

W następnym numerze demaskujemy wybory



SPIS TREŚCI NUMERU 1 (512)


Prawda o matematykach
Szymon Toruńczyk str. 1

 Zadania str. 4

Co żarówka ma do cewki?
Oskar Grocholski str. 5

Dowody i obliczenia
Witold Sadowski str. 6


Kilka słów o flogistonie, czyli
o tym, jak błędna teoria
przyniosła nauce wiele
pożytku
Mikołaj Jędrusiak str. 10

 Dywany Antoniego
Antoni Długosz str. 12

Uczniowie
Marek Kordos str. 14

Kongruencje z królikiem
Robert Kwieciński str. 16

Migawka informatyczna:
Czemu nikt nie wierzy, że
 $P = NP$? str. 18

 Szkolny Festiwal
Nauki
Magdalena Fikus str. 19


Informatyczny kącik
olimpijski (101):
Coś się popsulo
Tomasz Kazana str. 20

Aktualności str. 21

Klub 44 str. 22

Prosto z nieba: Niezwykle
powolny pulsar str. 24

Niebo w styczniu str. 24

 Czarno-białe mapy
Joanna Jaszewska str. 25

Miesięcznik *Delta* – *matematyka, fizyka, astronomia, informatyka* jest wydawany przez Uniwersytet Warszawski przy współpracy towarzystw naukowych: Polskiego Towarzystwa Matematycznego, Polskiego Towarzystwa Fizycznego, Polskiego Towarzystwa Astronomicznego i Polskiego Towarzystwa Informatycznego.

Komitet Redakcyjny: dr Waldemar Berej, dr Piotr Chrzastowski-Wachtel, dr Krzysztof Ciesielski – wiceprzewodniczący, prof. dr hab. Bożena Czerny, dr Andrzej Dąbrowski, prof. dr hab. Marek Demiański, prof. dr hab. Krzysztof Diks, dr Tomasz Greczyło, prof. dr hab. Paweł Idziak, dr hab. Agnieszka Janiuk, dr hab. Marcin Kiraga, prof. dr hab. Andrzej Majhofer, prof. dr hab. Zbigniew Marciniak, dr hab. Zygmunt Mazur, dr Adam Michalec, prof. dr hab. Michał Nawrocki – przewodniczący, dr Zdzisław Pogoda, dr Paweł Preś, prof. dr hab. Wojciech Rytter, prof. dr hab. Paweł Strzelecki.

Redaguje kolegium w składzie: Wiktor Bartol, Michał Bejger, Szymon Charzyński – z-ca red. nac., Wojciech Czerwiński, Tomasz Kazana, Piotr Kaźmierczak, Krystyna Kordos – sekr. red., Marek Kordos – red. nac., Kamila Łyczek, Katarzyna Małek, Łukasz Rajkowski, Anna Rudnik, Krzysztof Rudnik, Piotr Zalewski.

Adres do korespondencji:
Instytut Matematyki UW, Redakcja *Delty*, ul. Banacha 2, pokój 4020,
02-097 Warszawa, e-mail: delta@mimuw.edu.pl tel. 22-55-44-402.

Okładki i ilustracje: Anna Ludwicka Graphic Design & Serigrafia;
rysunki techniczne: Stanisław Walczak.

Skład systemem \TeX wykonała Redakcja.

Wydrukowano w Drukarni Greg, ul. Górczewska 216 p. 101, 01-460 Warszawa.

PRENUMERATA

Garmond Press: www.garmondpress.pl

Kolporter: www.kolporter.com.pl

RUCH S.A.: www.ruch.com.pl, infolinia 804-200-600

Prenumerata realizowana przez RUCH S.A.:

Cena prenumeraty w 2017 roku wynosi 4 zł za egzemplarz.

Zamówienia na prenumeratę w wersji papierowej można składać bezpośrednio na stronie www.prenumerata.ruch.com.pl

Ewentualne pytania prosimy kierować na adres e-mail: prenumerata@ruch.com.pl lub kontaktując się z Centrum Obsługi Klienta RUCH pod numerem: 801 800 803 lub 22 693 70 00 – czynne w dni robocze w godzinach 7⁰⁰–17⁰⁰. Koszt połączenia wg taryfy operatora.

Numery archiwalne (od 1987 r.) można nabyć w Redakcji osobiście lub listownie.

Strona internetowa (w tym artykuły archiwalne, linki itd.): deltami.edu.pl

Można nas też znaleźć na [facebook.com/Delta.czasopismo](https://www.facebook.com/Delta.czasopismo)

Wydawca: Uniwersytet Warszawski



W poprzednim numerze zamieściliśmy artykuł Marka Kordosa motywujący oraz nieformalnie opisujący formalne podejście do matematyki.

Prawda o matematykach

Szymon TORUŃCZYK*

Jakie jest największe miasto na świecie? Czy wirus jest organizmem żywym? Jaki jest najpiękniejszy obraz Tycjana? Są to proste pytania, na które nie ma jednoznacznej odpowiedzi. Przyczyną jest brak jasno określonych kryteriów. Jedną z cech wyróżniających matematykę spośród innych dziedzin życia i nauki jest to, że każde pojęcie ma swoją precyzyjną definicję. Wydaje się więc, że na każde pytanie matematyczne jest jednoznaczna odpowiedź, którą można formalnie uzasadnić. W konsekwencji, nic nie jest brane „na wiarę”. Okazuje się, że nie do końca tak jest!

Rozważmy kilka pytań z teorii liczb. Czy $2 + 2 = 4$? Czy $2 \times 2 = 4$? Czy suma kwadratów długości przyprostokątnych w trójkącie jest równa kwadratowi długości przeciwprostokątnej? Czy dla $n > 2$ równanie $a^n + b^n = c^n$ ma rozwiązanie w zbiorze dodatnich liczbach naturalnych?

Nie ma. Wynik ten jest znany jako Wielkie Twierdzenie Fermata. Pierre de Fermat uznał je za prawdziwe w 1637, lecz zostało to udowodnione dopiero 358 lat później przez Andrew Wilesa.

Czy każda parzysta liczba całkowita większa od dwóch jest sumą dwóch liczb pierwszych?

Jest to słynny problem otwarty pochodzący z roku 1742, znany jako Hipoteza Goldbacha. Jest ona potwierdzona dla wszystkich liczb parzystych mniejszych od $4 \cdot 10^{18} = 4000000000000000000$.

Żeby odpowiedzieć na powyższe pytania, zastanówmy się wpierrw, czym jest liczba 2? Czym jest dodawanie? Czym jest trójkąt, odcinek, jego długość i jej kwadrat? Można odpowiedzieć, że to „oczywiste” lub że to „wiadomo”. Jednak żeby uniknąć nieporozumień, matematycy i filozofowie w XIX wieku uznali, że matematykę należy uprawiać przez dowodzenie tez z pewników, zwanych też aksjomatami – pewnych ustalonych i znanych faktów, niebudzących żadnych wątpliwości. Na przykład często wystarczy wiedzieć, że „liczby naturalne” (czyli nieujemne liczby całkowite) to są obiekty, na których można wykonywać dwie operacje: + zwaną „dodawaniem” oraz \times zwaną „mnożeniem”, że istnieją dwie wyróżnione liczby naturalne, oznaczone 0 oraz 1, takie, że $0 + n = n + 0 = n$ oraz że $n + (m + k) = (n + m) + k$, $n + m = m + n$, dla dowolnych liczb naturalnych m, n, k . Jeżeli zdefiniujemy 2 jako $1 + 1$, 3 jako $2 + 1$, i wreszcie, 4 jako $3 + 1$, to możemy w końcu udowodnić, że $2 + 2 = 4$: z definicji wynika, że $2 + 2 = 2 + (1 + 1)$, a z aksjomatów wynika, że $2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$, i z definicji liczby 3, jest to równe $3 + 1$, co z kolei wynosi 4, na mocy definicji liczby 4. Ale czy nasze aksjomaty są wystarczające, żeby dowodzić innych powszechnie znanych faktów? Np. że $2 \times 2 = 4$? Otóż nie: powyższe aksjomaty są na to zbyt słabe! Okazuje się, że możemy sobie wyobrazić inny „model” liczb niż liczby naturalne wraz z operacjami dodawania i mnożenia, które „znamy z życia”. Można bowiem skonstruować zbiór $\{0, 1, 2, \dots\}$, zdefiniować operację + jako zwykle dodawanie, a operację \times zdefiniować tak, że $m \times n = 0$, dla dowolnych m, n . Ten model będzie spełniał wszystkie aksjomaty podane powyżej. Ale jak tak można!? Przecież „ \times ” miało oznaczać mnożenie, a „wiadomo”, że 2 pomnożone przez 2 daje 4, a nie 0! Jednak już ustaliliśmy, że nie będziemy powoływać się na wiedzę powszechną, lecz tylko na nasze aksjomaty, a te nic takiego nie postulowały. Co więcej, nasze aksjomaty dopuszczają możliwość, że $m \times n = 0$ dla dowolnych m, n , ponieważ pokazaliśmy, że można skonstruować model spełniający nasze aksjomaty, oraz dodatkowo mający powyższą właściwość. A zatem nasze aksjomaty są zbyt słabe, by dowodzić niektórych powszechnie znanych faktów. Rzeczywiście, brakuje nam jeszcze kilku aksjomatów przyjmowanych przez wszystkich matematyków: np. że $n \times 1 = 1 \times n = n$, że $m \times n = n \times m$, że $k \times (m + n) = k \times m + k \times n$, że $(m \times n) \times k = m \times (n \times k)$. Używając tych aksjomatów, możemy dowodzić więcej twierdzeń, np. że $2 \times 2 = 4$, ponieważ $2 \times 2 = 2 \times (1 + 1) = 2 \times 1 + 2 \times 1 = 2 + 2 = 4$.

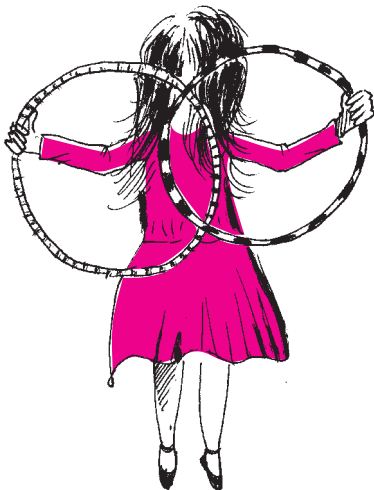
W roku 1889 Giuseppe Peano zaproponował pewien zestaw aksjomatów, nazywany teraz Aksjomatami Peano. Zawierają one wszystkie powyższe

*Instytut Informatyki, Wydział Matematyki, Informatyki i Mechaniki, Uniwersytet Warszawski

aksjomaty i parę innych prostych stwierdzeń znanych ze szkoły podstawowej, np. że $n + 1 \neq 0$ dla wszystkich liczb naturalnych n , oraz że jeżeli $n + 1 = m + 1$, to $n = m$. Wreszcie, Aksjomaty Peano zawierają nieskończenie wiele aksjomatów, które umożliwiają przeprowadzanie dowodów przez indukcję. Mianowicie, dla każdej własności (wyrażonej w języku formalnym) jest aksjomat, który głosi, że jeżeli liczba 0 ma tę własność, oraz że z tego, iż ta własność zachodzi dla liczby n , wynika, że zachodzi też dla liczby $n + 1$, to wówczas ta własność zachodzi dla wszystkich liczb naturalnych. To – z grubsza – są wszystkie Aksjomaty Peano. Co prawda jest ich nieskończenie wiele, ale są *efektywne*, to znaczy, że można napisać prosty program komputerowy, który będzie odpowiadał na pytanie czy dane zdanie jest jednym z Aksjomatów Peano. Inaczej mówiąc, da się je opisać w skończony sposób. Używając tych aksjomatów, z powodzeniem można dowodzić trudnych twierdzeń z teorii liczb, np. że jest nieskończenie wiele liczb pierwszych, że jest nieskończenie wiele trójek pitagorejskich (czyli takich trójek a, b, c , że $a^2 + b^2 = c^2$), lub że każda liczba naturalna jest sumą czterech kwadratów liczb naturalnych (jest to twierdzenie Lagrange’a z roku 1770).

Pozostaje jednak pytanie: czy Aksjomaty Peano wystarczają, żeby dowodzić wszystkich prawdziwych zdań o liczbach naturalnych? To pytanie jest źle postawione: czymże bowiem są liczby naturalne? Jedyne, co możemy stwierdzić, to to, że powinny one spełniać parę oczywistych własności, takich właśnie jak te wybrane przez Peano. Moglibyśmy uznać: liczby naturalne to są właśnie takie liczby, które spełniają Aksjomaty Peano. Gdy Peano ogłosił swoje aksjomaty, wielu matematyków uznało, że jednoznacznie określają one to pojęcie, które mamy na myśli mówiąc o liczbach naturalnych. Pozostają jednak dwa problemy.

Problem 1: zupełność. Być może Aksjomaty Peano mogą być spełnione przez „modele” mające różne własności – tak jak nasz początkowy, mały zestaw aksjomatów dopuszczał model, w którym prawdziwe było zdanie „ $2 \times 2 = 4$ ” oraz inny, w którym „ $2 \times 2 = 0$ ”. Innymi słowy, zdanie „ $2 \times 2 = 4$ ” jest niezależne od owego małego zestawu aksjomatów, które dopuszczają zarówno prawdziwość tego zdania, jak i jego fałszywość. Natomiast jak widzieliśmy, Aksjomaty Peano już jednoznacznie implikują prawdziwość zdania $2 \times 2 = 4$. Być może jednak wciąż są jakieś zdania od nich niezależne? Na przykład, czy to możliwe, że ani prawdziwość Hipotezy Goldbacha, ani jej fałszywość nie wynika z Aksjomatów Peano? W roku 1931 Kurt Gödel udowodnił, że rzeczywiście istnieją zdania niezależne od Aksjomatów Peano! Mówimy też, że Aksjomaty Peano nie są zupełne. Czyżby więc były zbyt słabe, i należy dołożyć jeszcze jakieś aksjomaty? Okazuje się, że niezupełność nie oznacza bynajmniej, że Peano zapomniał uwzględnić jakichś aksjomatów. Gödel udowodnił bowiem, że każdy efektywny (dziś powiedzielibyśmy „rozpoznawalny przez program komputerowy”) zestaw aksjomatów rozszerzający Aksjomaty Peano nie będzie zupełny lub będzie sprzeczny (wyniknie z niego, że $0 = 1$)! Jest to tak zwane Pierwsze Twierdzenie Gödla o Niezupełności.



Co oznacza Pierwsze Twierdzenie o Niezupełności? Czyżby to, że są twierdzenia matematyczne, które są prawdziwe, ale nie da się ich ani udowodnić, ani obalić? Nie! Oznacza ono jedynie tyle, że nie istnieje bezwzględne pojęcie „prawdziwego twierdzenia”. Twierdzenie Gödla nie oznacza również, że są pytania matematyczne, na które odpowiedzi nigdy nie będziemy znali. Oznacza jedynie tyle, że odpowiedź na niektóre pytania nie wynika jednoznacznie z Aksjomatów Peano (i innych zestawów aksjomatów), podobnie jak odpowiedź na pytanie „ile lat ma Marek?” nie wynika z założenia, że „Marek ma jabłko”. Dla każdego pytania z teorii liczb musimy więc dopuścić trzy możliwe odpowiedzi: „tak”, „nie” oraz „nie wynika z Aksjomatów Peano”. I tak samo każdy zestaw aksjomatów próbujący opisywać liczby naturalne, dający się opisać w skończony sposób (tzn. efektywny), nie będzie zupełny. Da się natomiast rozszerzyć Aksjomaty Peano do zupełnego zestawu aksjomatów, biorąc np. jako aksjomaty wszystkie zdania, które uznamy, że powinny zachodzić w naszych liczbach naturalnych. Możemy, na przykład, przyjąć Hipotezę Goldbacha za aksjomat, gdyż została ona

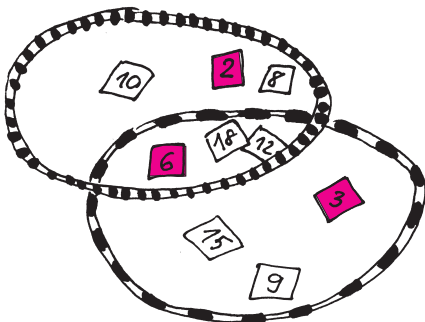
potwierdzona dla wszystkich liczb mniejszych niż $4 \cdot 10^{18} = 4000000000000000000$. Ale jeśli rozszerzymy Aksjomaty Peano o aksjomat głoszący prawdziwość tej hipotezy, to ryzykujemy, że któregoś dnia ktoś udowodni, że z Aksjomatów Peano wynika jej fałszywość, tym samym dowodząc, że nasz rozszerzony system aksjomatów jest sprzeczny. Innym problemem jest brak efektywności: nawet jeśli jakimś cudem udałoby się wybrać niesprzeczny i zupełny zestaw aksjomatów rozszerzający Aksjomaty Peano, to ten wybór będzie bardzo arbitralny: nie będzie efektywny, więc nie będzie można napisać programu komputerowego, który by rozstrzygał, czy dane zdanie jest aksjomatem, czy nie jest. A to znaczy, że matematyk nie mógłby w skończony sposób wybranych przez siebie aksjomatów opisać ani zakomunikować drugiemu matematykowi.

Problem 2: niesprzeczność. Mało tego, że Aksjomaty Peano nie są zupełne, być może są sprzeczne! Pomimo że zostały wybrane w taki sposób, żeby nie budzić żadnych wątpliwości, tzn. wszyscy matematycy się zgadzają, że nasze wyidealizowane pojęcie o liczbach naturalnych powinno przynajmniej spełniać te aksjomaty, to wciąż jest możliwe, że któregoś dnia ktoś udowodni, że wynika z nich sprzeczność, np. że $0 = 1$ (z Aksjomatów Peano wynika niewątpliwie, że $0 \neq 1$). Innymi słowy, nie wiadomo, czy Aksjomaty Peano są niesprzeczne. A nawet jeżeli są, to nie da się tego udowodnić, używając samych Aksjomatów Peano! Można znowu próbować obwiniać o to Peano: dał za dużo aksjomatów, i dlatego, być może, są sprzeczne, lub dał za mało aksjomatów, i dlatego nie da się na ich podstawie udowodnić ich własnej niesprzeczności. Jednak i tym razem Peano jest tu niewinny. Gödel udowodnił bowiem, że jakiegokolwiek by nie rozważać zestawu aksjomatów, jeżeli umożliwia on rozważania arytmetyczne (tzn. dotyczące dodawania, mnożenia i ich podstawowych własności) i jest efektywny i niesprzeczny, to nie da się niesprzeczności tego zestawu udowodnić, używając tylko tych aksjomatów. Ten wynik, zwany Drugim Twierdzeniem o Niezupełności, rozszerza pierwsze Twierdzenie o Niezupełności, gdyż podaje konkretne zdanie, którego prawdziwość jest niezależna od rozważanego zestawu \mathcal{Z} , mianowicie zdanie „zestaw aksjomatów \mathcal{Z} jest niesprzeczny”.

Czy możliwość, że Aksjomaty Peano są sprzeczne, spędza matematykom sen z oczu? Otóż nie! Matematycy wierzą głęboko, że Aksjomaty Peano są niesprzeczne. Co więcej, potrafią to udowodnić, zakładając niesprzeczność większego zestawu aksjomatów, na przykład aksjomatów ZFC. Te aksjomaty, zamiast opisywać liczby, opisują nasze powszechne wyobrażenie na temat tego, czym są zbiory. Zaletą mówienia o zbiorach jest to, że można za ich pomocą zdefiniować zarówno liczby naturalne, dodawanie, mnożenie, jak i obiekty geometryczne, takie jak płaszczyzna, prosta, przestrzeń wielowymiarowa, a też wszystkie inne obiekty, o których na co dzień myślą matematycy. Po co nam więc Aksjomaty Peano, skoro aksjomaty ZFC dają więcej, i na dodatek dowodzą niesprzeczności Aksjomatów Peano? Otóż twierdzenia Gödla o niezupełności stosują się także do aksjomatów ZFC: z samych aksjomatów ZFC nie można udowodnić ich niesprzeczności (być może, że są sprzeczne). Można za to znaleźć kolejny zestaw aksjomatów, powiedzmy ZFCD, z którego niesprzeczności wynika niesprzeczność aksjomatów ZFC. I tak dalej. Im większe rozważamy zestawy aksjomatów, tym mniej są one uniwersalnie akceptowane przez matematyków. Gdyby ktoś udowodnił sprzeczność aksjomatów ZFCD, być może nie byłoby to tak duży szok dla większości matematyków. Ale gdyby ktoś udowodnił sprzeczność aksjomatów ZFC lub samych Aksjomatów Peano, byłoby to dla matematyków prawdziwa katastrofa!

Jakie są przykłady zdań niezależnych od Aksjomatów Peano? Jest bardzo niewiele znanych problemów z teorii liczb, o których wiadomo, że są niezależne od Aksjomatów Peano. Np. nie wiadomo, czy Wielkie Twierdzenie Fermata, które jest powszechnie uznane przez matematyków za prawdziwe, da się udowodnić, korzystając tylko z Aksjomatów Peano – dowód Andrew Wileasa, ogólnie uznawany za poprawny, używa bowiem bogatszego zbioru aksjomatów ZFC. Są też znane twierdzenia z teorii liczb, np. Twierdzenie Goodsteina,

ZFC to akronim od nazwisk matematyków Zermelo oraz Fraenkel, oraz od aksjomatu wyboru, po angielsku *choice axiom*.



o których wiadomo, że są niezależne od Aksjomatów Peano, ale mogą być udowodnione przy użyciu aksjomatów ZFC. Z kolei wiadomo, że słynna Hipoteza Continuum jest niezależna od aksjomatów ZFC.

Hipoteza ta mówi, że każdy podzbiór zbioru liczb rzeczywistych jest albo równoliczny z całym zbiorem liczb rzeczywistych, albo jest równoliczny z jakimś podzbiorem zbioru liczb naturalnych – nie ma możliwości pośrednich!

Jednak na co dzień matematycy bardzo rzadko rozważają problemy niezależne od aksjomatów ZFC.

Podsumowując, nawet w matematyce niektóre fakty są przyjmowane „na wiarę”, i odpowiedź na niektóre – w pełni precyzyjne – pytania może brzmieć „to zależy”. Taka odpowiedź ma jednak bardzo konkretne znaczenie: oznacza, że potrafimy *udowodnić*, iż odpowiedź na to pytanie jest różna w różnych modelach spełniających nasze aksjomaty. Nie polecam więc wpisywać takiej odpowiedzi na egzaminie maturalnym!



Zadania

Redaguje Łukasz BOŻYK

M 1516. Dany jest trójkąt ABC , w którym $AC = BC$. Na odcinkach AC , BC znajdują się odpowiednio takie punkty K , L , że $AK = CL$ oraz $\frac{AB}{KL} = k < 2$.

Wyznaczyć, w zależności od k , miarę kąta między prostymi AB i KL .

Rozwiązanie na str. 8

M 1517. Na ponad połowie pól szachownicy 7×7 ustawiono wieże. Wykazać, że co najmniej jedna wieża jest *otoczona*, tzn. zarówno w wierszu, jak i w kolumnie znajduje się pomiędzy pewnymi dwiema innymi wieżami.

Rozwiązanie na str. 9

M 1518. Każdą liczbę całkowitą większą od 1 pomalowano na pewien kolor w taki sposób, że jeżeli dla pewnych dwóch liczb a , b większych od 1 liczba $a^2 + b^2$ jest podzielna przez $a + b$, to a ma ten sam kolor, co b . Jaka jest największa możliwa liczba kolorów użytych do pomalowania liczb?

Rozwiązanie na str. 11

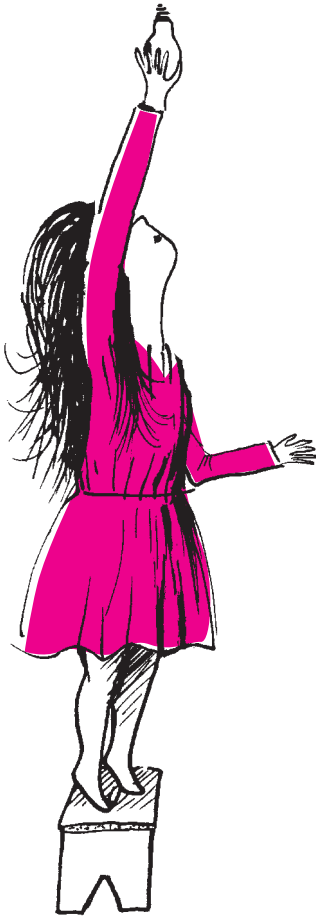
Przygotował Andrzej MAJHOFER

F 919. Osiągana przez kroplę deszczu prędkość opadania v rośnie z jej średnicą. Obserwacje wskazują, że duże krople osiągają prędkość około 10 m/s. Oszacuj, jakie średnie ciśnienie p wywiera na poziomy dach bardzo silny deszcz o intensywności $H = 20$ mm na godzinę (zakładamy, że woda natychmiast spływa rynnami). Przyjmij, że gęstość wody to $\rho = 10^3$ kg/m³.

Rozwiązanie na str. 17

F 920. Utrzymanie stałej temperatury ciała człowieka wymaga odprowadzania około $P = 100$ W mocy cieplnej. Ile wody musielibyśmy wypocić w ciągu doby, gdyby pocenie było jedynym procesem chłodzenia (tak jest, gdy temperatura otoczenia staje się bliska $t = 37^\circ\text{C}$)? Oszacuj, jak dużą powierzchnię S ciała musielibyśmy pozostawić odkrytą w otoczeniu o temperaturze $t_0 = 22^\circ\text{C}$, gdyby promieniowanie cieplne było jedynym mechanizmem chłodzenia. Dla uproszczenia zakładamy, że odzież doskonale izoluje cieplnie, a współczynnik promieniowania przez skórę jest bliski 1. Ciepło parowania wody wynosi $L = 2257$ kJ/kg, a stała Boltzmanna to $\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8}$ W/(m²K⁴).

Rozwiązanie na str. 17



Jeśli cewka podłączona jest do źródła napięcia zmiennego o częstości kołowej ω , to spełnione jest równanie:

$$U_0 \cos(\omega t) = L \frac{dI}{dt} + RI(t),$$

gdzie L – współczynnik indukcji, R – opór cewki, U_0 – amplituda napięcia. Amplituda prądu płynącego przez taką cewkę wynosi:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}.$$

Przesunięcie fazowe ϕ między napięciem a natężeniem prądu płynącego przez cewkę jest dane wzorem:

$$\operatorname{tg} \phi = \frac{\omega L}{R}.$$

Czasami pozornie proste sprzęty domowego użytku mogą dostarczyć ciekawych pytań dla fizyka. Na przykład: czy włókno żarówki zasilanej prądem zmiennym zmienia swoją temperaturę? Jeżeli tak, to ile wynosi amplituda tych zmian i jaką funkcją możemy opisać ich przebieg czasowy? Robi się jeszcze ciekawiej, gdy okazuje się, że problem ten można sprowadzić do zagadnienia analogicznego do przepływu prądu przez cewkę!

Będę rozważał żarówkę 100 W zasilaną prądem zmiennym o częstotliwości 50 Hz. Przyjmuję, że średnia temperatura włókna wynosi 3000 K. Można się spodziewać, że odchylenia od średniej temperatury będą niewielkie.

Żarówka wypromieniowuje ciepło zgodnie z prawem Stefana–Boltzmanna:

$$P(T) = \sigma x S T^4,$$

gdzie σ – stała Stefana–Boltzmanna, S – pole powierzchni włókna, x – współczynnik szarości włókna. Dla uproszczenia wprowadzę stałą $A := \sigma x S$.

Moc chwilowa źródła prądu jest dana wzorem: $P_z(t) = U_0^2/R \sin^2(\omega t) = 2P \sin^2(\omega t)$, gdzie P jest średnią mocą żarówki. W opisie zakładamy, że opór żarówki jest stały, ponieważ spodziewamy się niewielkich odchyżeń temperatury od średniej, a co za tym idzie – małych zmian oporu. Temperaturę wygodnie jest zapisać w postaci: $T = T_0 + \tau(t)$, gdzie T_0 jest średnią temperaturą. Zmiana temperatury jest opisywana równaniem:

$$C \frac{d\tau}{dt} = 2P \sin^2(\omega t) - AT^4,$$

gdzie C jest pojemnością cieplną włókna żarówki. Ponieważ $|\tau(t)| \ll T_0$, możemy użyć przybliżenia: $A(T_0 + \tau(t))^4 \approx A(T_0^4 + 4T_0^3\tau(t))$. Następnie korzystając z tożsamości $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$ oraz równości $P = AT_0^4$, otrzymujemy

$$C \frac{d\tau}{dt} = -P \cos(2\omega t) - 4AT_0^3\tau(t) = -P \cos(2\omega t) - \frac{4P}{T_0}\tau(t).$$

Zapisując ostatnie równanie w innej formie:

$$P \cos(2\omega t) = -C \frac{d\tau}{dt} - \frac{4P}{T_0}\tau(t),$$

zauważamy analogię z równaniem opisującym cewkę podłączoną do źródła napięcia zmiennego (patrz margines): $U_0 \leftrightarrow P$, $L \leftrightarrow -C$, $R \leftrightarrow \frac{4P}{T_0}$, $I \leftrightarrow \tau$, $\omega \leftrightarrow 2\omega$. Korzystając z tego, można obliczyć amplitudę zmian temperatury i przesunięcie fazowe między napięciem a temperaturą:

$$(1) \quad \tau_0 = \frac{P}{\sqrt{\left(\frac{4P}{T_0}\right)^2 + 4\omega^2 C^2}}, \quad \operatorname{tg} \phi = \frac{2\omega C}{\left(\frac{4P}{T_0}\right)}.$$

Korzystając z tej analogii, otrzymujemy zależność temperatury włókna od czasu:

$$T(t) = T_0 - \tau_0 \cos(2\omega t - \phi),$$

gdzie amplituda τ_0 i przesunięcie fazowe ϕ dane są wzorami (1).

Powyższe równanie pociąga za sobą zależności, których oczekivalibyśmy intuicyjnie, tj. wzrost których wartości zwiększa amplitudę, a których zmniejsza. Wątpliwości mogą budzić przypadki $\omega \rightarrow 0$ i $C \rightarrow 0$ (wtedy amplituda dąży do $T_0/4$). Należy przy tym jednak pamiętać, że traci wówczas sens założenie o małej wartości amplitudy i wynikające z niego przybliżenia.

Uwzględnijmy na końcu dane liczbowe – moc wynosi 100 W, częstotliwość 50 Hz, średnia temperatura to 3000 K, wartość masy m przyjmuję jako 28 mg (zgodnie z pomiarami przeprowadzonymi przez Szymona Weltera i Alexandra Stefaniego, którzy wyznaczyli ją dzięki uprzejmości Instytutu Fizyki UMK). Dla takich danych otrzymujemy amplitudę temperatury równą 42 K, co zgadza się z przyjętym założeniem, że amplituda jest znacznie mniejsza od średniej temperatury włókna.

Autor chciałby wyrazić podziękowania dla doktora Macieja Wiśniewskiego za wsparcie i cenne rady podczas pisania artykułu.

*student, Wydział Fizyki, Uniwersytet Warszawski

Dowody i obliczenia

Witold SADOWSKI*



Kilka miesięcy temu Marek Kordos zasugerował, że skoro napisałem już w *Delcie* 12/2014 o tym, czego o równaniu Naviera–Stokesa nie wiadomo, to może napisałbym też artykuł o tym, co z tym równaniem da się zrobić. Tak sformułowana oferta brzmi trochę jak „propozycja nie do odrzucenia”, więc nieopatrznie obiecałem taki artykuł dostarczyć. Piszę „nieopatrznie”, bo w momencie podjęcia zobowiązania nie uściśliliśmy, co powinienem rozumieć przez stwierdzenie *da się zrobić*. Czy chodzi o to, co da się udowodnić? Czy raczej o to, co daje się obliczyć?

Ponieważ są to do pewnego stopnia różne kwestie, więc na początek wyjaśnię, że w poniższym artykule poruszać się będziemy głównie w tym obszarze matematyki stosowanej, który zainteresowany jest dowodami. Zobaczmy jednak przy okazji, jak obie te kwestie są ze sobą splecione i jak dowody naprawdę ciekawych twierdzeń prowadzić mogą do odkryć w świecie fizycznym i – w konsekwencji – do tego, co da się obliczyć. Na całą rzecz spojrzymy zresztą z nieco szerszej perspektywy.

O co chodzi w matematyce stosowanej?

Idealne zastosowanie matematyki to takie, gdy rozumowanie matematyczne dostarcza bezpośredniej i – co również ważne – prawdziwej odpowiedzi na pytania interesujące ludzi, którzy matematykami nie są. Przykładami takich pytań mogą być: „czy w sobotę będzie padać, bo nie wiem, czy spakować kurtkę?”, „pod jakim kątem wystrzelić pocisk, by poleciał jak najdalej?”, „co ile godzin i w jakich dawkach najlepiej jest podawać lek X, by pacjent najszybciej wyzdrowiał?” itp. Jak widzimy, są to pytania, które w zasadzie nie używają żadnej specjalistycznej terminologii matematycznej. Dlatego pierwszym zadaniem matematyka jest przetłumaczenie tego rodzaju pytań na kwestie czysto matematyczne. Drugi krok to przeprowadzenie matematycznych rozumowań, które albo od razu (tzn. po tłumaczeniu z powrotem na język codzienny) doprowadzą do odpowiedzi na postawione pytania wyjściowe, lub też wskażą ścisły algorytm obliczeń, który też ostatecznie takiej odpowiedzi udzieli.

Istnieje jednak jeszcze trzeci, być może najciekawszy, krok w modelowaniu matematycznym. Mianowicie, po sformułowaniu matematycznej wersji problemu, kierując się już tylko matematyczną intuicją, można postawić szereg pytań dotyczących pojawiających się w tym sformułowaniu obiektów matematycznych i zbadać ich właściwości. Odpowiedzi na takie pytania całkiem często dają się przetłumaczyć na zaskakujące twierdzenia dotyczące świata fizycznego.

Przykład optymistyczny: równanie Laplace’a

Zanim zajmiemy się równaniem Naviera–Stokesa, którego teoria to mniej więcej „półtora kroku” opisanego powyżej, przyjrzyjmy się najpierw nieco innemu problemowi, który w pewnym sensie idealnie obrazuje naszkicowaną metodę.

Problem praktyczny, który nas teraz interesuje, jest następujący: wyobraźmy sobie, że w pewnym przedmiocie wykonanym z jednorodnego materiału ustabilizowała się temperatura i możemy dokonywać jej pomiarów w dowolnym punkcie na powierzchni tego przedmiotu. Czy można na podstawie pomiaru temperatury na powierzchni przedmiotu przewidzieć, jaka jest temperatura w dowolnym punkcie jego wnętrza?

Matematycznie problem ten można wysłowić następująco: niech Ω będzie ograniczonym obszarem w przestrzeni (odpowiada to, oczywiście,

*University of Bristol

przedmiotowi, w którym temperatura jest ustabilizowana i nie zmienia się w czasie). Naszym zadaniem jest znaleźć pewną funkcję T określoną na Ω (czyli temperaturę), wiedząc tylko, że

- $T = g$ na powierzchni Ω , gdzie g to jakaś znana nam dodatnia funkcja ciągła;
- we wnętrzu Ω funkcja T spełnia pewne równanie, zwane równaniem Laplace'a (znajomość tego równania nie jest potrzebna do zrozumienia treści artykułu).

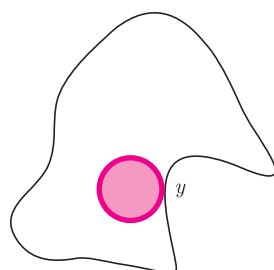
Okazuje się, że tak postawiony problem zawsze daje się rozwiązać i to dokładnie na jeden sposób. Dowodzi się tego w sposób ścisły, co więcej – podaje się metodę (metoda Perrona), a dla niektórych obszarów Ω także konkretny wzór (wzór Greena), jakich można użyć do znalezienia funkcji T (której ciągłości i gładkości we wnętrzu Ω można dowiedzieć). Teoria prowadzi zatem do przepisu na obliczenia interesujące *zwykłego człowieka* (raczej fizyka lub inżyniera, ale nie wchodźmy w szczegóły). W ten sposób dwa kroki modelowania matematycznego zostały wykonane. A jak jest w tym przypadku z krokiem trzecim? Okazuje się, że funkcja T jest niezwykle ciekawa i można udowodnić jej następującą piękną własność.

Własność wartości średniej. Średnia temperatura na dowolnej sferze we wnętrzu Ω jest równa temperaturze w środku tej sfery.

Z twierdzenia o wartości średniej możemy szybko wywnioskować, że także średnia temperatura w dowolnej kuli we wnętrzu Ω jest dokładnie równa temperaturze w środku tej kuli (dowód opiera się na obserwacji, że kula jest sumą sfer). W oparciu o własność wartości średniej możemy teraz *udowodniać* własności rozwiązania równania Laplace'a, pomimo tego, że nie zakładamy tu żadnej znajomości pochodnych cząstkowych. Zacznijmy od faktu, który z fizycznego punktu widzenia raczej nie jest zaskakujący.

Zasada maksimum. Zarówno najwyższa, jak i najniższa temperatura w całym Ω osiągnane są na powierzchni Ω .

Naszkićmy główną ideę dowodu: niech M będzie najwyższą wartością T na zbiorze Ω . Przypuśćmy, że w jakimś punkcie $x \in \Omega$ mamy $T(x) = M$. Weźmy kulę o środku w x , która dotyka brzegu Ω w punkcie y , ale nigdzie nie wychodzi poza Ω (rys. 1).



Rys. 1

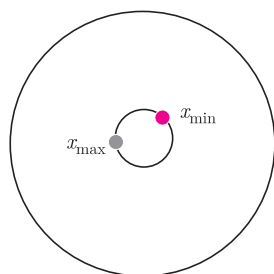
Gdyby w jakimkolwiek punkcie tej kuli wartość T była ostro mniejsza od M , to mielibyśmy sprzeczność z własnością wartości średniej, bo średnia względem tej kuli musiałaby być wtedy mniejsza niż M (nigdzie nie da się nadrobić straty, bo temperatura nigdzie nie przekracza M). A zatem w całej kuli mamy wartość T równą M , w szczególności jest tak w punkcie y należącym do brzegu.

Oczywiście, można tu wrzucić ramionami i powiedzieć, że to wiedzieliśmy i bez dowodu, po prostu z doświadczenia. Udowodnimy zatem jeszcze inną własność funkcji T , własność raczej nieoczywistą. Rozpatrzmy w tym celu (trójwymiarową) kulę $B(0, 5)$ (o promieniu 5 i środku w zerze), w której ustaliliśmy stacjonarny rozkład temperatury T , przy czym na brzegu kuli $B(0, 5)$ mamy równość $T = g$ dla pewnej ciągłej i dodatniej funkcji g . Ponieważ funkcję g możemy ustalić dowolnie (byle tylko była dodatnia), więc na powierzchni kuli $B(0, 5)$ stosunek temperatury największej do najmniejszej może być dowolnie wielki, równy, powiedzmy, miliard bilionów. Udowodnimy jednak, że w kuli $B(0, 1)$ stosunek temperatury największej do najmniejszej nigdy nie przekracza liczby 8.

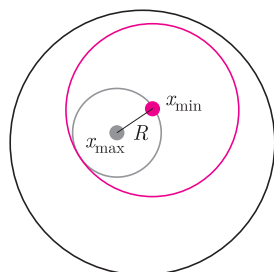
A oto dowód. Przypuśćmy że największa temperatura w kuli $B(0, 1)$ jest w punkcie x_{\max} , a najmniejsza w punkcie x_{\min} (rys. 2). Ponieważ oba te punkty leżą w kuli $B(0, 1)$, więc odległość R między nimi nie jest większa niż 2.

Z twierdzenia o wartości średniej możemy zatem wywnioskować, że (rys. 3)

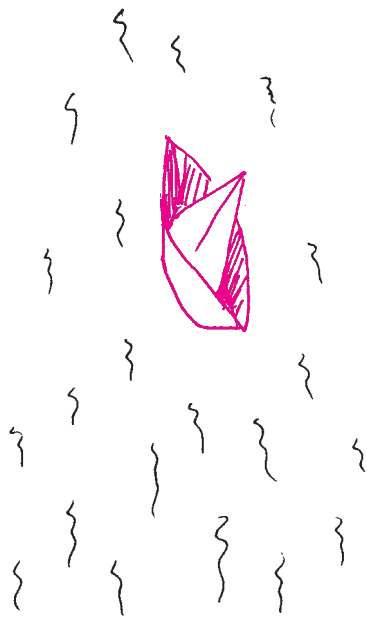
$$T(x_{\max}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\max}, R)$$



Rys. 2



Rys. 3



oraz

$$T(x_{\min}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R),$$

bo obie z kul, względem których bierzemy średnie, nie wystają poza $B(0, 5)$.

Niech teraz \tilde{T} będzie funkcją równą T w kuli $B(x_{\max}, R)$ i równą zeru w każdym innym punkcie. Ponieważ funkcja T jest dodatnia, więc wszędzie mamy $\tilde{T} \leq T$ i w konsekwencji

$$T(x_{\min}) = \text{średnia } T \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R) \geq \text{średnia } \tilde{T} \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R).$$

W dodatku kula $B(x_{\max}, R)$ stanowi $1/2^3$ objętości kuli $B(x_{\min}, 2R)$, a zbiór $B(x_{\min}, 2R) \setminus B(x_{\max}, R)$ nie wnosi nic ani na plus, ani na minus do średniej \tilde{T} , więc mamy także

$$\text{średnia } \tilde{T} \text{ w kuli } B(x_{\min}, 2R) = \frac{\text{średnia } T \text{ w } B(x_{\max}, R)}{2^3} = \frac{1}{8}T(x_{\max}).$$

Nasze twierdzenie jest więc udowodnione. Czytelnik Dociekliwy może spróbować zmodyfikować powyższy dowód tak, by wykazać, że także w kuli $B(0, 4)$ stosunek największej wartości T do najmniejszej nie przekracza pewnej (innej, oczywiście, niż 8) stałej. Wynik ten łatwo już będzie uogólnić w następujący sposób.

Nierówność Harnacka. Niech T będzie rozwiązaniem równania Laplace'a w obszarze Ω z dowolnym dodatnim warunkiem brzegowym g . Dla każdego podzbioru $V \subset \Omega$ oddalonego od brzegu Ω o $r > 0$ istnieje taka stała C , że

$$\sup_{x \in V} T(x) \leq C \inf_{x \in V} T(x).$$

Otrzymaliśmy zatem ścisły matematyczny wynik, uzyskany za pomocą elementarnego rozumowania, który jest jednocześnie sprawdzalną hipotezą doświadczalną. Jest to zatem klasyczny przykład tego, jak powinno funkcjonować modelowane matematyczne.

Równanie Naviera–Stokesa: dwa wymiary

Pytanie wyjściowe dla równania Naviera–Stokesa brzmi: „W pewnym ograniczonym obszarze płynie sobie płyn. Wiem (lub mogę wiedzieć) wszystko o tym przepływie w jednej ustalonej chwili. Na podstawie tej informacji chcę wiedzieć wszystko o tym przepływie w przyszłości”.

Po przetłumaczeniu pytania wyjściowego na język matematyki dostajemy następujący problem: w obszarze Ω dane jest pole wektorowe u_0 , odpowiadające prędkości płynu w ustalonej chwili początkowej. (Pole wektorowe to funkcja, której wartościami są wektory, co oznacza po prostu, że w każdym punkcie Ω zaczepiony jest wektor). Szukam zmieniającego się w czasie (gładkiego) pola wektorowego u o następujących własnościach:

- dla wszystkich t pole wektorowe $u(t)$ znika na brzegu Ω ;
- pole $u(t)$ zmienia się w czasie zgodnie z równaniem Naviera–Stokesa (czyli z grubsza biorąc, z drugą zasadą dynamiki Newtona);
- w chwili $t = 0$ mamy $u(0) = u_0$, gdzie u_0 to pewne gładkie pole wektorowe (odpowiadające polu prędkości nieściśliwej cieczy w chwili początkowej).

Po wykonaniu pierwszego kroku modelowania chcielibyśmy teraz wykonać krok drugi, a może i trzeci. Niestety, tak dobrze jest tylko w dwóch wymiarach. Okazuje się bowiem, że jeśli przepływ wody odbywa się w obszarze $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, tzn. gdy wektor prędkości ma tylko dwie składowe $u = (u_1, u_2)$, to równanie Naviera–Stokesa jednoznacznie wyznacza wszystkie przyszłe pola prędkości na podstawie stanu obecnego. Fakt ten dowodzi się formalnie, co otwiera drogę do tego, by przyszłe pola prędkości obliczać numerycznie – są na to standardowe metody. Obliczenia te mają sens, bo są jednoznaczne i możliwe do przeprowadzenia dla dowolnie dużych czasów $t > 0$. Dwa podstawowe kroki modelowania matematycznego są zatem w dwóch wymiarach wykonane. A jak jest z krokiem trzecim? Czy potrafimy stawiać hipotezy o rzeczywistości na podstawie czysto teoretycznych rozważań? W pewnym sensie tak. Spójrzmy bowiem na kolejne twierdzenie.



Rozwiązanie zadania M 1516.

Niech M będzie takim punktem, że czworokąt $AKLM$ jest równoległobokiem. Wówczas

$$LM = AK = CL,$$

$$BL = BC - CL = AC - AK = CK$$

oraz

$$\sphericalangle BLM = \sphericalangle KCL,$$

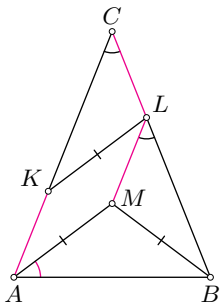
a zatem trójkąty BLM oraz KCL są przystające (cecha bok-kąt-bok). Zatem $BM = KL = AM$, czyli trójkąt ABM jest równoramienny, więc

$$\cos \sphericalangle BAM = \frac{\frac{1}{2}AB}{AM} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AB}{KL} = \frac{k}{2}.$$

Pozostaje zauważyć, że proste AM i KL są równoległe, więc

$$\sphericalangle BAM = \arccos(k/2)$$

jest szukanym kątem.



Twierdzenie o atraktorze. Po upływie dostatecznie dużego czasu $t > 0$ pole prędkości $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ daje się wyznaczyć z dowolnie małym błędem na podstawie pomiaru w skończonej liczbie punktów.

Aby nieco lepiej zrozumieć to stwierdzenie, rozważmy prostszą, ale podobną sytuację. Niech f_n będzie ciągiem funkcji gładkich na odcinku $[0, 1]$. Jeśli wiemy, że trzecia pochodna funkcji f_n dąży (jednostajnie) do zera, to wykres f_n musi upodabniać się do paraboli (co wynika ze wzoru Taylora). Funkcje f_n są zatem dla dużych n świetnie przybliżane przez funkcje liniowe lub kwadratowe, te zaś wyznaczane są przez ich wartości w trzech różnych punktach.

W przypadku dwuwymiarowego równania Naviera–Stokesa sytuacja jest w pewnym sensie podobna. Istnieje bowiem zbiór \mathcal{A} zwany atraktorem, którego elementami są pola prędkości, które dają się jednoznacznie wyznaczyć przez ich wartości w N różnych punktach. Wysłowione wyżej twierdzenie mówi jednak, że z upływem czasu pola prędkości dowolnego przepływu (z ustaloną regularną siłą zewnętrzną) w każdej chwili wyglądają niezwykle podobnie do któregoś elementu zbioru \mathcal{A} .

Trzy wymiary

Rozpatrywać będziemy tylko sytuację, gdy nie ma sił zewnętrznych. Jeśli pole wektorowe ma trzy składowe $u = (u_1, u_2, u_3)$ (tzn. przepływ ma miejsce w trójwymiarowej przestrzeni), to wiadomo tylko, że przyszłe pola prędkości przewidywane są jednoznacznie, gdy w chwili początkowej prędkość nie zmienia się zbyt gwałtownie lub ma pewne symetrie. Co jednak dzieje się w przypadku, gdy żadnych symetrii nie ma, początkowe pole prędkości pełne jest gwałtownych wirów, a my mamy numerycznie obliczać przyszłe pola prędkości? W tej sytuacji czysta teoria nic nam (przynajmniej na razie) nie pomoże, mogłoby się więc wydawać, że po uzyskaniu wyniku pozostaniemy niepewni, czy nasze obliczenia są prawidłowe, tzn. czy przyszłe przepływy dają się wyznaczyć na tylko jeden uzyskany przez nas sposób, czy też można dojść do zupełnie odmiennych wyników, stosując np. nieco inną metodę numeryczną. Zupełnie zdumiewający wynik (Chernyshenko, Constantin, Robinson, Titi, 2006) mówi jednak, że nawet, gdy zawodzi nas teoria, to same obliczenia numeryczne mogą nam dać pewność, że są jednoznaczne i prawidłowe! Nie sposób wdawać się tu w szczegóły, ale przedstawmy pokrótce ogólną ideę tego rezultatu. Otóż jeśli w obliczeniach numerycznych przybliżymy początkowy przepływ i siły działające na płyn z błędem wystarczająco małym, a jednocześnie otrzymane rozwiązanie numeryczne będzie miało wystarczająco niski poziom oscylacji (co to znaczy w tym kontekście *poziom oscylacji*, trzeba oczywiście, odpowiednio zdefiniować – to są właśnie techniczne szczegóły), to możemy być pewni, że nasze obliczenia są poprawne.

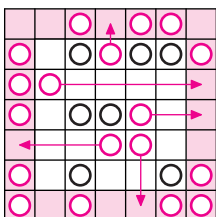
Sytuacja ta jest w pewnym sensie paradoksalna. Z jednej strony obecna teoria trójwymiarowego równania Naviera–Stokesa jest zbyt słaba, by zapewnić nas o poprawności obliczeń numerycznych przeprowadzanych dla dowolnych (ale sensownych) początkowych pól prędkości. Z drugiej strony dla wszystkich danych początkowych, dla których podstawowy model hydrodynamiki zachowuje się poprawnie, możemy udowodnić poprawność obliczeń na podstawie nich samych, o ile tylko są one wystarczająco dokładne.

Opisany wyżej wynik stanowi dość zaskakujący kontekst do pytania postawionego na wstępie i do wzajemnej zależności pomiędzy dowodami a obliczeniami. Otóż o trójwymiarowym równaniu Naviera–Stokesa *można udowodnić*, że w każdej sytuacji, w której produkuje ono jednoznaczny wynik, *można wykonać przybliżone obliczenia* tak dokładnie, że jednoznaczność przybliżanego rozwiązania będziemy mogli *ściśle udowodnić*, wykorzystując w tym celu własności właśnie *obliczonych* rozwiązań. . .



Rozwiązanie zadania M 1517.

Każde z 24 pól przyległych do krawędzi szachownicy nazwijmy *brzegowym*. Zauważmy, że każdej wieży, która nie jest otoczona, możemy przyporządkować pewne pole brzegowe w następujący sposób. Jeżeli wieża stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej to pole, na którym stoi; jeżeli zaś nie stoi na polu brzegowym, to przyporządkowujemy jej jedno z tych pól brzegowych, które są w jej zasięgu (skoro wieża nie jest otoczona, to takie pole jest co najmniej jedno).



Pozostaje zauważyć, że żadne pole brzegowe nie mogło zostać przyporządkowane więcej niż jednej wieży, a zatem wież, które nie są otoczone, jest co najwyżej 24. Wobec tego spośród dowolnych co najmniej 25 wież stojących na szachownicy jest co najmniej jedna wieża otoczona.

Kilka słów o flogistonie, czyli o tym, jak błędna teoria przyniosła nauce wiele pożytku

Mikołaj JĘDRUSIAK

Dawni uczeni prezentowali rozmaite poglądy, od przesiąkniętych myśleniem magicznym (które często służyło zamaskowaniu niedostatków wiedzy) do zupełnie racjonalnych. Cechą wspólną ogółu badaczy przyrody było – i nadal jest – kierowanie się rozumem. Samo racjonalne wnioskowanie na podstawie przeprowadzonych eksperymentów nie gwarantuje jednak skonstruowania poprawnej teorii wyjaśniającej istotę obserwowanych zjawisk. Jednym z klasycznych przykładów takiego błędnie skonstruowanego formalizmu jest pochodząca z XVII wieku teoria flogistonu. Zdominowała ona umysły naukowców na następne sto lat.

A wieki XVII i XVIII były ciekawym okresem przejściowym w historii nauki. Myśl oświeceniowa nakazywała sceptycznie podchodzić do wcześniejszych, alchemicznych lub pochodzących wprost od Arystotelesa poglądów na przyrodoznawstwo. Jednocześnie nauki takie jak fizyka czy chemia w formie zbliżonej do współczesnej ukształtowały się dopiero pod koniec wieku XVIII. W miejsce dawnych poglądów starano się więc wbudować nowe teorie, już prawie współczesne, ale jeszcze nie całkiem. A wszystko to np. bez dostępu do wystarczająco dokładnych technik pomiarowych.

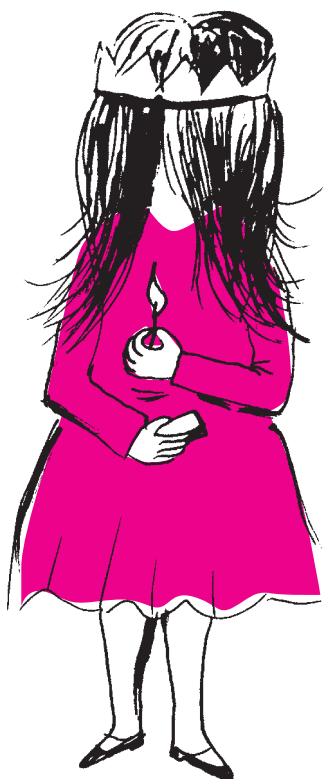
Skoncentrujemy się na znanej ludzkości od niepamiętnych czasów reakcji chemicznej, jaką jest spalanie. Spalić można wiele rzeczy – drewno wystarczy wrzucić do ogniska. Sztabkę żelaza można wyżarzyć w piecu. Niektórych obiektów spalić nie sposób, jak np. kamień czy złoto. Czemu tak się dzieje?

Uczeni wiedzieli, że spalanie jest „reakcją”, to znaczy, że dochodzi do istotnej zmiany właściwości spalanego obiektu. Wszak widać, że popiół to zupełnie coś innego niż kawałek drewna oraz, co ważniejsze, że oba te obiekty wykazują zupełnie różną aktywność w reakcjach chemicznych. Tradycyjna teoria, pochodząca od Arystotelesa, mówiła, że wszelkie obiekty składają się z czterech (lub innej liczby) żywiołów. Reakcje polegają zaś albo na wymianie żywiołów między reagującymi indywidualiami, albo na zmianie sposobu rozmieszczenia żywiołów w obrębie danego obiektu. Obecnie mówimy o około 120 żywiołach, zwanych pierwiastkami. Ogólna idea jest jednak bardzo podobna.

Pozostając pod wpływem tego poglądu, jednak odrzucając wiele z jego metafizycznych aspektów, w roku 1697 r. Georg E. Stahl przedstawił spójną teorię wyjaśniającą, między innymi, mechanizm reakcji spalania. Zaproponował on istnienie flogistonu, swego rodzaju fluidu lub gazu, przepelniającego rozmaite ciała, odpowiedzialnego za procesy palenia i wymiany ciepła. Był to obiekt podobny do tradycyjnego żywiołu ognia, z tą różnicą, że utożsamiany nie tyle z żółtym, gorącym płomieniem, co swego rodzaju budulcem materii, którego ów płomień jest emanacją. Stahl sądził bowiem, że ogień i ciepło, jako obiekty wtórne, powstają na skutek przepływu flogistonu między ciałami. I na tym pomysłe zbudował całą teorię.

Rozumował w sposób następujący. Skoro spalanie polega na przepływie flogistonu między paliwem a otoczeniem, to należy ustalić kierunek tego przepływu. Ponieważ palone obiekty na ogół zamieniają się w popiół lub proch, a więc na drodze reakcji wytracają swoją uporządkowaną strukturę, rozdrabniają się, to można pomyśleć, że flogiston przy tym ulatuje. Podobnie jak ciecz wylewająca się z rozbitego naczynia. Zatem flogiston przepływa od paliwa do powietrza. Stąd dalszy wniosek, że obiekty łatwopalne zawierają go dużo, niepalne zaś mało lub wcale.

W prosty sposób Stahl wyjaśnił w zasadzie wszystkie znane ówczynie odwracalne procesy utleniania i redukcji. Skoro bowiem sztabka metalu zawiera w sobie nieco flogistonu, a metal ten można w wysokiej temperaturze spalić (czemu towarzyszy uwolnienie flogistonu do otoczenia), to można



*Wydział Chemii, Uniwersytet Warszawski



Rozwiązanie zadania M 1518.

Udowodnimy, że wszystkie liczby pomalowano tym samym kolorem. Przyjmijmy oznaczenie $a \sim b$, jeżeli $a + b \mid a^2 + b^2$ oraz niech $f(n) = n(n - 1)$. Zauważmy, że dla każdego $n > 1$ liczba

$$n^2 + f(n)^2 = n^2(1 + (n - 1)^2)$$

jest podzielna przez $n + f(n) = n^2$, a zatem $n \sim f(n)$. Ponadto, dla każdego $n > 1$ liczba

$$\begin{aligned} f(n)^2 + f(n + 1)^2 &= \\ &= n^2(n - 1)^2 + n^2(n + 1)^2 = \\ &= 2n^2(n^2 + 1) \end{aligned}$$

jest podzielna przez $f(n) + f(n + 1) = 2n^2$, skąd wniosek, że $f(n) \sim f(n + 1)$. Wobec tego dla dowolnych liczb całkowitych $m > n > 1$ otrzymujemy

$$n \sim f(n) \sim f(n + 1) \sim \dots \sim f(m) \sim m,$$

co oznacza, że liczby m i n pomalowano tym samym kolorem.

Więcej szczegółów można znaleźć w książkach:
A.K. Wróblewski, *Historia fizyki*;
W.H. Brock, *Historia chemii*;
R. Mierzecki, *Historyczny rozwój pojęć chemicznych*
oraz
R. Mierzecki, *Antoine Laurent de Lavoisier (1743–1794) Geniusz skojarzeń*.

pomyśleć, że późniejsze zestawienie tego produktu spalania z ciałem bogatym we flogiston (jak na przykład węgiel) sprawi, że przynajmniej część flogistonu przepłynie od węgla z powrotem do wypalonego żelaza, przywracając mu tym samym pierwotną postać. Praktyka metalurgiczna podpowiada, że istotnie tak się dzieje. Takie podejście pozwoliło posegregować różne substancje względem zawartości flogistonu, a w konsekwencji przewidzieć kierunek zachodzenia różnych reakcji. Na podobnej zasadzie oparty jest współczesny szereg napięciowy metali, obecnie mówimy jednak o przepływie nie flogistonu, a elektronów. Teoria świeciła triumfy.

Stahl słusznie uważał, wbrew ówczesnemu pogładowi, że procesy gwałtownego spalania i powolnej korozji metalu to w istocie ta sama reakcja utleniania. Różnicę widział jedynie w tempie wymiany flogistonu, tłumacząc tym brak widocznego płomienia i wydzielania się ciepła w procesie korozji.

Teoria Stahla ma jednak pewien mankament, który przyczynił się wiek później do jej obalenia. Jest nim podstawowy pogląd, że spalany obiekt wytraca flogiston, a więc i część swojej masy. Na przełomie XVII i XVIII wieku metody wagowe były wciąż mało precyzyjne. Prawdopodobnie ze względu na niewłaściwą metodologię eksperymentalną w niektórych reakcjach utleniania można było zaobserwować spadek masy, w innych jej wzrost. Pod koniec wieku XVIII nabrano natomiast pewności, że ciężar palonego obiektu wzrasta. Zwolennicy teorii flogistonu tymczasowo obronili się twierdzeniem, że flogiston jest fluidem bardzo lekkim, lżejszym od powietrza. Wszak widać, że ogień, pochodna flogistonu, kieruje się zawsze ku górze. Ciało bogate we flogiston jest więc jak balon – unosi się ku górze, a jego ciężar jest mały. Wytracając flogiston, zwiększa swój ciężar (zakładając oczywiście, że ubytkowi masy towarzyszy stosowny spadek objętości ciała, tak aby doprowadzić do wzrostu gęstości – co było nierozstrzygalne). Konkurencyjny pogląd, że flogiston ma masę wręcz ujemną, w obliczu wielkiego autorytetu Newtona uznano szybko za zbyt ekscentryczny.

Taka sytuacja mogłaby w zasadzie trwać dalej, gdyby nie Lavoisier. W roku 1783 przeprowadził reakcję spalania pod szczelnym przykryciem. Zaobserwował on, że ciśnienie gazu wewnątrz klosza maleje. A przecież powinno rosnąć, fluid flogistonu miał wydzielać się z paliwa do otoczenia. Tego spostrzeżenia nie dało się już zbyć argumentami rodem z Archimedesa. Wniosek jest prosty – transport pewnego składnika materii odbywa się w przeciwnym kierunku niż sądzono, z powietrza do paliwa.

Obrońcy flogistonu przyznali, że istotnie, co do kierunku przepływu mylili się, jednak cała reszta teorii, po stosownych korektach, pozostaje w mocy. Lavoisier podał później (1789) przekonujące dowody, że wymienianym na drodze reakcji spalania składnikiem nie jest flogiston, a odkryty przez niego wcześniej tlen (1777, chociaż pierwszeństwo odkrycia jest dyskusyjne). Ostatnie próby flogistyków twierdzących, że, być może, flogiston jest po prostu tlenem, upadły w obliczu poznanych reakcji utleniania metali za pomocą kwasów beztlenowych.

Tu w zasadzie historia mogłaby się zakończyć. Powiedzmy tylko, że przed śmiercią w wyniku rewolucji Lavoisier zdążył jeszcze rozpropagować teorię ciepłika, zastępując tym samym jeden fluid cieplny innym, równie nieistniejącym. Teorie flogistonu i ciepłika istniały w nauce jeszcze przez kilka dziesięcioleci. Wbrew pozorom z pewnym pożytkiem, w wielu przypadkach dawały one bowiem poprawne wyniki.

Flogiston jest przykładem teorii skonstruowanej za pomocą z grubsza poprawnego rozumowania wychodzącego z fałszywych przesłanek, a mimo to dającej w dużej mierze dobre wnioski. Była to chyba pierwsza teoria naukowa wprowadzająca pewien porządek w zbiorze luźnych faktów z dziedziny chemii. Pośrednio przyczynił się flogiston do późniejszego rozwoju nauk o ciepłe. Upadł dopiero po latach, wraz z odkryciem nowych faktów doświadczalnych. Współcześnie w naukach przyrodniczych pod tym względem nie dzieje się „nic nowego pod słońcem”.



mała delta

Dywany Antoniego – nie tylko bajka o pewnych zastosowaniach ciągu Fibonacciego

Dawno, dawno temu, za drugą górą, za trzecią rzeką żył sobie królewicz Leonardo pochodzący ze szlacheckiego rodu Fibonaccich. No, może nie całkiem królewicz, ale piąty syn dyplomaty włoskiego. Może nie całkiem za trzecią rzeką, bo urodził się za ósmą doliną i trzynastoma bagnami, dokładniej w Pizie w 1175 roku. Zatem przynajmniej rzeczywiście żył dawno, dawno temu. Choć w pewnym sensie żyje do dzisiaj w swoich uczniach, bowiem wieść o liczbach Fibonacciego rozeszła się po świecie i szumi o nich niejednym las. Ciągu Fibonacciego użyto, na przykład, do opisu tempa rozmnażania się królików, układu liści i nasion na roślinach wszelkich. Znalaziono go też w trójkącie Pascala. Ciąg ten ukrywa się w zjawiskach ekonomicznych, meteorologicznych, wykorzystywany jest w muzyce i w sztuce. Jego wielbiciele znaleźli także wiele ciekawych zależności między wyrazami tego ciągu.

Ciekawe prezentacje dotyczące ciągu Fibonacciego są udostępniane przez Khan Academy – cykl: *Spirals, Fibonacci and being a plant*, gdzie nie tylko pokazane jest występowanie ciągu w przyrodzie, na przykład w układzie liści wokół łodygi, ale przy okazji wyjaśniona jest metodologia badań przyrodniczych.

Konstrukcja ciągu Fibonacciego:
 $f_1 = 1, f_2 = 1,$
 $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ dla $n > 2.$

8	8	16	24	40	64
5	5	10	15	25	40
3	3	6	9	15	24
2	2	4	6	10	16
1	1	2	3	5	8
1	1	2	3	5	8

Rys. 1

Ta opowieść będzie jednak o czymś nowym. Mistrz Antoni, wierny uczeń prawnokrólewicza Leonarda, opowie Wam, jak używając ciągu Fibonacciego, tkąć dywany i nie tylko. Zatem posłuchajcie.

Podstawowy ciąg Fibonacciego buduje się w ten sposób, że jego kolejny wyraz jest sumą dwóch wcześniejszych wyrazów, a pierwszymi ustalonymi wyrazami ciągu są 1 i 1. Dopisując kolejne liczby, otrzymamy bardzo długą, nieskończenie długą nić. Każdą liczbę, która pojawia się w tak skonstruowanym ciągu, nazywamy *liczbą Fibonacciego*.

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots$$

Do pracy! Dywan Antoniego tka się, zaczynając od czterech jedynek ułożonych w kwadrat. Na początek wypełnimy pierwsze dwie kolumny (nici), używając zasady konstrukcji ciągu Fibonacciego (tworzymy ciąg w górę od początkowych jedynek). Następnie tkajmy w prawo od otrzymanych kolumn. Dwie najniższe nici to po prostu ciągi Fibonacciego, wyższe tworzone tą samą zasadą, będą miały nowe kolory (początkowe wyrazy nie są jedynekami, rysunek 1). Tkając i tkając, otrzymamy kawał nieskończonego dywanu.

– *A teraz powiedzcie mi, dzieci, czy byłycie grzeczne? Zjadłyście dzisiaj śniadanie przed wyjściem do szkoły? I żadnych drożdżówek?* – zapytał sam królewicz Leonardo. – *Tak? To słuchajcie dalej mojego ucznia Antoniego.*

Przyjrzyjmy się bliżej naszemu tkackiemu warsztatowi.

1. Spójrzmy na przekątną naszego dywanu. Cóż to? Liczby na przekątnej są kwadratami liczb Fibonacciego. Tak jest nie tylko dla widocznej części dywanu, ale dla każdej liczby znajdującej się na przekątnej.

$$1 = 1^2, \quad 4 = 2^2, \quad 9 = 3^2, \quad 25 = 5^2, \quad 64 = 8^2, \quad 169 = 13^2, \quad 441 = 21^2$$

...
144	144	288	432	720	1152	1872	3024	4896	7920	12816	20736
89	89	178	267	445	712	1157	1869	3026	4895	7921	12816
55	55	110	165	275	440	715	1155	1870	3025	4895	7920
34	34	68	102	170	272	442	714	1156	1870	3026	4896
21	21	42	63	105	168	273	441	714	1155	1869	3024
13	13	26	39	65	104	169	273	442	715	1157	1872
8	8	16	24	40	64	104	168	272	440	712	1152
5	5	10	15	25	40	65	105	170	275	445	720
3	3	6	9	15	24	39	63	102	165	267	432
2	2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144

Rys. 2

2. Zerknijmy na nieco przesunięte przekątne (rysunek 2) rozpoczynające się od wartości 1 i 2.

$$1, 2, 6, 15, 40, 104, 273, 714, 1870, \dots$$

W tym ciągu różnice między kolejnymi wyrazami są kwadratami kolejnych liczb Fibonacciego.

$$2 - 1 = 1 = 1^2, \quad 6 - 2 = 4 = 2^2, \\ 15 - 6 = 9 = 3^2, \quad 40 - 15 = 25 = 5^2.$$

3. Weźmy pod lupę dowolny kwadrat dywanu złożony z czterech komórek. Okazuje się, że iloczyny elementów umieszczonych w przeciwległych narożnikach takiego kwadratu są równe. Co więcej, elementy w prawym górnym rogu i lewym dolnym rogu takiego kwadratu sumują się do liczby Fibonacciego. Jeszcze więcej? Jeżeli weźmiemy kwadrat dowolnej wielkości, to iloczyny elementów umieszczonych w wierzchołkach po skosie również są równe.

– Mistrzu Antoni, czy mógłbyś wyjawić nam tajemnicę Twoich dywanów? Skąd biorą się te wszystkie zależności, które nam wyjawiliś?

– Z przyjemnością – odpowiedział Mistrz i kontynuował: – Otóż zauważcie, moje dzieci, że nasz dywan jest wielką tabliczką mnożenia liczb Fibonacciego. Dowolna komórka w dywanie, znajdująca się w i -tej kolumnie i j -tym wierszu, to nic innego niż iloczyn najniższego elementu w kolumnie (liczby Fibonacciego f_i) i wartości znajdującej się najbardziej w lewo w wierszu komórki (liczby f_j). W związku z tym na przekątnej znajdują się kwadraty liczb Fibonacciego, tak jak na przekątnej w zwyczajnej tabliczce mnożenia znajdują się kwadraty kolejnych liczb naturalnych.

– Przecież zwykła tabliczka mnożenia, to taki dywan tylko utkany nieco innym ściegiem ... – zamyślił się jeden z uczniów.

Teraz przyjrzyjmy się kwadratom i zależności iloczynów elementów leżących w narożnikach.

Wybermy dowolny kwadrat, a jego narożniki oznaczmy przez $f_{l,m}$, $f_{l,n}$, $f_{k,m}$, $f_{k,n}$, gdzie $f_{i,j}$ oznacza element znajdujący się w kolumnie i oraz wierszu j . Cztery komórki kwadratu można opisać w następujący sposób:

$$f_{l,m} = f_l \cdot f_m, \quad f_{l,n} = f_l \cdot f_n, \quad f_{k,m} = f_k \cdot f_m, \quad f_{k,n} = f_k \cdot f_n.$$

Teraz równości zachodzące w kwadracie można ująć następująco

$$f_{l,m} \cdot f_{k,n} = f_l \cdot f_m \cdot f_k \cdot f_n \quad \text{oraz} \quad f_{l,n} \cdot f_{k,m} = f_l \cdot f_n \cdot f_k \cdot f_m,$$

czyli

$$f_{l,m} \cdot f_{k,n} = f_{l,n} \cdot f_{k,m}.$$

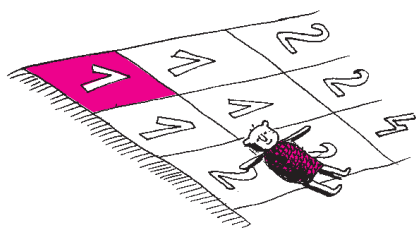
Zauważmy, że warunki, które spełniają cztery komórki dowolnego kwadratu, będą spełniać narożniki kwadratu dowolnej wielkości, a nawet dowolnego prostokąta!

W dywanie można doszukać się mnóstwa innych kolorowych ściegów:

4. $f_{1,1} + f_{2,2} + \dots + f_{n,n} = f_n \cdot f_{n+1}$
5. $f_{1,3} + f_{2,4} + f_{3,5} + \dots + f_{n,n+2} = f_{n+1} \cdot f_{n+2}$, dla n nieparzystych
6. $f_{n+1,n+1} - f_{n-1,n-1} = f_{2n}$

– Skoro już zdradziłem parę dywanowych sekretów, nie pozostaje mi nic innego, jak wskazać Wam kierunki poszukiwań nowych ściegów. Będziemy tkali i szukali nowych kolorów, ale to jutro, bo dzisiaj jestem już zmęczony – dodał Mistrz Antoni.

Małą Deltę przygotował Antoni DŁUGOSZ
uczeń szkoły podstawowej nr 32 im. Karola Chodkiewicza, Kraków



Uczniowie

W 1967 roku szkoła podstawowa wypuściła po raz pierwszy absolwentów ośmioletniej podstawówki (tak, kiedyś też były reformy szkolne). W ogólnym reformatorskim zamieszaniu można było zrobić coś nietypowego, więc Wydział Matematyki i Fizyki Uniwersytetu Warszawskiego uruchomił uniwersyteckie klasy matematyczno-fizyczne w liceum im. Klementa Gottwalda (w latach 1906–50 oraz po 1990 roku Stanisława Staszica) – pretekst był prosty: pierwszym dyrektorem tego liceum był Jan Zydler, znakomity nauczyciel matematyki i autor do dziś niezapomnianych podręczników geometrii.

Sprawie patronował profesor Stanisław Mazur, a organizatorem była pełna niewyczerpalnej energii Hanna Szmuszkowicz.

W jednej z pierwszych klas uczyłem geometrii (bo klasy były dwie, a geometrii uczył także Jerzy Lisiewicz, algebry zaś Juliusz Brzeziński i Maciej Bryński – byliśmy przekonani, że skoro uczyliśmy nauczycieli, to powinniśmy sami też zobaczyć, jak się to robi).

Na wiosnę 1969 roku przydarzyła mi się fantastyczna historia, którą chcę przypomnieć, bo w lipcu 2016 dowiedziałem się, że już obaj jej bohaterowie nie żyją.

Owi bohaterowie to uczniowie drugiej klasy liceum (czyli szesnastolatki): Jerzy Zabilski, później matematyk (zmarły w 2011 roku) i Wiesław Mielniczuk, później fizyk (zmarły w 2016 roku – dziwna jest ta kolejność naszego znikania).

W klasie zadaję zadanie: *wykazać, że dowolną izometrię płaszczyzny można uzyskać ze złożenia symetrii względem prostych należących do jednego pęku właściwego oraz jednego pęku niewłaściwego.*

Zadanie to klasa zbiorowo rozwiązuje (Czytelniku, rozwiąż i Ty), więc proponuję zadanie domowe: *wykazać, że dowolną izometrię płaszczyzny można uzyskać ze złożenia symetrii względem prostych należących do jednego pęku właściwego plus jedna prosta spoza tego pęku.*

Czworo uczniów odpowiedziało twierdząco. Wobec tego zaproponowałem pytanie dodatkowe: *jaki jest rząd generowania grupy izometrii w pierwszym i drugim przypadku?*

Tu niezbędne jest wyjaśnienie: nie wiedziałem, jaki jest wynik, ani nawet nie miałem pomysłu, jak się do tego zabrać (mój współnauczyciel też nie, a myślę, że wielu nie tylko wtedy, ale i do dziś nie wie).

Tymczasem moi dwaj bohaterowie podali wynik: 4 i ∞ ; i tym sposobem, jako nieletni uzyskali poważną publikację (Wiadomości Matematyczne XIII(1971), pp. 37-41) z rekomendacji profesora Stefana Straszewicza, twórcy olimpiad matematycznych.

A oto, jak uzyskali swoje rezultaty.

Do uzyskania wszystkich izometrii płaszczyzny wystarczą symetrie o osiach z $[A] \cup \{a\}$, gdzie $a \notin [A]$.

Dowód. Ponieważ izometria mająca punkt stały to obrót względem tego punktu lub symetria względem prostej przechodzącej przez ten punkt (a to mamy, bo możemy używać symetrii względem wszystkich prostych z $[A]$), wystarczy wykazać, że dowolny punkt P można nałożyć na A .

Przypadek 1: $|PA| \leq 4 \text{ dist}(a, A)$.

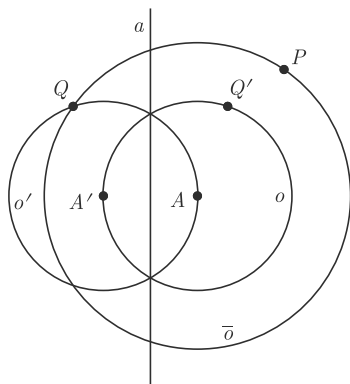
Odbijamy A względem a , otrzymując A' i rysujemy okrąg o środku A i promieniu AA' – oznaczmy go o . Obraz okręgu o w symetrii względem a oznaczmy przez o' . Okrąg \bar{o} o środku A , poprowadzony przez P , przecina okrąg o' (założenie!) w punkcie Q , więc możemy P przeprowadzić na Q za pomocą symetrii z $[A]$. Obraz Q' punktu Q w symetrii względem a leży na o , więc może być przez symetrię względem prostej z $[A]$ (konkretnie: symetralnej $Q'A'$) przeprowadzony na A' , a stąd przez symetrię względem a na A .

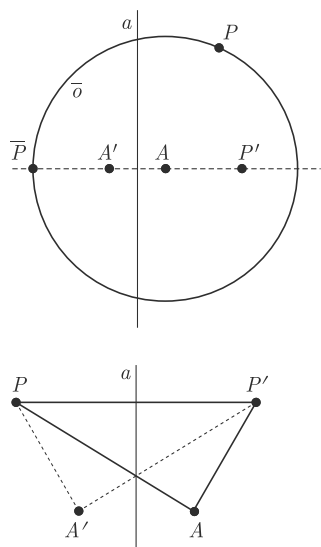
Zakładam, że Czytelnik wie, iż każdą izometrię płaszczyzny (czyli przekształcenie nie zmieniające odległości) można uzyskać przez złożenie dwóch lub trzech symetrii względem prostych. Mających wątpliwości odsyłam do mojego artykułu w *Delcie* 11/2015.

Pęk właściwy $[A]$ to zbiór wszystkich prostych przechodzących przez A .

Pęk niewłaściwy $[a]$ to zbiór wszystkich prostych równoległych do a .

Rząd generowania przekształcenia to minimalna liczba generatorów (tu symetrii osiowych) niezbędnych do jego uzyskania. Maksymalna z tych liczb dla zbioru przekształceń to rząd generowania tego zbioru (tu izometrii).





Przypadek 2: $|PA| \geq 4 \text{dist}(a, A)$

sprowadza się do przypadku 1: przez symetrię względem dwusiecznej $\sphericalangle PAA'$ punkt P przechodzi na \bar{P} i przez symetrię względem a na P' . Ponieważ

$$P'A = \bar{P}A' = \bar{P}A - 2 \text{dist}(a, A) = PA - 2 \text{dist}(a, A),$$

więc odległość od punktu A zmniejszyła się o $2 \text{dist}(a, A)$, co powtarzane wielokrotnie (na załączonym obrazku widać, że gdy musimy wykonać więcej kroków niż jeden, kolejny zaczyna się od prostej z $[A]$ równoległej do a) daje spełnienie warunku z przypadku 1. \square

Stwierdzenie, że rząd generowania jest w tym przypadku nieskończony, nawiązuje do rozważenia *Przypadku 2* – tam przybliżaliśmy punkt P do punktu A . Zauważmy, że to przybliżanie nie może być wykonane większymi niż tam krokami.

Symetrie względem prostych z $[A]$ nie przybliżają bowiem punktów do A , symetria zaś względem a przybliża punkty nie więcej niż o $2 \text{dist}(a, A)$:

$$PA - P'A = PA - PA' \leq AA'.$$

A ponieważ możemy punkt P obrać dowolnie daleko, więc izometria nakładająca go na A może wymagać dowolnie wielu symetrii – rząd zatem jest nieskończony.

Tyle o przypadku, gdy osie symetrii były wybierane z $[A] \cup \{a\}$ dla $a \notin [A]$.

Pozostaje wykazanie, że

Rząd generowania dla prostych z $[A] \cup [a]$ jest równy 4.

Dowód ma charakter raczej algebraiczny. Potrzebne są dwa lematy:

$$(1) \quad \forall A, m, n \exists k, l (S_m S_n = S_l S_k \wedge k \in [A]),$$

który jest oczywisty. Istotnie, gdy $m \parallel n$, jako k obieramy równoległą do m i przechodzącą przez A , a l równoległą do niej i leżącą względem niej tak, jak m względem n – wtedy oba złożenia są tym samym przesunięciem; gdy z kolei m i n mają wspólny punkt B , bierzemy jako k prostą AB , a l przez B leżącą tak, jak m względem n – wtedy oba złożenia są tym samym obrotem.

Drugi lemat nie jest już tak oczywisty

$$(2) \quad \forall A, a, l \exists m, n (S_l = S_m S_n S_m \wedge m \in [A] \wedge n \in [a]).$$

Tutaj najpierw przez A prowadzimy $a' \parallel a$ i $l' \parallel l$. Jako m bierzemy dowolną z dwusiecznych kąta $a'l'$ i przez jej przecięcie z l prowadzimy $n \parallel a$. Prosta m jest wtedy dwusieczną kąta ln . Stąd $S_l S_m$ i $S_m S_n$ realizują ten sam obrót, a równość $S_l S_m = S_n S_m$ to właśnie (2).

Mając takie lematy, nie natrafia się już na żadne trudności.

Dowolna izometria φ jest (jak to już przypominałem) złożeniem dwóch lub trzech symetrii osiowych, co rozpatrujemy kolejno.

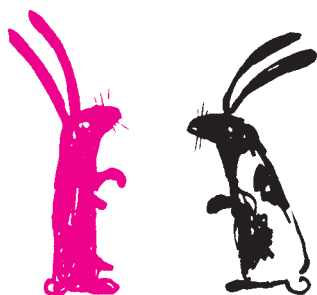
$$\begin{aligned} \varphi &= S_v S_u = S_l S_k = && \text{(na mocy (1) } k \in [A]) \\ &= S_m S_n S_m S_k && \text{(na mocy (2) } m \in [A] \wedge n \in [a]) \\ \varphi &= S_w S_v S_u = S_w S_p S_q = && \text{(na mocy (1) } q \in [A]) \\ &= S_l S_t S_q = && \text{(na mocy (1) } t \in [A]) \\ &= S_m S_n S_m S_t S_q = && \text{(na mocy (2) } m \in [A] \wedge n \in [a]) \\ &= S_m S_n S_r, \end{aligned}$$

ostatnia równość bierze się stąd, że q, t, m są współpękowe, a symetrie względem trzech prostych współpękowych zawsze można zastąpić jedną (co bez trudu można zauważyć również w argumentacji przy (1)).

Zaskakujące jest, że nadal do uzyskania izometrii zmieniających orientację potrzeba, tak jak i bez ograniczenia wyboru osi symetrii, jedynie trzech symetrii osiowych.

Takich miałem uczniów. Szkoda, że już ich nie spotkam.

Marek KORDOS



Artykuł o powyższym tytule wypada rozpocząć od przypomnienia, czym są kongruencje. Jeśli dwie liczby naturalne a i b dają tę samą resztę z dzielenia przez liczbę naturalną n (innymi słowy, jeśli $a - b$ jest podzielne przez n), uczenie jest stwierdzić, że a i b przystają do siebie modulo n i fakt ten zanotować jako $a \equiv b \pmod{n}$. W tym kontekście znaczek „ \equiv ” (lub raczej to, co on sobą reprezentuje) nazywamy właśnie *kongruencją*.

Kongruencje mają wiele wdzięcznych własności, między innymi można je dodawać i mnożyć stronami tak jak zwykle równania. Ich zastosowanie pozwala uprościć zawiłe nieraz rozumowania z zakresu teorii liczb. W moim artykule chciałbym skoncentrować się na problemach dotyczących początkowych cyfr liczb postaci n^k , gdzie n i k są liczbami naturalnymi. Rozpocznę od rozwiązania zadania, które skłoniło mnie do takich rozważań.

Zadanie. Udowodnij, że dla każdej niepodzielnej przez 10 liczby naturalnej n istnieje taka liczba naturalna k , że pierwsza i ostatnia cyfra liczby n^k są równe.

Rozwiązanie: Najpierw zauważmy, że dla dowolnego n mamy $n \equiv n^5 \pmod{10}$. Istotnie, niech $A = n^5 - n = n(n^2 - 1)(n^2 + 1)$. Jeśli n jest podzielne przez 5, to oczywiście 5 dzieli również A . Z drugiej strony, jeśli n nie jest podzielne przez 5, to rozpatrując wszystkie niezerowe reszty z dzielenia n przez 5, możemy się przekonać, że n^2 daje resztę 1 lub 4 z dzielenia przez 5 i w obu przypadkach 5 dzieli A . W analogiczny (a nawet prostszy) sposób pokazujemy, że A jest zawsze podzielne przez 2, skąd wnioskujemy podzielność A przez 10 i $n \equiv n^5 \pmod{10}$ dla dowolnej liczby naturalnej n . Zauważmy, że jeśli będziemy mnożyć tę kongruencję obustronnie przez n^4 , otrzymamy ciąg kongruencji

$$n \equiv n^5 \equiv n^9 \equiv \dots \pmod{10}.$$

Teraz już rozważamy tylko te potęgi n , których wykładnik daje resztę 1 z dzielenia przez 4. Dzięki temu ostatnia cyfra c liczby n będzie cyfrą, którą chcemy otrzymać jako pierwszą cyfrę liczby n^{4k+1} dla pewnego k . Chcemy zatem uzyskać

$$c \cdot 10^t \leq n^{4k+1} < (c+1)10^t, \text{ to znaczy } \frac{c}{n} \cdot 10^t \leq n^{4k} < \frac{c+1}{n} \cdot 10^t.$$

Po przyłożeniu do obu stron logarytmu dziesiętnego dostajemy równoważną postać

$$t + \log \frac{c}{n} \leq 4k \log n < t + \log \frac{c+1}{n}.$$

Dzięki zlogarytmowaniu nasz problem wygląda następująco: mamy nieskończenie długą drogę, na której co 1 mamy dziurę długości

$$\Delta = \left(\log \frac{c+1}{n} - \log \frac{c}{n} \right) = (\log(c+1) - \log c),$$

poczawszy od $\log \frac{c}{n}$. Po tej nieskończonej drodze skacze królik, który rozpoczyna w 0 i robi skoki długości $4 \log n$. Chcemy pokazać, że nasz królik wpadnie kiedyś do dziury. Innymi słowy, potrzebujemy uzasadnić, że

$$\log \frac{c}{n} \leq \{4k \log n\} < \log \frac{c}{n} + \Delta,$$

gdzie $\{x\}$ oznacza część ułamkową liczby x . Zauważmy najpierw, że dla różnych liczb naturalnych k, l liczby $\{4k \log n\}$ oraz $\{4l \log n\}$ są różne. W przeciwnym przypadku istniałoby takie m naturalne, że $4k \log n - 4l \log n = m$, czyli $n^{4(k-l)} = 10^m$, co przeczy założeniu o niepodzielności n przez 10. Rozważmy teraz liczby $\{4 \log n\}, \{8 \log n\}, \dots, \{4a \log n\}$, gdzie a to pewna liczba naturalna, która jest większa od Δ^{-1} . Skoro wypisane liczby są różne, to pewne dwie leżą w odległości mniejszej niż Δ (odległość liczb p i q należy tu rozumieć jako mniejszą z liczb $|p - q|$ oraz $1 - |p - q|$). Oznaczmy je przez $\{4x \log n\}$ oraz $\{4y \log n\}$, gdzie $x > y$. W tej sytuacji liczba $\{4(x - y) \log n\}$ leży w przedziale $(0, \Delta)$ lub $(1 - \Delta, 1)$. Patrząc na ciąg $\{4(x - y) \log n\}, \{8(x - y) \log n\}, \dots$ widzimy teraz, że dla początkowych wyrazów jest on ściśle monotoniczny i dla pewnego p naturalnego otrzymamy $\log c \leq \{4p(x - y) \log n\} < \log c + \Delta$. Wystarczy więc przyjąć $k = p(x - y)$, aby zakończyć rozwiązanie zadania.

*Student, Wydział Matematyki i Informatyki, Uniwersytet Adama Mickiewicza

**Rozwiązanie zadania F 919.**

Intensywność opadu 20 mm na godzinę oznacza, że na 1 m^2 powierzchni spada w ciągu godziny $2 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3 = 20 \text{ l}$ wody. Uderzenia kropli deszczu o dach są zderzeniami niesprężystymi i przekazywany przez nie dachowi pęd wynosi $v\Delta m$, gdzie Δm oznacza masę wody. Ciśnienie równa się sile działającej na jednostkę powierzchni. Mamy więc

$$p = v \frac{\Delta m}{S \Delta t} = v\rho H,$$

gdzie S oznacza powierzchnię dachu, a Δt czas, w którym na dach spadła masa wody równa Δm . Otrzymujemy $p \approx 0,056 \text{ N/m}^2$. Jest to wartość bardzo mała – gdyby woda nie spływała z dachu, to już po pierwszej minucie opadu wywierałaby ciśnienie $p \approx 3,3 \text{ N/m}^2$.

**Rozwiązanie zadania F 920.**

Dla utrzymania stałej temperatury ciała musimy w ciągu doby odprowadzić $E = P \cdot 24 \cdot 3600 \text{ s} = 8,64 \cdot 10^6 \text{ J}$ energii. Jest to energia potrzebna do odparowania

$$\frac{E}{l} = \frac{8,64 \cdot 10^6 \text{ J}}{2,257 \cdot 10^6 \text{ J}} \text{ kg} = 3,83 \text{ kg}$$

wody. Gdyby jedynym mechanizmem chłodzenia była wymiana ciepła poprzez promieniowanie, to utrzymanie stałej temperatury oznaczałoby, że różnica mocy promieniowania przez odkrytą powierzchnię naszego ciała i mocy padającego na nią promieniowania cieplnego otoczenia równa jest dokładnie P . Mamy $P = \sigma S(T^4 - T_0^4)$, a zatem

$$S = \frac{P}{\sigma(T^4 - T_0^4)},$$

gdzie $T = 310 \text{ K}$, a $T_0 = 295 \text{ K}$. Po podstawieniu danych liczbowych mamy $S \approx 1,06 \text{ m}^2$. Powierzchnia ciała człowieka dorosłego wynosi średnio niecałe 2 m^2 . Uwzględnienie faktu, że współczynnik emisji skóry jest mniejszy od 1, zwiększyłyby obliczoną wartość S . Jak z tego widać, w normalnych warunkach pocenie, promieniowanie oraz konwekcja i przewodnictwo ciepłe odgrywają istotną rolę.

W powyższym dowodzie można wyróżnić dwie istotne części: pierwsza polega na wskazaniu podciągu potęg n , które kończą się tą samą cyfrą, a w drugiej pokazaliśmy, że dowolna cyfra może stać na początku pewnego wyrazu tego podciągu. Tę drugą część można nietrudno zmodyfikować tak, aby wykazać poniższe:

Twierdzenie 1. Dla dowolnej liczby naturalnej $n > 1$, która nie jest potęgą dziesiątki, i dowolnego ciągu cyfr $c_1 \neq 0, c_2, \dots, c_s$ istnieje liczba naturalna k , dla której początkowe cyfry liczby n^k to c_1, \dots, c_s .

Z powyższego twierdzenia wynika, że dla dowolnego n możemy znaleźć k , dla którego n^k będzie się rozpoczynało, na przykład, od cyfr 100000, czyli będzie dość bliskie pewnej potędze dziesiątki. Warto zwrócić uwagę, że możemy oszacować wykładnik tej potęgi n niezależnie od n .

Twierdzenie 2. Jeśli $n > 1$ jest liczbą naturalną niepodzielną przez 10, to dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby naturalne k, l , że $10^l(1 - \varepsilon) \leq n^k \leq 10^l(1 + \varepsilon)$ oraz $k \leq \lfloor \log(1 + \varepsilon)^{-1} \rfloor$.

Dowód: Żądamy od naszego k , aby

$$10^l \cdot (1 - \varepsilon) \leq n^k \leq 10^l \cdot (1 + \varepsilon)$$

dla pewnego naturalnego l . Ponownie równoważnie

$$l + \log(1 - \varepsilon) \leq k \log n \leq l + \log(1 + \varepsilon),$$

więc

$$0 \leq \{k \log n\} \leq \log(1 + \varepsilon) \text{ lub } 1 + \log(1 - \varepsilon) \leq \{k \log n\} < 1.$$

Łatwo wykazać, że

$$1 + \log(1 - \varepsilon) < 1 - \log(1 + \varepsilon),$$

więc wystarczające jest, aby

$$0 \leq \{k \log n\} \leq \log(1 + \varepsilon) \text{ lub } 1 - \log(1 + \varepsilon) \leq \{k \log n\} < 1.$$

Dalej postępujemy tak jak poprzednio – kolejne liczby postaci $\{k \log n\}$ są różne, zatem wśród pierwszych $\lfloor (\log(1 + \varepsilon))^{-1} \rfloor + 1$ pewne dwie znajdują się w odległości mniejszej od $\log(1 + \varepsilon)$, a ich różnica jest szukaną wielokrotnością $\log n$.

Należy podkreślić, że opisana w twierdzeniu liczba k jest nie większa od $\lfloor (\log(1 + \varepsilon))^{-1} \rfloor$. Na przykład, biorąc $\varepsilon = 0,1$, otrzymujemy, że dla dowolnej liczby n istnieje liczba k nie większa od 24, taka, że n można przybliżyć potęgą dziesiątki z dokładnością do 10%. Przykładową wartością n , dla której przedstawione oszacowanie jest optymalne, jest 11001. Podobny rezultat możemy, oczywiście, uzyskać, rozważając przybliżenia potęgami innych liczb naturalnych niż 10. Przykładowo, dla $p = 2$ przybliżamy n^k z dokładnością do 10% liczbą postaci 2^l i wystarczy do tego k nie większe niż 7.

Wróćmy do naszych początkowych cyfr. Wydaje się, że ciągi liczb, które nie są jakoś szczególnie zbudowane, mogą rozpoczynać się dowolnymi cyframi. Oczywiście, nie jestem w stanie udowodnić powyższego, bo cóż to są „szczególne ciągi”? Oto kolejny przykład liczb, które mogą rozpoczynać się od dowolnych cyfr:

Twierdzenie 3. Liczby postaci k^n , gdzie n jest ustalone, mogą rozpoczynać się od dowolnego ciągu cyfr c_1, c_2, \dots, c_s .

Szkic dowodu: Jeśli k jest dość duże, to k^n i $(k+1)^n$ zbyt wiele się nie różnią (względnie), gdyż iloraz $\frac{(k+1)^n}{k^n}$ staje się dowolnie bliski 1, zatem z czasem różnica jest mniejsza niż różnica między elementami ciągu geometrycznego o dowolnie małym ilorazie większym od 1. Teraz logarytmując, otrzymamy „królika”, który robi skoki o długości malejącej do 0, więc z pewnością wpadnie do naszych dziur.

Ogólniej, dowolny ciąg liczb naturalnych $(a_n)_{n=1}^{\infty}$, dla którego granica ciągu $(\frac{a_{n+1}}{a_n})_{n=1}^{\infty}$ jest równa 1 ma tę własność, że dowolny skończony ciąg cyfr stanowi początkowe cyfry w zapisie dziesiętnym pewnego wyrazu ciągu $(a_n)_{n=1}^{\infty}$. Przykładem takiego ciągu jest również ciąg kolejnych liczb pierwszych (co wynika z klasycznego, lecz wielce nieoczywistego twierdzenia o liczbach pierwszych). Zachęcam Czytelników do poszukiwania innych ciągów, których prefiksy mogą być dowolnie ustalonym ciągiem cyfr.

Czemu nikt nie wierzy, że $P = NP$?

Jak wiadomo, problemy dzielimy zasadniczo na te łatwe i na te trudne. Dla człowieka taki podział jest oczywiście bardzo subiektywny. Dla komputera — jak się zaraz okaże — są to pojęcia naprawdę ostre i zupełnie precyzyjne.

Zanim przejdziemy do konkretów, potrzebne jest jeszcze jedno doprecyzowanie. Chciałbym już na początku wyraźnie zaznaczyć, że problemy, które będziemy rozważać (i próbować klasyfikować), to wyłącznie problemy decyzyjne, a więc takie, na które odpowiedź to zawsze TAK lub NIE, a nie jakaś liczba czy formuła. A więc interesujący w tym kontekście będzie dla nas problem rozstrzygania, czy dana liczba jest pierwsza czy nie albo czy graf zawiera cykl Hamiltona czy nie. Natomiast w tej definicji nie mieści się problem obliczenia pierwiastków danego równania czy wyznaczenia cyklu Eulera w grafie. Czytelnika Zawiedzionego chciałbym pocieszyć: problemy obliczeniowe zwykle wcale nie są istotnie trudniejsze od decyzyjnych. Nie czas i nie miejsce na mocne uzasadnienie tego zdania, podam tylko przykład: zamiast prosić komputer o znalezienie cyklu Hamiltona dla danego grafu, wystarczy nam program, który rozstrzyga, czy daną ścieżkę da się rozszerzyć do jakiegoś cyklu Hamiltona.

Wróćmy do meritum. Dla komputera (a może raczej: dla informatyka w komputer wyposażonego?) problem decyzyjny jest łatwy, gdy istnieje program, który go zawsze (dla każdego danych) poprawnie rozwiązuje oraz czas działania tego programu można oszacować z góry przez jakiś wielomian z rozmiaru danych. Takim problemem jest chociażby rozstrzyganie, czy podany na wejściu graf zawiera cykl Eulera, albo stwierdzanie, czy opisane równanie kwadratowe ma pierwiastki rzeczywiste. Klasę takich problemów oznaczamy jako P , od angielskiego *polynomial*.

Spróbujmy przejść oczko wyżej, a więc do prezentacji klasy problemów NP . Nie zacznę od rozwinięcia tego skrótu, wolę bohaterkę przedstawić od innej strony. Moim zdaniem najlepiej jest myśleć o problemach NP jako o problemach, które *nie są przynajmniej beznadziejnie trudne* (NSPBT, choć krócej jest jednak NP). A problemy NSPBT to dla mnie takie, dla których — o ile odpowiedź brzmi TAK — przynajmniej istnieje odpowiedź, którą gdybyśmy znali (a której znalezienie, być może, jest koszmarnie trudne), to już byśmy umieli łatwo (w sensie już zdefiniowanym) zweryfikować, że odpowiedź faktycznie brzmi TAK. Przykładowo: problem istnienia cyklu Hamiltona jest w NP vel NSPBT. Podpowiedzią jest właśnie wskazanie opisanego cyklu. Łatwo (tym razem: ludzko łatwo) uwierzyć, że samo zweryfikowanie, czy podany cykl jest cyklem Hamiltona w danym grafie, nie jest dla komputera trudne. Podobnie problem spełnialności formuł logicznych: tu podpowiedzią będzie przypisanie zmiennym konkretnych wartości logicznych. I znów: samo sprawdzenie, czy formuła jest prawdziwa przy podanym wartościowaniu jest zadaniem prostym. Oczywiście bynajmniej nie wynika z tego, że problemy decyzyjne: istnienie cyklu Hamiltona w danym grafie czy problem spełnialności formuł są łatwe. Wręcz odwrotnie: podejrzewa się, że nie są one łatwe (nie są w P). Pokazaliśmy tylko, że jeśli odpowiedź jest

pozytywna, to istnieje odpowiedź (weryfikator, świadek — różne terminy można znaleźć), która potrafi nas do tego przekonać. Przekonać nas — albo lepiej: udowodnić nam.

Ta ostatnia uwaga jest chyba kluczowa. Bo w tej terminologii możemy wszystko wysłowić jeszcze inaczej: problemy decyzyjne z klasy P to takie, które daje się efektywnie (wielomianowo) rozstrzygać na komputerze. Natomiast problemy z klasy NP to takie, które jeśli mają pozytywną odpowiedź, to jest możliwe uzupełnienie jej DOWODEM, który da się efektywnie zweryfikować. Zauważmy, że druga definicja nie odnosi się do tego, czy znalezienie rzeczzonego dowodu jest efektywne. Być może wymaga wykładniczego czasu działania komputera! (Uwaga: z definicji klasy NP wynika, że rozważany dowód nie może być za długi — musi być wielomianowy, bo inaczej nie dałoby się go zweryfikować w czasie wielomianowym.)

Spójrzmy teraz na jeszcze inny problem z klasy NP . Niech wejściem będzie jakaś hipoteza matematyczna H , której zapis ma długość k . Odpowiedzią na problem jest TAK, gdy istnieje dowód matematyczny tej hipotezy o długości nie większej niż k^{20} . Łatwo sprawdzić, że ten problem (oznaczymy go jako X) w istocie jest w NP — świadkiem jest dowód matematyczny hipotezy.

Powoli możemy nabierać intuicji, dlaczego w takim razie nikt nie wierzy, że $P = NP$. Bo przecież gdyby $P = NP$, to tak naprawdę by oznaczało, że problem X jest też w P . Innymi słowy rozstrzyganie hipotez matematycznych (OK, coś trochę słabszego: rozstrzyganie, czy hipoteza ma dowód krótszy niż jakieś bardzo duże ograniczenie) nie byłoby specjalnie trudniejsze od samego procesu mechanicznej weryfikacji poprawności dowodu!

A w to nie uwierzy chyba nikt, kto choć raz w życiu coś trudnego udowodnił, a końcowy dowód był elegancki i krótki.

Klasa NP ma jeszcze jedną fascynującą własność. Istnieją w niej problemy dowodliwie najtrudniejsze (tzw. zupełne). Problem NP -zupełny to taki, że **każdy** inny problem z NP można do niego *zredukować* w czasie wielomianowym. Przykładem problemu NP -zupełnego jest chociażby już omawiany problem cyklu Hamiltona. Oznacza to, że np. każdą instancję H problemu $X \in NP$ długości k da się efektywnie przerobić na pewien graf (rozmiaru wielomianowego od k) taki, że w tym grafie istnieje cykl Hamiltona wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje dowód matematyczny dla hipotezy H długości nie większej niż k^{20} ! Oczywiście powszechnie wierzy się, że problemy NP -zupełne nie są w P , czyli że są trudne, więc ta konstrukcja niekoniecznie musi być pomocna w dowodzeniu hipotezy H .

Tomasz KAZANA

PS. Wypada dodać, że oryginalne rozwinięcie skrótu NP , czyli *nondeterministic polynomial*, odwołuje się do innej (oczywiście równoważnej) definicji klasy NP . Zakładamy w niej, że program działa wielomianowo (czyli szybko), ale może wykonywać niedeterministyczne kroki i zakładać, że „wylosował dobrze”. W przypadku problemu X , mógłby napisać losowy ciąg symboli logicznych, po czym sprawdzić, że *napisał mu się* poprawny dowód.

Szkolny Festiwal Nauki

Dziś będzie o dniach uroczystych udostępniania wiedzy. Do takich dni organizatorzy muszą się porządnie przygotować (napracować), co zawsze się „opłaca”. A ja muszę napisać, bo przeżyłam ostatnio bardzo intensywnie takie zdarzenie.

Był to pierwszy szkolny Festiwal Nauki w Słupsku, w I LO im. Bolesława Krzywoustego. Mam nadzieję, że jeszcze do Słupska w przyszłości pojadę w mniej pracowitych okolicznościach, bo ostatni pobyt był klasyczny: z pociągu do hotelu, dwa dni intensywnych spotkań i wykładów, do pociągu i do domu. Więc tylko w biegu zobaczyliśmy słynną w świecie galerię Witkacego w Muzeum Pomorza Środkowego, czyste miasto o średnim natężeniu ruchu kołowego. A szczegółowo – tylko ciepłą szkołę, dyżurujących festiwalowo z uśmiechem uczniów, nauczycieli z dyrekcją uprzedzających nasze prośby i oczekiwania. Duża aula była pełna uczniów z różnych szkół. Uczniowie zadawali pytania (co świadczy o zainteresowaniu tematami), byli skupieni i cierpliwi (uczeni nie zawsze pilnują dyscypliny czasowej wykładu), wykładowcami byli członkowie Rady Upowszechniania Nauki PAN. To nasza forma upowszechniania – w ośrodkach trochę oddalonych od centrum. W Słupsku w latach poprzednich odbywał się też Festiwal Bałtycki, w ostatnich latach zaniedbany przez głównego sponsora – Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego.

RUN (podoba mi się ten angielsko-dwuznaczny skrót) przywiózł następujące tematy: Półprzewodniki (prof. A. Wiśniewski), *Historia gatunku Homo sapiens oczyma genetyka* i *O manipulacjach genetycznych* (prof. P. Golik), *Sekretne życie pajków* (prof. M. Żabka), *Brud, bakterie i my* (P. Dołowy), *Transgenderyzm u ryb* (prof. E. Kulczykowska). Wieczorem spotkaliśmy się w hotelowym lokalu w Kawiarni Naukowej na rozmowy o GMO (profesorowie J. Hennig, P. Golik i M. Fikus), Patrycja Dołowy poprowadziła warsztaty fotograficzne.

Szkoła przedstawiła fascynującą opowieść *Od laboratorium fizycznego do konferencji FabLearn w Uniwersytecie Stanforda* (uczniowie klasy IIID, nauczyciele dr Mirosław Brozis, mgr Maja Dudek). O tych osiągnięciach uczniów pisano i mówiono w Polsce, ale my usłyszeliśmy o nich z ust wykonawców bezpośrednio, co nadaje temu niezwyklej osiągnięciu szczególnego kolorytu. Uczniowie bowiem zaprojektowali i zbudowali (za 1500 zł przyznanych przez Szkołę) przenośne, składane planetarium (komputer i rzutnik pożyczili, ale pomysły klimatyzator skonstruowali sami), wygrali parę pośrednich konkursów i z pomocą miejscowych sponsorów, również internautów, wyjechali na międzynarodowy konkurs do Kalifornii. Będą to pamiętańca do końca życia (zresztą ja ich opowieść też). I może najważniejszą mądrość z tego pobytu: marzenia są po to, żeby je realizować.

Mam uczucie, że razem z „Jedynką” zasadziliśmy w Słupsku małą roślinkę. Mam taką nadzieję, że będzie dalej rosła. Może w postaci współdziałania z Akademią Pomorską i innymi wyższymi szkołami w Słupsku, z Uniwersytetem Trzeciego Wieku, z Muzeum Pomorza Środkowego. Że zbierzemy się znowu na kolejnych spotkaniach Kawiarni Naukowej. Że zadawać będziemy nauce kolejne pytania. I może inne miasta w Polsce też o podobnych spotkaniach pomyślą – nie musi się być wielkim miastem, ludzie niosą w sobie pytania do nauki wszędzie. Pierwsza brytyjska Kawiarnia Naukowa powstała w pubie niewielkiej angielskiej wsi!

Dlatego wyłamalam się, przepraszam, z tonu dotychczasowych swoich felietonów. Proszę nie uważać, że napisałam „sprawozdanie z delegacji”. Napisałam o ważnych zjawiskach, które warto podtrzymywać i propagować. I – dziękujemy za pomoc Urzędowi Miasta z jego prezydentem Robertem Biedroniem.

Magdalena FIKUS

Informatyczny kącik olimpijski (101): Coś się popsło

W noworocznym kąciku omówimy zadanie *Wykrywanie wrednej usterki* pochodzące z zeszłorocznej Międzynarodowej Olimpiady Informatycznej, która odbyła się w Kazaniu (Rosja). Autorzy zadania oczekują od nas, że pomożemy zdiagnozować usterkę, która wkradła się do bazy danych zaimplementowaną przez niefrasobliwego inżyniera Ilszata.

Baza danych inż. Ilszata miała działać bardzo prosto. Zaprojektowane były tylko dwie operacje. Pierwsza operacja $\text{add}(x)$ miała za zadanie dodanie do bazy danych nowego elementu x , o którym zakładamy, że jest zawsze ciągiem n bitów (przy czym dodatkowo możemy przyjąć, że n jest potęgą dwójki). Druga operacja $\text{check}(x)$ powinna sprawdzać, czy x znajduje się w bazie, czy też nie.

Jako się rzekło, nie wszystko poszło według z góry ustalonego planu.

Okazało się, że operacja $\text{check}(x)$ działa zupełnie poprawnie, natomiast operacja $\text{add}(x)$ ma w sobie dziwnego *buga* (oszibkę?). Otóż, po wywołaniu $\text{add}(x)$, zamiast ciągu x , do bazy danych dodawany jest ciąg $\pi(x)$ dla pewnej (nieznanej nam) permutacji π . Celem zadania jest właśnie ustalenie tej permutacji, poprzez wykonanie pewnego ciągu operacji na (początkowo pustej) bazie danych. Dodatkowym utrudnieniem jest założenie, że najpierw możemy wykonywać wyłącznie operacje typu add , a później wyłącznie operacje typu check . Innymi słowy: nie możemy przeplatać różnych typów operacji.

Zaprezentujemy dwa rozwiązania: pierwsze wymaga wykonania $O(n^2)$ operacji, drugie (maksymalnie punktowane): $O(n \log n)$ operacji.

W pierwszym podejściu zaczynamy od wykonania n operacji add na następujących elementach: $10^{n-1}, 110^{n-2}, 1110^{n-3}, \dots, 1^n$. Następnie przechodzimy do fazy check -ów i zaczynamy od zapytania bazy danych o elementy: $10^{n-1}, 010^{n-2}, 0010^{n-3}, \dots, 0^{n-1}1$. Oczywiście dokładnie raz otrzymamy odpowiedź pozytywną, dzięki czemu ustalimy na co zamienił się element 10^{n-1} (jedyń z jedną jedynką), czyli poznamy $\pi(1)$. Czas na kolejne pytania. Tym razem pytamy (kolejno) o wszystkie ciągi zawierające dwie jedynki, z których jedna jest zawsze na pozycji $\pi(1)$. Podobnie jak poprzednio dokładnie raz otrzymamy odpowiedź pozytywną, co pozwoli na ustalenie obrazu 110^{n-2} , a ten określi wartość $\pi(2)$. Postępując dalej w ten sposób ustalamy w kolejnych krokach kolejne wartości $\pi(i)$ dla $3 \leq i \leq n$. Każdy krok nie wymaga więcej niż $O(n)$ zapytań, a więc łączny czas działania szacuje się z góry, zgodnie z obietnicą, przez n^2 .

Rozwiązanie szybsze opiera się na zastosowaniu popularnej (znacznie dłużej niż teoria algorytmów) metody „dziel i zwyciężaj”. Idea polega na ustaleniu obrazów pierwszej i drugiej połówki indeksów permutacji (czyli zbiorów $\{\pi(1), \dots, \pi(n/2)\}$ oraz $\{\pi(n/2+1), \dots, \pi(n)\}$) a następnie przeanalizowanie (rekurencyjnie) każdej z połówek niezależnie od siebie. Aby ten pomysł zrealizować w ramach założeń zadania (nie możemy przeplatać add -ów i check -ów!) potrzeba pewnej zręczności.

Zacznijmy od definicji pewnej rodziny zbiorów. Niech $A_2 = \{10\}$ oraz niech $A_{2k} = A_k \cdot 1^k \cup 1^k \cdot A_k \cup \{10^{2k-1}, 010^{2k-2}, \dots, 0^{k-1}10^k\}$ (patrz przykład na marginesie).

Właściwe rozwiązanie zaczyna się od wykonania operacji add na wszystkich elementach zbioru A_n . Odtąd możemy już wykonywać wyłącznie operacje check . Zaczynamy od zapytania o wszystkie elementy postaci $0^m 10^{n-m-1}$, czyli te z jedną jedynką. Widzimy, że w zbiorze A_n znajduje się dokładnie $n/2$ elementów z jedną jedynką, a więc i tyle dostaniemy pozytywnych odpowiedzi, przy okazji ustalając na co „przechodzą” obie połówki permutacji π . W tym miejscu chciałoby się po prostu napisać *i dalej rekurencyjnie*. Jest tak w istocie, ale trzeba mieć w głowie pewną subtelność. Otóż zbiór elementów, które włożyliśmy do bazy danych został już raz na zawsze ustalony. Trzeba się więc upewnić, czy w wywołaniach rekurencyjnych nie przeszkadzać nam będą jakieś inne elementy z innych faz oraz jak właściwie tłumaczyć zapytania z faz mniejszego rozmiaru na prawdziwe zapytania, gdzie mamy jedno n ustalone z góry.

Zakończę sakramentalnym: da się, ale ze szczegółami pozostawiam Czytelnika samego.

Przykładowo, jeśli $n = 4$ oraz $\pi = [4, 2, 3, 1]$, to po próbie dodania do pustej bazy elementów 0000, 1100 oraz 0111, tak naprawdę znajdują się w niej elementy 0000, 0101 i 1110.

Tutaj wykładnik oznacza krotność powtórzenia ostatniego symbolu.

$A_4 = \{1011, 1110, 1000, 0100\}$
 $A_8 =$
 $\{10111111, 11101111, 10001111, 01001111,$
 $11111011, 11111110, 11111000, 11110100,$
 $10000000, 01000000, 00100000, 00010000\}$
itd.

Czas działania wyraża rekurencja
 $T(n) = 2T(n/2) + n$, co oznacza, że
 $T(n) = O(n \log n)$.

Tomasz KAZANA

Topologiczny Nobel

Nagrodę Nobla z Fizyki za rok 2016 odebrali Davis J. Thoules (połowę), F. Duncan M. Haldane (ćwierć) oraz J. Michael Kosterlitz (ćwierć). Zostali oni nagrodzeni za *teoretyczne odkrycia topologicznych przemian fazowych oraz topologicznych stanów materii*.

Ich przewidywania były zaskoczeniem dla specjalistów, włącznie z samymi autorami.

Od lat trzydziestych dwudziestego wieku wiadomo, że wyjaśnianie własności materii skondensowanej wymaga rozpatrywania aspektów kolektywnych. Najprościej można powiedzieć, że nagrodzone badania wyniosły tę kolektywność na wyższy poziom abstrakcji i doprowadziły do zaskakujących przewidywań, które nie tylko zostały spektakularnie potwierdzone doświadczalnie, ale już znalazły zastosowania praktyczne oraz bardzo dobrze roją na przyszłość.

W pierwszej ze wskazywanych prac [1] Thoules i Kosterlitz przewidzieli nowy rodzaj przemiany fazowej. Wcześniej ugruntował się pogląd, że przemiana fazowa zawsze wiąże się ze zmianą symetrii. Np. woda, zamarzając, zmienia grupę symetrii z nieskończonej, obejmującej dowolne obroty i translacje, na skończoną grupę krystalograficzną, dopuszczającą tylko obroty o określonej wartości kąta oraz translacje o wielokrotność stałej siatki kryształu. Innym przykładem jest przemiana metalu w ferromagnetyk przy przekraczaniu temperatury Curie w trakcie chłodzenia. W tym przypadku materiał jest trójwymiarowy, a parametr uporządkowania (magnetyzacja) jest jednowymiarowy. Natomiast do opisu zjawisk takich jak nadprzewodnictwo czy nadciekłość konieczne jest rozpatrywanie zespolonego parametru uporządkowania, co jest konsekwencją kwantowej natury tych makroskopowych zjawisk.

W fizyce fazy skondensowanej jest jednak wiele sytuacji, w których efektywny wymiar przestrzeni jest mniejszy od trzech. Wtedy termodynamiczne fluktuacje niszczą uporządkowanie nawet w temperaturze bliskiej zera bezwzględnej. A przy braku uporządkowania nie może być przemiany fazowej. Tak się przynajmniej wszystkim wydawało. Jednak w przypadku, gdy parametr uporządkowania jest zespolony, okazało się [1], że nie można zapomnieć o kolektywnym zachowaniu polegającym na możliwości tworzenia się wirów. Ignorowano to, bo energetyczny koszt takiej konfiguracji skaluje się jak logarytm stosunku rozmiaru próbki do rozmiaru oka wiru. To, czego nie zauważano, to możliwość tworzenia się par wir–antywir. Z daleka sumaryczna wirowość takiej pary jest zerowa, a energetyczny koszt jej utworzenia jest niewielki, proporcjonalny do logarytmu stosunku separacji wir–antywir do rozmiarów oka wiru.

Niedostrzeżone wcześniej topologiczne przejście fazowe (przejście Kosterlitz–Thoulesa) pojawia się w temperaturze, przy której energia swobodna (energia wewnętrzna pomniejszona o iloczyn temperatury i entropii) się zeruje. Powyżej tej temperatury tworzą się pojedyncze

wiry, poniżej występują jedynie pary wir–antywir. Jest to pierwsze odkryte przejście fazowe, w którym nie zmienia się symetria układu. Mechanizm ten jest uniwersalny. Stosuje się do wszystkich systemów, które można uważać za dwuwymiarowe z zespolonym parametrem uporządkowania.

Kolejnym zaskakującym odkryciem teoretycznym [2] było wyjaśnienie kwantowego efektu Halla. Ta, doświadczalnie stwierdzona, kwantyzacja przewodności gazu elektronowego efektywnie ograniczonego do dwuwymiarowej warstwy i poddanego silnemu polu magnetycznemu o kierunku prostopadłym do płaszczyzny warstwy, okazała się być czysto topologicznym efektem. Kolejne skoki przewodności związane są z przejściami od konfiguracji bez dziur (jak sfera) do mającej dokładnie jedną dziurę (jak torus), dwie dziury itd. Przy czym mierzone wartości przewodności są kompletnie niezależne od konkretnej realizacji. Zgodność z tym topologicznym przewidywaniem została potwierdzona z dokładnością lepszą niż jedna miliardowa. Pozwoliło to na zdefiniowanie precyzyjnego wzorca oporu elektrycznego (który jest odwrotnością przewodności).

Jeszcze bardziej zaskakujące rezultaty zapoczątkowała praca [3]. Okazało się, że przy rozpatrywaniu modeli jednowymiarowych, takich jak łańcuchy spinów o konfiguracji antyferromagnetycznej (sąsiednie spiny skierowane przeciwnie) własności łańcuchów spinów połówkowych są inne niż całkowitych. Te ostatnie okazują się topologiczne w tym sensie, że własności zależą nie od lokalnych interakcji, tylko od łańcucha jako całości. Okazało się, że w takim łańcuchu generuje się tzw. topologiczny fluid podobny jak w przypadku kwantowego efektu Halla.

Topologiczne stany materii są uważane za jeden z najciekawszych kierunków badań fizyki fazy skondensowanej. Bada się teoretycznie oraz tworzy doświadczalnie topologiczne izolatory, przewodniki, nadprzewodniki itp. Za każdym razem topologiczność odnosi się do rozpatrywania własności i wzbudzeń próbek materii jako całości. Badane stany są jednocześnie skrajnie abstrakcyjne i w pełni realne. Wykorzystując podejście zaproponowane przez Feynmana, prowadzi się symulacje kwantowe stanów za pomocą kondensatów Bosego–Einsteina.

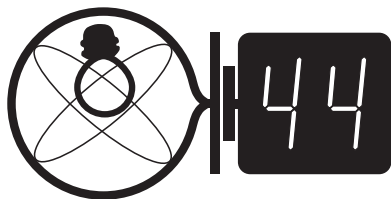
Można powiedzieć, że fizyka fazy skondensowanej pozwala na tworzenie nowych rzeczywistości o zaskakujących własnościach. Ta zabawa prowadzi do konkretnych zastosowań, a może kiedyś pomoże w zrozumieniu tej jednej rzeczywistości, w której żyjemy.

Piotr ZALEWSKI

- [1] J.M. Kosterlitz, D.J. Thouless, *Long range order and metastability in two dimensional solids and superfluids (Application of dislocation theory)*, *Journal of Physics C: Solid State Physics*, **5**(11):L124, 1972
- [2] D.J. Thouless, Mahito Kohmoto, M.P. Nightingale, M. Den Nijs, *Quantized hall conductance in a two-dimensional periodic potential*, *Physical Review Letters*, **49**(6):405, 1982
- [3] F.D.M. Haldane, *Continuum dynamics of the 1-D Heisenberg antiferromagnet: Identification with the $O(3)$ nonlinear sigma model*, *Physics Letters A*, **93**(9):464, 1983

Skrót regulaminu

Każdy może nadsyłać rozwiązania zadań z numeru n w terminie do końca miesiąca $n + 2$. Szkice rozwiązań zamieszczamy w numerze $n + 4$. Można nadsyłać rozwiązania czterech, trzech, dwóch lub jednego zadania (każde na oddzielnej kartce), można to robić co miesiąc lub z dowolnymi przerwami. Rozwiązania zadań z matematyki i z fizyki należy przysyłać w oddzielnych kopertach, umieszczając na kopercie dopisek: **Klub 44 M** lub **Klub 44 F**. Oceniamy zadania w skali od 0 do 1 z dokładnością do 0,1. Ocenę mnożymy przez współczynnik trudności danego zadania: $WT = 4 - 3S/N$, gdzie S oznacza sumę ocen za rozwiązania tego zadania, a N – liczbę osób, które nadesłały rozwiązanie choćby jednego zadania z danego numeru w danej konkurencji (M lub F) – i tyle punktów otrzymuje nadsyłający. Po zgromadzeniu 44 punktów, w dowolnym czasie i w którejkolwiek z dwóch konkurencji (M lub F), zostaje on członkiem **Klubu 44**, a nadwyżka punktów jest zaliczana do ponownego udziału. Trzykrotne członkostwo – to tytuł **Weterana**. Szczegółowy regulamin został wydrukowany w numerze 2/2002 oraz znajduje się na stronie deltami.edu.pl



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2017

Zadania z fizyki nr 630, 631

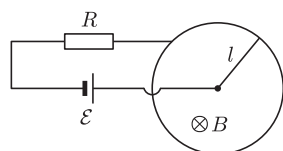
Redaguje *Elżbieta ZAWISTOWSKA*

630. Samolot leci z prędkością u po prostej poziomej, przechodzącej nad głową obserwatora. W pewnej chwili obserwator widzi samolot w kierunku, który tworzy z pionem kąt φ . Jaki kąt z pionem tworzy w tej samej chwili kierunek, wzdłuż którego dociera do obserwatora dźwięk silnika samolotu? Prędkość dźwięku wynosi v . Rozważ przypadki $u < v$ oraz $u > v$.

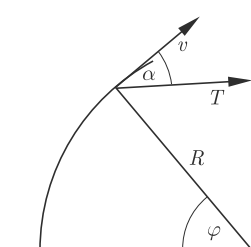
631. Na powierzchni poziomej znajdują się dwa jednakowe, cienkościenne walce o masie m każdy. Osie walców są równoległe, promienie są równe R . Na początku jeden z walców spoczywa, a drugi toczy się bez poślizgu w kierunku pierwszego z prędkością ruchu postępowego v_0 aż do centralnego, sprężystego zderzenia. Współczynnik tarcia kinetycznego walców o podłoże jest równy μ , tarcie między walcami jest zaniedbywalne. Znaleźć maksymalną odległość między walcami po zderzeniu.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2016

Przypominamy treść zadań:



Rys. 1



Rys. 2

622. Motocyklista porusza się po torze w kształcie okręgu. Ruszając z miejsca, chce jak najszybciej osiągnąć maksymalną prędkość. Jaką część okręgu przebędzie zanim osiągnie ten cel?

623. W obwodzie przedstawionym na rysunku 1, metalowy pręt może obracać się wokół środka metalowego pierścienia o promieniu l . Drugim końcem dotyka pierścienia. Siła tarcia w ruchomym kontakcie wynosi F . Jednorodne pole magnetyczne o indukcji B jest prostopadłe do powierzchni pierścienia. Siła elektromotoryczna ogniwa wynosi ε , opór obwodu jest równy R . Znaleźć ustaloną prędkość pręta i natężenie prądu w obwodzie.

622. Podczas rozpędzania motocyklista musi optymalnie wykorzystać siłę tarcia. Oznaczmy przez α kąt między prędkością v i maksymalną siłą tarcia T (rys. 2) w pewnej chwili podczas rozpędzania. Równania ruchu motocyklisty w kierunku stycznym i prostopadłym do toru mają postać: $m \frac{dv}{dt} = T \cos \alpha$ oraz $\frac{mv^2}{R} = T \sin \alpha$. Różniczkując względem czasu drugie równanie i uwzględniając pierwsze, otrzymujemy:

$$\frac{2mv}{R} \frac{dv}{dt} = T \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}, \quad \frac{2v}{R} = \frac{d\alpha}{dt}.$$

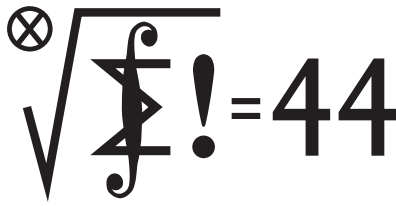
Prędkość kątowna motocyklisty w rozważanej chwili dana jest wzorem $\omega = \frac{v}{R} = \frac{d\varphi}{dt}$, stąd $2\varphi = \alpha + \text{const}$. W chwili początkowej $\varphi = 0$ i $\alpha = 0$, zatem $\text{const} = 0$. Gdy motocyklista osiąga maksymalną prędkość, $\alpha = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \frac{\pi}{4}$, co odpowiada $\frac{1}{8}$ okręgu.

623. Gdy pręt obraca się z prędkością kątowną ω , w wyniku zmiany strumienia pola magnetycznego Φ_B przez powierzchnię obwodu powstaje siła elektromotoryczna indukcji, której wartość wynosi

$$\varepsilon_{\text{ind}} = \frac{\Delta \Phi_B}{\Delta t} = \frac{\pi l^2 B}{T} = Bl^2 \omega / 2.$$

Natężenie prądu w obwodzie dane jest wzorem $I = (\varepsilon - Bl^2 \omega / 2) / R$. Warunek równowagi momentów sił działających na obracający się ze stałą prędkością kątowną pręt ma postać $B I l^2 / 2 = F l$, stąd $I = 2F / (Bl)$. Z porównania wzorów na natężenie prądu otrzymujemy ustaloną prędkość kątowną pręta:

$$\omega = \frac{2(Bl\varepsilon - 2RF)}{B^2 l^3}.$$



Termin nadsyłania rozwiązań: 31 III 2017

Zadania z matematyki nr 733, 734

Redaguje Marcin E. KUCZMA

733. Wierzchołek czworościanu nazwijmy *ciekawym*, jeśli z trzech wychodzących zeń krawędzi nie da się zbudować trójkąta.

- (a) Czy istnieje czworościan, którego wszystkie wierzchołki są ciekawe?
 (b) Czy istnieje czworościan, mający dokładnie jeden ciekawy wierzchołek?

734. Udowodnić, że dla każdej liczby naturalnej $n > 1$ oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich p, q, a_1, \dots, a_n zachodzi nierówność

$$\sum_{k=1}^n a_k^{p+q} a_{k+1}^{-q} \geq \sum_{k=1}^n a_k^p \quad (\text{przyjmujemy } a_{n+1} = a_1).$$

Zadanie 734 zaproponował pan Witold Bednarek z Łodzi.

Rozwiązania zadań z numeru 9/2016

Przypominamy treść zadań:

725. W czworokącie wypukłym $ABCD$ kąty przy wierzchołkach B i D są proste. Przekątne przecinają się w punkcie E . Prosta prostopadła do AC , przechodząca przez punkt E , przecina proste AB i AD w punktach K i L . Wykazać, że punkty B, D, K, L leżą na jednym okręgu.

726. Niech n będzie ustaloną liczbą całkowitą dodatnią. Dowieść, że istnieje nieujemna liczba całkowita m taka, że $2m \leq n$ oraz różnica $2^n - 2^m$ dzieli się przez n .

725. Gdy przekątne są prostopadłe, punkty K i L pokrywają się z B i D , i nie ma czego dowodzić. Przyjmijmy dalej, nie tracąc ogólności, że kąt AEB jest ostry (wtedy punkt B leży między A i K , zaś L leży między A i D). Czworokąt $ABCD$ ma okrąg opisany (o średnicy AC). Stąd oraz z zależności w trójkątach prostokątnych ABC i AEK dostajemy ciąg równości

$$|\sphericalangle LDE| = |\sphericalangle ADB| = |\sphericalangle ACB| = 90^\circ - |\sphericalangle BAE| = |\sphericalangle BKE|.$$

Z ostatniej równości wynika położenie punktów B, D, K, L na wspólnym okręgu.

726. Zapiszmy liczbę n w postaci $n = 2^k q$ ($k \geq 0, q \geq 1$ całkowite, q nieparzyste). Znajdujemy wykładnik δ , dla którego

$$(1) \quad 2^\delta \equiv 1 \pmod{q}.$$

Jeśli pewien wykładnik spełnia ten warunek, to jego dwukrotność też. Można więc wybrać δ tak, by

$$(2) \quad \frac{q}{2} < \delta \leq q - 1.$$

Liczbę m , o jaką pyta zadanie, spróbujemy znaleźć wśród liczb postaci $n - j\delta$ ($j \geq 0$ całkowite). Dla $m = n - j\delta$ różnica

$$2^n - 2^m = 2^{n-j\delta}(2^{j\delta} - 1)$$

będzie podzielna przez $n = 2^k q$, jeśli tylko $k \leq n - j\delta$, bowiem czynnik w nawiasie dzieli się przez q (por. (1)). Biorąc jeszcze pod uwagę wymaganie, by $m \leq n/2$, widzimy, że wystarczy znaleźć liczbę j spełniającą nierówność

$$(3) \quad \frac{n}{2} \leq j\delta \leq n - k;$$

wówczas liczba $m = n - j\delta$ spełni wszystkie żądane warunki.

Gdy n jest liczbą nieparzystą, czyli gdy $k = 0, q = n$, można wziąć $j = 1$ (por. (2)).

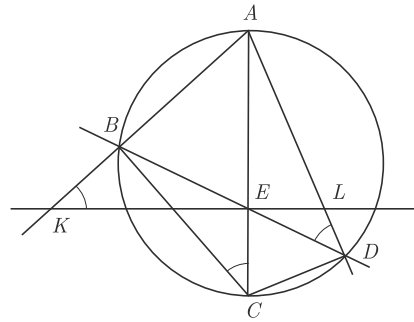
Gdy n jest liczbą parzystą (więc $k \geq 1$), warunki (3) postulują istnienie wielokrotności liczby δ w przedziale $[n/2, n-k]$. Do tego wystarczy, by δ nie przekraczała wartości $n/2 - k + 1$ (bo tyle jest liczb całkowitych w tym przedziale); a dzięki oszacowaniu (2) wystarczy, by zachodziła nierówność

$$q - 1 \leq \frac{n}{2} - k + 1,$$

czyli (równoważnie)

$$(2^{k-1} - 1)q \geq k - 2.$$

To kończy rozwiązanie, bowiem ostatnia nierówność jest słuszna dla każdej pary liczb całkowitych $k, q \geq 1$.



Czołówka ligi zadaniowej **Klub 44 M** po uwzględnieniu ocen rozwiązań zadań 723 ($WT = 1,33$) i 724 ($WT = 2,12$) z numeru 6/2016

Piotr Kumor	Olsztyn	45,36
Tomasz Wietecha	Tarnów	42,11
Witold Bednarek	Łódź	38,72
Franciszek S. Sikorski	Warszawa	38,08
Zbigniew Skalik	Wrocław	37,76
Marek Gałecki	USA	37,76
Roksana Słowik	Knurów	36,41

Uczestnicy ligi, przekraczający barierę 44 p. prawie równocześnie – tak się ciekawie złożyło – toż to sama elita Klubu 44M! Przypomnijmy sobie nazwiska z poprzednich dwóch miesięcy i popatrzmy na bieżącą tabelę: Piotr Kumor po raz trzynasty (!); a tuż za nim ligowcy, którzy też (jak widać) miną linię mety lada chwila, po raz któryś-tam z rzędu...

Prosto z nieba: Niezwykle powolny pulsar

W 2017 roku będziemy świętować 50-lecie odkrycia pulsarów. Jak to często bywa w astronomii, zdarzyło się ono przez przypadek.

Pulsary to *gwiazdy neutronowe*, czyli pozostałości po jądrze supernowej – obiekty o rozmiarze parunastu kilometrów i masie około $1,5 M_{\odot}$. Gęstość materii w ich wnętrzach wielokrotnie przewyższa gęstość jądra atomowego.

Pulsary są bardzo gęstymi i bardzo małymi gwiazdami o bardzo dużym, nawet jak na warunki astronomiczne, polu magnetycznym – obracając się cyklicznie wokół własnej osi wysyłają, podobnie do latarni morskiej, w kierunku obserwatora błysk promieniowania powstającego w magnetosferze. Pierwszy pulsar, PSR B1919+21, o okresie obrotu 1,33 s został znaleziony przez Jocelyn Bell podczas obserwacji kwazarów. 50 lat po odkryciu znamy ponad 2000 różnego rodzaju pulsarów, obracających się z różnymi częstotliwościami. Najszybszy z nich kręci się aż 716 razy na sekundę! A który pulsar obraca się najwolniej? Częstotliwość obrotu namagnesowanej gwiazdy neutronowej jest skorelowana z jej wielkością pola magnetycznego. Szybko rotujące pulsary mają zwykle słabe pole około 10^4 T (dla porównania, pole magnetyczne Ziemi to $0,5 \mu\text{T}$). Jest ono słabe, ponieważ zanikło podczas ewolucji pulsara m.in. w trakcie akrecji materii z towarzyszącej mu gwiazdy w układzie podwójnym. Na drugim końcu skali znajdują się magnetary, o polach rzędu

10^{11} T i okresach obrotu rzędu paru sekund. W ich przypadku wyraźnie widać spowalnianie obrotu rotacji (straty energii) w wyniku emisji promieniowania elektromagnetycznego.

Tytuł najwolniej obracającego się pulsara przypada obecnie 1E 161348-5055, znajdującemu się w pozostałości po supernowej RCW 103, która wybuchła około 9000 lat temu. Obserwacje teleskopu rentgenowskiego Chandra, przeprowadzone w ciągu ostatnich paru lat, wykazały długookresową (24000 sekund, czyli 6,67 godziny) zmienność promieniowania X pochodzącego z mgławicy. Twardych dowodów na związek tej modulacji z gwiazdą neutronową dostarczyły obserwacje teleskopu Swift, który wykrył krótki błysk z kierunku 1E 1613 – błyski rentgenowskie tego typu są charakterystyczne dla magnetarów i najprawdopodobniej związane z ewolucją ich ogromnego pola magnetycznego. Dodatkowa analiza z użyciem teleskopu NuSTAR (Nuclear Spectroscopic Telescope Array) oraz archiwalnych danych XMM-Newton (odkrycie błysku w 1999 roku) umacniają tezę, że w centrum RCW 103 rezyduje magnetar o niezwykłych właściwościach. Pozostaje zadać oczywiste pytanie, jak otrzymać tak wolno rotujący obiekt. Mogło do tego dojść za sprawą obfitego opadu materii z pozostałości po supernowej na świeżo powstałą gwiazdę neutronową. Poszukiwania podobnych pulsarów trwają.

Michał BEJGER

Niebo w styczniu

Długie zimowe noce warto wykorzystać na obserwacje gromad otwartych. Na początku stycznia polecamy obserwacje M41. Nie będzie to łatwe zadanie, gdyż gromada będzie znajdować się raptem 17° nad horyzontem południowego nieba. Dodatkowo jasność M41 szacowana na $4,5^m$ wymaga terenów niezanieczyszczonych światłem miast lub użycia lornetki do obserwacji. Kto jednak chciałby znaleźć gromadę, której ponoć przyglądał się Arystoteles, powinien jej szukać w pierwszej połowie nocy, na tle gwiazdozbioru Psa, 4° na południe od Syriusza.

Kolejną gromadą otwartą wartą uwagi jest M47, znajdująca się w gwiazdozbiornie Rufy, czyli między konstelacjami Jednorozca i Wielkiego Psa. Gromada ta, odkryta w 1771 roku, przez prawie 200 lat uważana była za „zaginioną” ze względu na błąd w zapisie jej położenia w katalogu. M47 możemy wypatrywać na południowym-wschodzie za pomocą lornetki (jasność tej gromady to $5,2^m$). Gromada ta znajdzie się 18° nad horyzontem.

Trzecią polecaną na styczniowe obserwacje gromadą otwartą jest M44, popularnie nazywana żłóbkiem lub ulem. Gromada widoczna przez całą noc, o jasności $3,10^m$, pojawi się na południowym niebie w gwiazdozbiornie Raka, a dokładniej między gwiazdami γ Cancr (Asellus Borealis) oraz δ Cancr (Asellus Australis), o jasnościach $4,7^m$ i $3,9^m$. Patrząc na tamten rejon nocnego nieba, warto przesunąć się w kierunku gwiazdozbioru Bliźniąt. Osoby wyposażone w lornetki lub małe lunetki mogą obserwować Westę, o jasności około $6,7^m$. Dodatkowo, tuż obok niej (rektascensja: $8,3\text{h}$, deklinacja: $+21^\circ$) dostrzec będzie można deszcz meteorów δ Cancridy, których maksimum wypada 17 I. Jest to jednak rój dość słaby z aktywnością rzędu 4 meteorów na godzinę poruszających się 28 km/s . Miłośnikom obfitych deszczów spadających gwiazd w tym miesiącu polecamy Kwadrantydy.

Rój ten widoczny między 1 a 6 stycznia, swoje maksimum będzie miał 3 I, a jego maksymalna aktywność szacowana jest na około 80 śladów na godzinę. Kwadrantydy znajdują się na pograniczu gwiazdozbiorów Wolarza, Herkulesa i Smoka, a dokładniej na współrzędnych rektascensja: $15,5\text{h}$, deklinacja: $+50^\circ$, patrząc w kierunku północno-wschodniego nieba.

Dla tych, którzy chcieliby prowadzić obserwacje w noc sylwestrową i zacząć rok 2017 od spoglądania na nocne niebo, polecamy kometę 45P/Honda-Mrkos-Pajdusakova, na tle gwiazdozbioru Koziorożca na południowo-zachodnim niebie, tuż po zapadnięciu zmroku. Jasność komety szacowana jest na ok $6,5^m$, lepiej jednak dokładną wartość sprawdzić parę dni przed planowanymi obserwacjami, na przykład na stronie www.in-the-sky.org. Przyszłe jasności komet często obarczone są dużymi błędami, gdyż trudno przewidzieć ich zachowanie w pobliżu Słońca. Na przełomie starego i nowego roku, 45P/Honda-Mrkos-Pajdusakova znajdzie się w najbliższym swoim położeniu względem Słońca, w odległości zaledwie 0,53 jednostki astronomicznej. Jak wskazuje literka P w jej oznaczeniu, kometa ta ma orbitę okresową. Okres obiegu wokół naszej Diennej Gwiazdy wynosi 5,25 roku.

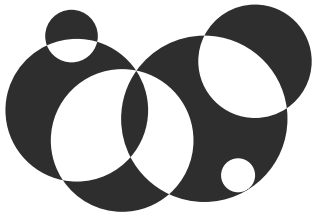
W styczniu warto pamiętać o obserwacjach planet wewnętrznych Układu Słonecznego, gdyż zarówno Merkury, jak i Wenus znajdują się na swoich maksymalnych elongacjach, czyli położeniach sprzyjających najlepszym obserwacjom. 12 I Wenus znajdzie się na wysokości $47,1^\circ$ nad horyzontem zachodniego nieba i widoczna dla obserwatorów będzie zaraz po zachodzie Słońca. Natomiast 19 I Merkury będzie znajdował się na wysokości $24,1^\circ$ nad horyzontem wschodniego nieba tuż przed świtem. Planując obserwacje, warto pamiętać, iż pełnia Księżyca wypada 12 I, natomiast now 28 I.

Karolina BĄKOWSKA

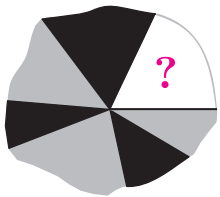


Przyjmuje się szereg założeń gwarantujących „przyzwoitość” mapy, m.in. że każde państwo jest w jednym kawałku.

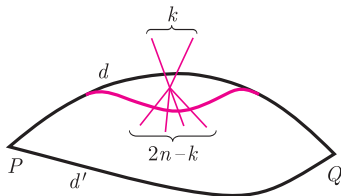
Kraje uważamy za *sąsiednie*, gdy ich granica zawiera łuk jakiejś krzywej. Punkty granic, w których schodzą się więcej niż dwa kraje, nazywamy *wierzchołkami* mapy, a liczbę odcinków granic w takim punkcie — *stopniem* wierzchołka.



Rys. 1



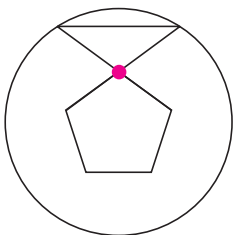
Rys. 2



Rys. 3



Rys. 4. Przekształcona mapa z rysunku 1.



Rys. 5

Czarno-białe mapy

Joanna JASZUŃSKA

Słynne twierdzenie orzeka, że każdą mapę da się pomalować najwyżej czterema barwami. Oczywiście, zawsze należy malować tak, by sąsiadujące ze sobą państwa miały różne kolory. Są jednak mapy, dla których wystarczy mniej barw.

1. Na kartce narysowano pewną liczbę okręgów. Udowodnij, że uzyskaną w ten sposób mapę można pomalować dwoma kolorami (rys. 1).

2. W pewnym wierzchołku mapy spotykają się dokładnie trzy państwa. Czy oznacza to, że mapy tej nie da się pomalować dwoma kolorami?

Zauważmy, że jeśli mapa ma wierzchołek nieparzystego stopnia, to do pomalowania schodzących się w nim krajów nie wystarczą dwa kolory (rys. 2).

Twierdzenie. *Mapę można pomalować dwoma kolorami wtedy i tylko wtedy, gdy każdy jej wierzchołek jest stopnia parzystego.*

Dowód w jedną stronę wynika z powyższej obserwacji.

Dla dowodu drugiej implikacji rozważmy mapę, której każdy wierzchołek ma stopień parzysty. Pomalujmy dowolnie wybrany kraj P na czarno. Następnie każdy inny kraj Q połączmy z P dowolną drogą nieprzechodzącą przez wierzchołki mapy i pomalujmy też na czarno, jeśli droga ta przekracza parzystą liczbę granic, lub na biało, jeśli nieparzystą. Aby zakończyć dowód, należy wykazać, że kolor państwa Q nie zależy od wyboru drogi.

Rozważmy dwie różne drogi d i d' i deformujmy d do d' , „mijając” kolejne wierzchołki jak na rysunku 3. Dla wierzchołka stopnia $2n$ droga, zamiast pewnych k krawędzi z niego wychodzących, przecina po deformacji pozostałych $2n - k$ jego krawędzi. Liczby te są tej samej parzystości, zatem taka zmiana nie wpływa na kolor państwa Q . Stąd faktycznie kolor ten nie zależy od wyboru drogi. \square

3. *Bazgroł* to narysowana ołówkiem na kartce ciągła krzywa zamknięta, przy czym nie wolno rysować drugi raz wzdłuż narysowanej już linii (również w przypadku więcej niż jednego bazgroła na kartce). Jeśli dwa bazgroły mają wspólny punkt, to się w nim przecinają. Wykaż, że:

- (a) mapę wyznaczoną bazgrołem można pomalować dwoma kolorami.
- (b) liczba skrzyżowań pomiędzy dwoma bazgrołami zawsze jest parzysta.

4. W każdym wierzchołku danego wielościanu wypukłego schodzi się parzysta liczba krawędzi. Wykaż, że dowolny przekrój tego wielościanu płaszczyzną nieprzechodzącą przez żaden wierzchołek jest wielokątem o parzystej liczbie boków.

Rozważmy dowolną spójną mapę (tzn. w jednym kawałku), której każdy wierzchołek ma stopień parzysty i pomalujmy ją dwiema barwami. Następnie przekształćmy tę mapę w jeden duży jednobarwny region w sposób przedstawiony na rysunku 4 (warto zastanowić się, dlaczego zawsze jest to możliwe!). Wówczas obwód tego regionu wyznacza sposób narysowania całej pierwotnej mapy bez odrywania ołówka od kartki i z powrotem do punktu wyjścia.

Rozwiązania niektórych zadań

R1. Każdy punkt mapy pomalujmy na czarno, jeśli leży on wewnątrz nieparzystej liczby spośród danych okręgów, a na biało w przeciwnym przypadku. \square

Można też kolorować mapę w miarę jej powstawania. Wnętrze pierwszego okręgu pomalujmy na czarno. Następnie po dorysowaniu każdego kolejnego okręgu, zamieńmy barwy wszystkich obszarów w jego wnętrzu. Nietrudno sprawdzić, że uzyskamy w ten sposób dobre pokolorowanie.

R2. Nie, np. mapę z rysunku 5 da się pomalować dwiema barwami. \square

R3. (b) Pokolorujmy mapę wyznaczoną przez pierwszy bazgroł dwiema barwami (da się to zrobić na mocy części (a)). Malujmy teraz drugi bazgroł zgodnie z kolorami państw, przez które wędruje. W każdym punkcie przecięcia pierwszego bazgroła zmienia się kolor (i tylko w tych punktach). Ponieważ drugi bazgroł jest krzywą zamkniętą, zmienia on kolor parzystą liczbę razy, co kończy dowód. \square