jest rozłożenie danej bryły tak, by uzyskać jej siatkę. Jeśli z kolei chcemy zbudować model wielościanu, często rysujemy jego siatkę, wycinamy, składamy... Siatki to przydatne narzędzie, jednakże – jak to z narzędziami bywa – trzeba ostrożnie się nimi posługiwać. Proszę ocenić poprawność poniższych trzech stwierdzeń.

1. Pokój ma kształt prostopadłościanu o wymiarach $3\text{ m} \times 3\text{ m} \times 5\text{ m}$ (rys. 1a). Nad środkiem jednej z krótszych krawędzi podłogi, na wysokości 10 cm, siedzi pająk. Chce on dotrzeć do punktu położonego 10 cm pod przeciwną krawędzią sufitu. Najkrótszą drogę, o długości 8 m, oznaczono kolorowym odcinkiem na siatce przedstawionej na rysunku 1b.

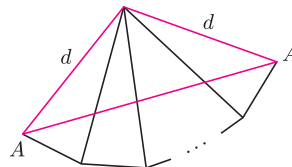


Rys. 1a

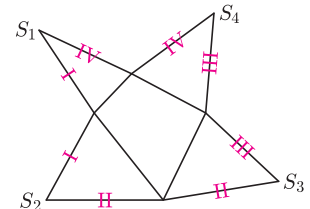


Rys. 1b

2. Dany jest ostrosłup prawidłowy o krawędzi bocznej długości d . W wierzchołku A podstawy siedzi pająk. Chce on przejść po powierzchni bocznej, odwiedzając wszystkie krawędzie boczne (być może w ich końcach) i wrócić do punktu wyjścia. Z rysunku 2 i z nierówności trójkąta wynika, że istnieje droga krótsza niż $2d$.



Rys. 2

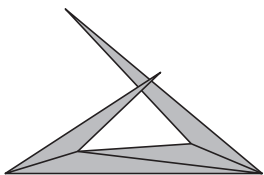


Rys. 3

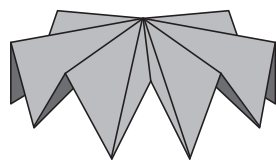
3. Rysunek 3 przedstawia siatkę ostrosłupa.

To nie koniec kłopotów z siatkami. Jeśli model wielościanu rozcinamy wzdłuż pewnych krawędzi, by uzyskać jego siatkę, może nas spotkać niespodzianka przedstawiona na rysunku 4 – siatka nachodzi sama na siebie! Nie da się jej narysować na kartce, wyciąć i złożyć. Ale łatwo ją poprawić: odciąć lewą ścianę i przykleić wzdłuż którejś z jej pozostałych krawędzi.

Czy zawsze, gdy otrzymamy siatkę, która sama na siebie nachodzi, istnieje inna siatka, pozbawiona tej wady?



Rys. 4. Siatka czworościanu.



Rys. 5

Rysunek 5 przedstawia powierzchnię z brzegiem. Rozcięcie jednej krawędzi pozwala ją „rozpłaszczyć”, ale nachodzi wtedy sama na siebie, gdyż suma kątów płaskich przy jej centralnym wierzchołku przekracza 360° . Rozcięcie drugiej krawędzi sprawia, że powierzchnia rozpada się na dwie części. Nie istnieje więc żadna jej siatka, która nie nachodziłaby sama na siebie.

Istnieją również wielościany o tej własności. Wszystkie znane przykłady są wklęsłe. Nie wiadomo, czy istnieje taki wielościan wypukły – problem ten, zwany *hipotezą Shepharda*, jest (o ile wiem) otwarty.

Wklęsłe wielościany bez „dobrych” siatek opisano np. na stronie <http://erikdemaine.org/papers/Ununfoldable/paper.pdf>, z której pochodzi też rys. 5.

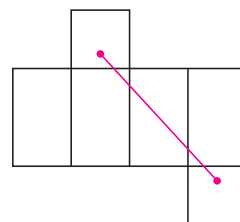
Rys. 4 oraz drugi tego typu przykład przedstawiono na stronie <http://mathworld.wolfram.com/Unfolding.html>.

Rozwiązania

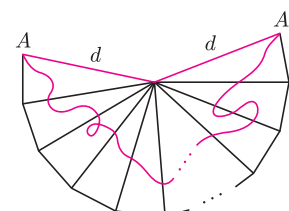
R1. Rysunek 6 przedstawia krótszą drogę, co łatwo sprawdzić, korzystając z twierdzenia Pitagorasa. \square

R2. W przypadku przedstawionym na rysunku 7 każda z możliwych dróg ma długość co najmniej $2d$. \square

R3. Można skserować, wyciąć, spróbować złożyć „siatkę” i zobaczyć, że S_1 z S_2 sklejają się w innym punkcie, niż S_3 z S_4 . Wynika to z faktu, że na rysunku 3 wysokości trójkątów, poprowadzone z wierzchołków S_1, S_2, S_3, S_4 , nie przecinają się w jednym punkcie – spodku wysokości ostrosłupa – a powinny. \square



Rys. 6. $\sqrt{(5,2)^2 + 6^2} < 8$.



Rys. 7

Zadanie 1 jest modyfikacją przykładu z książki K. Ciesielskiego *102 zadania dla małych, średnich i dużych sympatyków matematyki*. Siatkom i dziwnym „rozpłaszczeniom” poświęcony był także *deltoid* 8/2014.